KHÔNG GIAN SOBOLEV

Định lý. Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và $i \in \{1, . . ., n\}$ sao cho $\partial\Omega$ trơn. Lúc đó

$$\int_\Omega f\frac{\partial h}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}hdx \qquad \forall\ f \in C^1(\Omega), h \in C^1_c(\Omega),$$

Bài toán S1. Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và $i \in \{1, . . ., n\}$ sao cho $\partial\Omega$ trơn. Lúc đó

$$\int_\Omega \tilde{f}\frac{\widetilde{\partial h}}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega \frac{\widetilde{\partial f}}{\partial x_i}\tilde{h}dx \qquad \forall\ f \in C^1(\Omega),\ h \in C^1_c(\Omega),$$

Theorem. Cho Ω là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và f là một hàm số đo được trên Ω. Ta nói f khả tích từng vùng trên Ω. Giả sử

$$\int_D fg\,dx = 0 \qquad \forall\ g \in C^1_c(D).$$

Then $f = 0$ a.e. on Ω.

Bài toán 1. Cho $f(x) = |x|$ với mọi x trong $\Omega = (-1\ ,\ 1)$. Chứng minh $u = \tilde{f} \in L^1(\Omega)$ có đạo hàm suy rộng

H.D. Tìm hàm số khả tích g sao cho

$$\int_\Omega f\frac{\partial h}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega ghdx \qquad \forall h \in C^1_c(\Omega),$$

Định nghĩa. Cho Ω là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và f là một hàm số đo được trên Ω. Ta nói f khả tích từng vùng trên Ω nếu với mọi tập compắc K chứa trong Ω

$$\int_K |f|\,dx < \infty.$$

Ta ký hiệu các lớp tương đương cũa các hàm số khả tích địa phương là $L^1_{loc}(\Omega)$.

Định nghĩa. Cho p và $r \in [1,\infty)$, Ω là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$, $i \in \{1, . . ., n\}$, u và v trong $L^1_{loc}(\Omega)$. Ta nói v là đạo hàm suy rộng theo biến thứ i của u nếu

$$\int_\Omega u\frac{\widetilde{\partial h}}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega v\tilde{h}dx \qquad \forall\ h \in C^1_c(\Omega),$$

Bài toán 2. Cho $f(x) = \chi_{(0,1)}(x)$ với mọi x trong $\Omega = (-1\ ,\ 1)$. Chứng minh $u = \tilde{f} \in L^1(\Omega)$ và không có đạo hàm suy rộng .

H.D. Chứng minh không có hàm số khả tích g sao cho

$$\int_\Omega f\frac{\partial h}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega ghdx \qquad \forall h \in C^1_c(\Omega),$$

Định nghĩa. Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và $i \in \{1, . . ., n\}$ sao cho $\partial\Omega$ trơn và $p \in [1, \infty]$. Ta ký hiệu $W^{1,p}(\Omega)$ là tập hợp các lớp hàm u trong $L^p(\Omega)$ có các đạo hàm suy rộng $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ với mọi $i = 1,2, . . . , n$. Đặt

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_{L^p} + \sum_{j=1}^n \left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_{L^p} \qquad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

Bài toán 3. Chứng minh $\|.\|_{1,p}$ là một chuẩn trên $W^{1,p}(\Omega)$.

Bài toán 4. Chứng minh $(W^{1,p}(\Omega), \|.\|_{1,p})$ là một không gian Banach.

H.D. Cho $\{u_m\}$ là một dãy Cauchy trong $W^{1,p}(\Omega)$. Chứng minh có v và v_j trong $L^p(\Omega)$ sao cho $\{u_m\}$ hội tụ về v, và $\{\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\}$ hội tụ về v_m trong $L^p(\Omega)$ với mọi $i = 1, \ldots, n$.

Định nghĩa. Đặt $W_0^{1,p}(\Omega)$ là bao đóng của $C_c^1(\Omega)$ trong $(W^{1,p}(\Omega), \|.\|_{1,p})$

Định lý. Cho Ω là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$, $p \in (1,\infty)$, và T là một ánh xạ tuyến từ $W^{1,p}(D)$ vào $\mathbb{R}$. Lúc đó T liên tục trên $W^{1,p}(D)$ nếu và chỉ nếu có $g, g_1, \ldots, g_n$ trong $L^{p/(p-1)}(D)$ sao cho

$$T(u) = \int_D [ug + \frac{\partial u}{\partial x_1} g_1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} g_n] dx \qquad \forall u \in W^{1,p}(D).$$

Định lý (Poincaré). Cho Ω là một tập mở **bị chặn** trong $\mathbb{R}^n$ và $p \in [1,\infty)$. Lúc đó có một số thực dương C_p sao cho

$$\int_\Omega |u|^p dx \le C_p \int_\Omega |\nabla u|^p dx \qquad \forall\ u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Bài toán 4. Cho Ω là một tập mở **bị chặn** trong $\mathbb{R}^n$ và $p \in [1,\infty)$. Đặt

$$|||u|||_p = \{\int_\Omega |\nabla u|^p dx\}^{1/p} \qquad \forall\ u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Chứng minh $|||.|||_p$ là một chuẩn tương đương với $\|.\|_{1,p}$ trên $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Bài toán 5. Cho Ω là một tập mở **bị chặn** trong $\mathbb{R}^n$ $(W_0^{1,2}(\Omega), \|.\|_{1,2})$ và $(W_0^{1,2}(\Omega), |||.|||_2)$ là các không gian Hilbert.

Định lý. Cho Ω là một tập mở bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ và T là một ánh xạ tuyến tính từ $W_0^{1,2}(D)$ vào $\mathbb{R}$. Lúc đó T liên tục trên $W_0^{1,2}(D)$ nếu và chỉ nếu có g trong $W_0^{1,2}(D)$ sao cho

$$T(u) = \int_D [\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial g}{\partial x_n}] dx \qquad \forall u \in W_0^{1,2}(D).$$

Định lý (Sobolev imbedding). Cho Ω là một tập mở bị chặn trong $\mathbb{R}^n$, và $u \in W^{1,p}(\Omega)$ với $p \in (1,\infty)$. Lúc đó $u \in L^q(\Omega)$ với mọi $q \in [1, \frac{np}{n-p}]$

Định lý (Sobolev inequality). Cho Ω là một tập mở bị chặn trong $\mathbb{R}^n$, và $u \in W^{1,p}(\Omega)$ với $p \in (1,\infty)$. Lúc đó có một số thực dương C sao cho

$$\|u\|_q \leq C\,\|u\|_{1,p} \qquad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega)\,.$$

Bài toán 5 . Cho Ω là một tập mở bị chặn trong $\mathbb{R}^3$. Đặt $T(u) = u^2$ với mọi $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Chứng minh T là một ánh xạ liên tục từ $W^{1,2}(\Omega)$ vào $L^2(\Omega)$.

Định lý(Rellich-Kondrachov). Cho Ω là một tập mở bị chặn trong $\mathbb{R}^n$, $p \in [1,\infty)$ và $q \in [1, \frac{np}{n-p})$. Đặt

$$T(u) = u \qquad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega)\,.$$

Lúc đó T là một ánh xạ tuyến tính liên tục từ $W^{1,p}(\Omega)$ vào $L^q(\Omega)$, và bao đóng của $T(A)$ trong $L^q(\Omega)$ là một tập compact trong $L^q(\Omega)$ với mọi tập bị chặn A trong $W^{1,p}(\Omega)$.

Bài toán 6 . Cho Ω là một tập mở bị chặn trong $\mathbb{R}^3$. Đặt $T(u) = u^2$ với mọi $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Cho $B(0,1)$ là quả cầu đơn vị trong $W^{1,2}(\Omega)$. Chứng minh $T(B(0,1))$ là một một tập compact trong $L^1(\Omega)$.

Bài toán 7 . Cho Ω là một tập mở bị chặn trong $\mathbb{R}^4$ và f trong $L^{3/2}(\Omega)$. Đặt

$$T(u) = \int_\Omega u f dx \qquad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Chứng minh T là một ánh xạ tuyến tính liên tục từ $W_0^{1,2}(\Omega)$ vào $\mathbb{R}$.

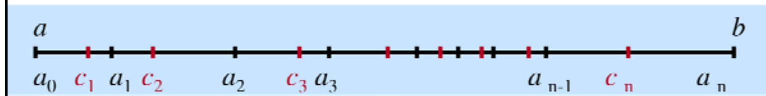
TÍCH PHÂN CỦA ÁNH XẠ CÓ TRỊ VECTƠ

Định nghĩa. Cho $2n+1$ số thực $a_0, a_1, \cdots, a_n, c_1, \cdots, c_n$ sao cho $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ và $c_k \in [a_{k-1}, a_k]$ với mọi $k = 1, \cdots, n$.

Lúc đó ta nói $P = \{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n; c_1, \cdots, c_n\}$ là một phân hoạch của khoảng $[a, b]$ và đặt

$$|P| = \max\{a_1 - a_0, a_2 - a_1, \cdots, a_n - a_{n-1}\}.$$

Đặt $\mathcal{P}([a,b])$ là tập hợp tất cả các phân hoạch của $[a, b]$.



Định nghĩa. Cho $(E, \|.\|)$ là một không gian định Banach. Cho u là một ánh xạ liên tục từ một khoảng đóng $[a,b]$ vào E, và $P = \{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n; c_1, \cdots, c_n\}$ là một phân hoạch của khoảng $[a, b]$. Ta đặt

$$S(u,P) = \sum_{k=1}^{n} u(c_k)(a_k - a_{k-1})$$

và gọi tổng số này là tổng Riemann tương ứng với phân hoạch P.

Dùng tính liên tục đều của u trên $[a,b]$ và tính đầy đủ của E, ta chứng minh được có một vectơ w sao cho

$$\lim_{|P|\to 0} S(u,P) = w.$$

Ta gọi w là tích phân của u trên $[a, b$ và ký là $\int_a^b u(t)dt$.

Bài toán 1. Cho $(E, \|.\|)$ là một không gian định Banach. Cho u là một ánh xạ liên tục từ một khoảng đóng $[a,b]$ vào E và T là là một ánh xạ tuyến tính từ E vào $\mathbb{R}$. Chứng minh

$$\int_a^b (T \circ u)(t)dt = T\left(\int_a^b u(t)dt\right).$$

Hướng dẫn. Để ý $S(T \circ u, P) = T(S(u,P))$ với mọi phân hoạch P của $[a,b]$.

Bài toán 2. Cho $(E, \|.\|)$ là một không gian định Banach. Cho u và v là hai ánh xạ liên tục từ một khoảng đóng $[a,b]$ vào E và α là một số thực dương. Chứng minh

$$\int_a^b (u + \alpha v)(t)dt = \int_a^b u(t)dt + \alpha\int_a^b v(t)dt$$

Hướng dẫn. Chứng minh

$$T\left(\int_a^b (u+\alpha v)(t)dt\right) = T\left(\int_a^b u(t)dt + \alpha\int_a^b v(t)dt\right) \quad \forall T \in L(E,\mathbb{R})$$

Bài toán 3. Cho $(E, \|.\|)$ là một không gian định Banach. Cho u là một ánh xạ liên tục từ một khoảng đóng $[a,b]$ vào E. Chứng minh

$$\left\|\int_a^b u(t)dt\right\| \le \int_a^b \|u(t)\|_E dt$$

Hướng dẫn. Chọn $T \in L(E, \mathbb{R})$ sao cho $\|T\| = 1$ và

$$\left\|\int_a^b u(t)dt\right\| = T\left(\int_a^b u(t)dt\right)$$

Áp dụng các bài toán trước.

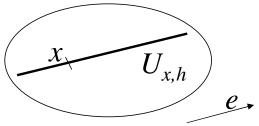
PHÉP TÍNH VI PHÂN TRONG KHÔNG GIAN ĐỊNH CHUẨN

Cho E và F là hai không gian định chuẩn với các chuẩn tương ứng $\|.\|_E$ và $\|.\|_F$, U là một tập mở trong E , và e là một vectơ trong E và $x \in U$. .

Bài toán 1. Chứng minh có một số thực dương α sao cho khoảng mở (- α, α) chứa trong tập hợp sau

$$I_{x,h} = \{ t : t \in \mathbb{R} \text{ và } x + te \in U \}.$$

Đặt : $U_{x,h} = \{ y : y = x + te \in U \quad \text{và} \quad t \in \mathbb{R} \}$



ĐỊNH NGHĨA 1. Cho f là một ánh xạ từ U vào F, e là một vectơ trong E và $x \in U$. Ta nói

■ f có đạo hàm riêng phần theo hướng e tại x là nếu giới hạn sau đây tồn tại

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+te) - f(x)}{t}$$

Lúc đó ta ký hiệu giới hạn này là $\frac{\delta f}{\delta e}(x)$.

■ f khả vi theo hướng tại x nếu f có đạo hàm riêng phần theo hướng theo mọi hướng trong E và có một ánh xạ tuyến tính $Df(x)$ từ E vào F để cho

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x) = Df(x)e \qquad \forall \ e \in E .$$

ĐỊNH NGHĨA 1. Cho f là một ánh xạ từ U vào F và $x \in U$. Ta nói

■ f khả vi Gâteaux tại x nếu f khả vi theo hướng tại x và $Df(x)$ thuộc $L(E,F)$.

■ f khả vi Gâteaux trên U nếu f khả vi Gâteaux tại mọi điểm x trong U .

Bài toán 2. Cho $(H,\|.\|)$ là một không gian Hibert. Đặt

$$f(x) = \|x\|^2 \qquad \forall \ x \in H.$$

Chứng minh f khả vi Gâteaux trên H.

Hướng dẫn. Cho < . , . > là tích vô hướng trong H. Để ý $\|x\|^2 = \langle x,x\rangle \ \forall \ x \in H$.

Bài toán 3. Cho f là một ánh xạ tuyến tính liên tục từ không gian định chuẩn $(E,\|.\|_E)$ vào không gian dịnh chuẩn $(F,\|.\|_F)$. Chứng minh f khả vi Gâteaux trên E.

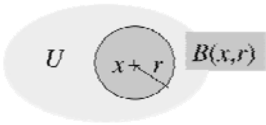
Hướng dẫn. Dùng tính chất tuyến tính liên tục của f.

Bài toán 4. Cho hai không gian định chuẩn $(E,\|.\|E)$ và $(F,\|.\|F)$, B là một ánh xạ song tuyến tính liên tục từ $E\times E$ vào F. Đặt $f(x) = B(x,x)$ với mọi x trong E.

Chứng minh f khả vi Gâteaux trên E.

Hướng dẫn. Dùng tính chất song tuyến tính liên tục của B.

Cho E và F là hai không gian định chuẩn và U là một tập mở trong E. Cho $x \in U$. Có một số thực dương r sao cho $B(x,r) \subset U$



ĐỊNH NGHĨA 2. Cho f là một ánh xạ từ U vào F, và $x \in U$. Ta nói

■ f khả vi Fréchet tại x nếu có một ánh xạ $Df(x) \in L(E,F)$ và ϕ từ $B(0,r)$ trong E vào F sao cho

(F) $f(x+h) - f(x) = Df(x)(h) + \|h\|_E\, \phi(h) \quad \forall\, h \in B(0,r)$.

■ f khả vi Fréchet trên U nếu f khả vi Fréchet tại mọi điểm x trong U.

Bài toán 5. Cho $(H,\|.\|)$ là một không gian Hibert. Đặt

$$f(x) = \|x\|^2 \qquad \forall\, x \in H.$$

Chứng minh f khả vi Fréchet trên H.

Hướng dẫn. Cho < . , . > là tích vô hướng trong H. Để ý $\|x\|^2 = \langle x,x\rangle\ \forall\, x \in H$.

Bài toán 6. Cho f là một ánh xạ tuyến tính liên tục từ không gian định chuẩn $(E,\|.\|_E)$ vào không gian dịnh chuẩn $(F,\|.\|_F)$. Chứng minh f khả vi Fréchet trên E.

Hướng dẫn. Dùng tính chất tuyến tính liên tục của f.

Bài toán 7. Cho f là một ánh xạ song tuyến tính liên tục từ không gian định chuẩn $(E,\|.\|_E)$ vào không gian dịnh chuẩn $(F,\|.\|_F)$. Chứng minh f khả vi Fréchet trên E.

Hướng dẫn. Dùng tính chất song tuyến tính liên tục của f.

Bài toán 8. Cho E và F là hai không gian định chuẩn, U là một tập mở trong E và $x \in U$. Cho f là một ánh xạ từ U vào F, và khả vi Fréchet tại x. Chứng minh f liên tục tại x.

Hướng dẫn. Dùng định nghĩa.

Bài toán 9. Cho U là một tập mở trong một không gian định chuẩn E, $\alpha \in \Phi$ và f và g là hai ánh xạ từ U vào một không gian định chuẩn F. Giả sử f và g khả vi Gâteaux (lần lượt Fréchet) tại một điểm x trong U. Chứng minh $f+g$ và αf khả vi Fréchet tại x. Hơn nữa

$$D(f+g)(x) = Df(x) + Dg(x) \quad \text{và} \quad D(\alpha f)(x) = \alpha\, Df(x).$$

Hướng dẫn. Dùng định nghĩa.

Định lý. Cho U và O là các tập hợp con mở lần lượt trong các không gian định chuẩn E và F. Cho $f : U \to O$ và $g : O \to G$ là các ánh xạ, ở đây G là một không gian định chuẩn. Cho x là một điểm trong U, giả sử f khả vi Fréchet tại x và g khả vi Fréchet tại $f(x)$. Lúc đó gof khả vi Fréchet tại x và

$$D(gof)(x) = Dg(f(x)) \text{ o } Df(x).$$

Bài toán 10 . (**Định lý giá trị trung bình**) Cho f là một ánh xạ khả vi Gâteaux từ một tập mở U trong một không gian định chuẩn E vào một không gian định chuẩn F. Cho a và b trong U sao cho tập hợp $[a,b] \equiv \{a + t(b-a) : t \in [0,1]\}$ chứa trong U. Giả sử f liên tục trên $[a,b]$. Chứng minh

$$\| f(b) - f(a) \|_F \leq \| b-a \|_E \sup\{\| Df(y) \| : y \in [a,b]\}$$

Hướng dẫn. Cho $T \in L(E, \mathbb{R})$ với $\|T\| = 1$ sao cho

$$\| f(b) - f(a) \|_F = T(f(b) - f(a)).$$

Đặt $g(s) = T(f(a+s(b-a)))$ với mọi $s \in [0,1]$. Chứng minh

$$\| (T\circ f)(b) - (T\circ f)(a) \|_F \leq \| b-a \|_E \sup\{\| D(T\circ f)(y) \| : y \in [a,b]\}$$

Bài toán 11 . (**Định lý giá trị trung bình**) Cho f là một ánh xạ khả vi Gâteaux từ một tập mở U trong một không gian định chuẩn E vào một không gian định chuẩn F. Giả sử ánh xạ $x \mapsto Df(x)(h)$ là một ánh xạ liên tục trên U với mọi h trong E . Cho a và b trong U sao cho tập hợp $[a,b] \equiv \{a + t(b-a) : t \in [0,1]\}$ chứa trong U . Chứng minh

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 Df(a + t(b-a))(b-a)dt$$

Hướng dẫn. Cho $T \in L(E, \mathbb{R})$, chứng minh

$$D(T\circ f)(a + t(b-a)) = T(Df(a + t(b-a))) \qquad \forall t \in [0,1],$$

$$T(f(b) - f(a)) = T\left(\int_0^1 Df(a + t(b-a))(b-a)dt\right).$$

Bài toán 12 . Cho f là một ánh xạ khả vi Gâteaux từ một tập mở U trong một không gian định chuẩn E vào một không gian định chuẩn F. Giả sử ánh xạ $x \mapsto Df(x)$ là một ánh xạ liên tục từ U vào $L(E, F)$. Chứng minh f khả vi Fréchet trên U .

Hướng dẫn. Cho $x \in U$ và một số thực dương r sao cho $B(x,r) \subset U$. Đặt

$$\phi(h) = \int_0^1 (Df(x+th) - Df(x))(h)dt \qquad \forall h \in B(0,r).$$

Chứng minh $\lim_{h\to 0} \| h \|^{-1} \phi(h) = 0.$

Dùng định lý giá trị trung bình.

ĐỊNH NGHĨA. Cho f là một ánh xạ từ U vào F. Ta nói

■ f liên tục khả vi Gâteaux trên U nếu f khả vi Gâteaux trên U và ánh xạ $x \mapsto Df(x)$ liên tục từ U vào $L(E,F)$.

■ f liên tục khả vi Fréchet trên U nếu f khả vi Fréchet trên U và ánh xạ $x \mapsto Df(x)$ liên tục từ U vào $L(E,F)$. Lúc đó ta nói f thuộc lớp $C^1(U)$.

ĐỊNH NGHĨA. Cho E và F là hai không gian định chuẩn, U là một mở trong E và f thuộc lớp $C^1(U)$. Lúc đó Df là một ánh xạ từ U vào không gian định chuẩn $L(E,F)$. Nếu Df khả vi Fréchet trên U, ta nói f khả vi Fréchet hai lần trên U và ký hiệu $D(Df)$ là D^2f và gọi nó là đạo hàm bậc hai của f.

Dùng qui nạp toán học ta định nghĩa được khái niệm khả vi Fréchet n lần trên U và ký hiệu $D(D^{n-1}f)$ là D^nf với $D^0f = f$ với mọi số nguyên dương n, và gọi nó là đạo hàm bậc n của f.

Ta ký hiệu $C^r(U,F)$ là tập hợp các hàm số f khả vi Fréchet r lần trên U sao cho D^nf liên tục trên U với mọi $n \le r$. Nếu f thuộc lớp $C^r(U,F)$, ta nói f liên tục khả vi Fréchet r lần trên U. Ta đặt

$$C^\infty(U,F) = \bigcap_{r=1}^{\infty} C^r(U,F).$$

ĐỊNH LÝ. Cho U là một tập mở trong một không gian Banach E, u trong $C^2(U,F)$, $x \in U$ và h và k thuộc E. Lúc đó $D^2u(x)(h,k) = D^2u(x)(k,h)$.

Bài toán 13. Cho A là một tập đo được bị chặn trong $\mathbb{R}^n$. Cho μ là độ đo Lebesgue trong $\mathbb{R}^n$. Đặt

$$f(u) = \int_A u^3 d\mu \qquad \forall u \in L^3(A).$$

Chứng minh f thuộc lớp $C^1(L^3(A), \mathbb{R})$.

Hướng dẫn. Cho u và v trong $L^3(A)$ và $t \in (-1,1)\backslash\{0\}$. Chứng minh

$$\frac{f(u+tv) - f(u)}{t} = \int_A (3u^2v + 3tuv^2 + tv^3)d\mu.$$

Suy ra f khả vi Gâteaux trong $L^3(A)$ và

$$Df(u)(v) = 3\int_A u^2 v d\mu \qquad \forall u,v \in L^3(A).$$

Cho u,v và w trong $L^3(A)$. Chứng minh

$$|[Df(u) - Df(w)](v)| \le 3(\int_A |u+w|^p d\mu)^{\frac{1}{3}}(\int_A |u-w|^p d\mu)^{\frac{1}{3}}(\int_A |v|^p d\mu)^{\frac{1}{3}}$$

Bài toán 14. Cho A là một tập đo được bị chặn trong $\mathbb{R}^n$. Cho μ là độ đo Lebesgue trong $\mathbb{R}^n$. Đặt

$$f(u) = \int_A u^3 d\mu \qquad \forall u \in L^3(A).$$

Chứng minh f thuộc lớp $C^2(L^3(A), \mathbb{R})$.

Hướng dẫn. Cho u,v và w trong $L^3(A)$. Chứng minh

$$\frac{[Df(u+tw) - Df(u)](v)}{t} = 3\int_A (2uwv + tw^2v)d\mu.$$

Suy ra $\quad D^2 f(u)(v,w) = 6\int_A uvwd\mu.$

Cho u,v, w và z trong $L^3(A)$. Chứng minh

$$|[D^2 f(u) - D^2 f(z)](v,w) = 6(\int_A |u-z|^3 d\mu)^{\frac{1}{3}}(\int_A |v|^3 d\mu)^{\frac{1}{3}}(\int_A |w|^3 d\mu)^{\frac{1}{3}}$$

Bài toán 15. Cho A là một tập đo được bị chặn trong $\mathbb{R}^n$. Cho μ là độ đo Lebesgue trong $\mathbb{R}^n$. Đặt

$$f(u) = \int_A u^3 d\mu \qquad \forall u \in L^3(A).$$

Chứng minh f thuộc lớp $C^3(L^3(A), \mathbb{R})$.

Hướng dẫn. Cho u, v, w và z trong $L^3(A)$. Chứng minh

$$\frac{[D^2 f(u+tz) - D^2 f(u)](v,w)}{t} = 0.$$

Suy ra $D^3 f(u) = 0$.

Bài toán 16. Cho A là một tập đo được bị chặn trong $\mathbb{R}^n$. Cho μ là độ đo Lebesgue trong $\mathbb{R}^n$. Đặt

$$f(u) = \int_A \sin(u(t)) d\mu \qquad \forall u \in L^5(A).$$

Chứng minh f thuộc lớp $C^1(L^5(A), \mathbb{R})$.

Hướng dẫn. Cho u và v trong $L^5(A)$ và $t \in (-1,1)\setminus\{0\}$. Chứng minh

$$\frac{f(u+tv) - f(u)}{t} = \int_A \frac{\sin(u(s)+tv(s)) - s(u(s))}{t} d\mu.$$

Dùng định lý hội tụ bị chặn, chứng minh

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(u+tv) - f(u)}{t} = \int_A \cos(u) v d\mu.$$

ĐỊNH NGHĨA . Cho f là một hàm số thực từ một tập con A của một không gian định chuẩn E và a là một điểm trong A. Ta nói :

■ f đạt cực đại tại a nếu $f(x) \le f(a)$ với mọi $x \in A$. Lúc đó a được gọi là một điểm cực đại của f.

■ f đạt cực tiểu tại a nếu $f(x) \ge f(a)$ với mọi $x \in A$. Lúc đó a được gọi là một điểm cực tiểu của f.

■ f đạt cực trị tại a nếu f đạt cực đại hoặc cực tiểu tại a. Lúc đó a được gọi là một điểm cực trị của f.

■ f đạt cực đại địa phương tại a nếu có một số thực dương r sao cho $f(x) \le f(a)$ với mọi $x \in A \cap B(a,r)$. Lúc đó a được gọi là một điểm cực đại địa phương của f.

■ f đạt cực tiểu địa phương tại a nếu có một số thực dương r sao cho $f(x) \ge f(a)$ với mọi $x \in A \cap B(a,r)$. Lúc đó a được gọi là một điểm cực tiểu địa phương của f.

■ f đạt cực trị địa phương tại a nếu f đạt cực đại hoặc cực tiểu tại a. Lúc đó a được gọi là một điểm cực trị địa phương của f.

■ a là một điểm tới hạn của f nếu A là một tập mở và f khả vi theo hướng tại a và $Df(a)(h) = 0$ với mọi $h \in E$.

Bài toán 17. Cho f là một hàm số thực trên một tập con mở U trong một không gian định chuẩn E và đạt cực trị tại a trong U. Cho h trong E sao cho f khả vi theo hướng h tại a. Chứng minh

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = 0$$

Bài toán 18. Cho A là một tập đo được bị chặn trong $\mathbb{R}^n$. Cho μ là độ đo Lebesgue trong $\mathbb{R}^n$. Đặt

$$f(u) = \int_A \sin(u(t))^2 d\mu \qquad \forall u \in L^7(A).$$

Chấp nhận f thuộc lớp $C^1(L^7(A), \mathbb{R})$. Tìm một số điểm tới hạn của f mà không cần tính đạo hàm của f.

Hướng dẫn. Tìm các cực trị của f.

ĐỊNH LÝ. (**Nhân tử Lagrange**) Cho f và g là hai hàm số thực liên tục khả vi Fréchet trên một tập mở U trong một không gian định chuẩn E và f và g là hai hàm số thực liên tục khả vi Fréchet trên U. Đặt $M = \{x \in U : g(x) = 0\}$. Giả sử có a trong M sao cho $f(a)$ là một cực trị của $f(M)$ và $Dg(a) \not\equiv 0$. Lúc đó có một số thực λ sao cho $Df(a) = \lambda\, Dg(a)$.

NỬA LIÊN TỤC DƯỚI

Định nghĩa. Cho (M,δ) là một không gian metric và f là một hàm số thực trên M. Ta nói f nửa liên tục dưới trên M nếu với mọi dãy $\{x_m\}$ hội tụ về x trong M, ta có

$$f(x) \le \liminf_{m\to\infty} f(x_m).$$

Bài toán 1. Cho (M,δ) là một không gian metric, f là một hàm số thực nửa liên tục dưới trên M, và α một số thực. Chứng minh $\{x \in M : f(x) > \alpha\}$ là một tập mở trong M.

Hướng dẫn. Chứng minh $\{x \in M : f(x) \le \alpha\}$ là một tập đóng trong M.

Bài toán 2. Cho (M,δ) là một không gian metric, f là một hàm số thực trên M. Giả sử $\{x \in M : f(x) > \alpha\}$ là một tập mở trong M với mọi số thực α. Chứng minh f nửa liên tục dưới trên M.

Hướng dẫn. Cho một dãy $\{x_m\}$ hội tụ về x trong M. Cho một số thực β sao cho $\beta < f(x)$. Chứng minh

$$\beta < \liminf_{m\to\infty} f(x_m).$$

Bài toán 3. Cho (M,δ) là một không gian metric, f là một hàm số thực nửa liên tục dưới trên M, và α trong $f(M)$. Giả sử $\{x \in M : f(x) \le \alpha\}$ compắc trong M. Chứng minh có u trong M sao cho $f(u) = \min f(M)$.

Hướng dẫn. Cho một dãy $\{x_m\}$ trong M sao cho

$$\lim_{m\to\infty} f(x_m) = \inf f(M).$$

Bài toán 3. Cho (M,δ) là một không gian metric, f là một hàm số thực trên M, và α trong $f(M)$. Giả sử với mọi $\beta \le \alpha$ tập $K_\beta = \{x \in M : f(x) \le \beta\}$ compắc. Chứng minh có u trong M sao cho $f(u) = \min f(M)$.

H.D. Cho $\{x_m\}$ là một dãy trong M sao cho $\{f(x_m)\}$ hội tụ đến $\inf f(M)$. Giả sử $\beta_m = f(x_m) \le \alpha$. Chứng minh có một dãy con $\{x_{m_k}\}$ của $\{x_m\}$ hội tụ về u trong tập $\bigcap_{m=1}^{\infty} K_{\beta_m}$.

Định nghĩa. Cho $\{x_m\}$ là một dãy trong một không gian định chuẩn E. Ta nói $\{x_m\}$ hội tụ yếu về x trong E nếu $\{T(x_m)\}$ hội tụ về $T(x)$ với mọi T trong $L(E, \mathbb{R})$.

Bài toán 4. Cho $\{x_m\}$ là một dãy hội tụ yếu về x trong một không gian Banach $(E,||.||)$. Chứng minh $\{||x_m||\}$ bị chặn trong $\mathbb{R}$.

H.D. Đặt $\Lambda_m(S) = S(x_m)$ với mọi số nguyên m và với mọi S trong $F = L(E, \mathbb{R})$. Đặt

$|||S||| = \sup \{|S(u)| : u \in E, ||u|| \le 1\}$.

$||||\Lambda_m|||| = \sup \{|\Lambda(T)| : T \in L(E, \mathbb{R}), |||T||| \le 1\}$.

Dùng định lý Hahn-Banach chứng minh $||||\Lambda_m|||| = ||x_m||$. Dùng định lý Banach-Steinhaus chứng minh $\{||||\Lambda_m||||\}$ bị chặn.

Định nghĩa. Cho M là một tập con khác trống trong một không gian Banach E và f là một hàm số thực trên M. Ta nói f nửa liên tục dưới yếu trên M nếu với mọi dãy $\{x_m\}$ hội tụ yếu về x trong M, ta có

$$f(x) \leq \liminf_{m\to\infty} f(x_m).$$

Định nghĩa. Cho M là một tập con khác trống trong một không gian Banach $(E,||.||)$ và f là một hàm số thực trên M. Ta nói f coersive trên M nếu với mọi dãy $\{x_m\}$ trong M với $\{||x_m||\}$ hội tụ về ∞ , ta có $\{f(x_m)\}$ hội tụ về ∞.

Định nghĩa. Cho M là một tập con trong một không gian Banach E. Ta nói M đóng yếu trong E nếu với mọi dãy $\{x_m\}$ trong M và hội tụ yếu về x trong E, ta có x

Định lý. Cho Ω là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và F là một hàm số thực trên $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Giả sử :

(i) Với mọi $(s,z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, hàm số $x \to F(x,s,z)$ đo được trên Ω.

(ii) Với mọi $x \in \Omega$, hàm số $(s,z) \to F(x,s,z)$ liên tục trên $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.

(iii) Với mọi $(x,s) \in \Omega\times\mathbb{R}$, hàm số $z \to F(x,s,z)$ lồi trong $\mathbb{R}^n$.

(iv) Có một hàm số khả tích ϕ trên Ω sao cho

$$F(x,s,z) \geq \phi(x) \quad \forall\ (x,s,z) \in \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n .$$

Đặt

$$J(u) = \int_\Omega F(x,u(x),\nabla u(x))dx \qquad \forall\ u \in W^{1,1}(\Omega).$$

Lúc đó J nửa liên tục dưới yếu trên $W^{1,1}(\Omega)$.

Bài toán 5. Cho E là một không gian Banach. Giả sử mọi dãy bị chặn $\{x_m\}$ trong E đều có một dãy con hội tụ yếu trong E. Cho M là một tập con đóng yếu trong E. Cho f là một hàm số thực coersive nửa liên tục dưới yếu trên M. Chứng minh có u trong M sao cho $f(u)$ = min $f(M)$.

H.D. Cho $\{u_m\}$ là một dãy trong M sao cho $\{f(u_m)\}$ hội tụ đến inf $f(M)$. Chứng minh $\{u_m\}$ là một dãy bị chặn và có một dãy con hội tụ yếu về u trong M.