BÀI GIẢNG

CƠ HỌC LÝ THUYẾT

Trịnh Anh Ngọc

9/2015

Chương 1

ĐỘNG HỌC

1.1 Động học điểm

+ Chuyển động của vật là sự thay đổi, theo thời gian, khoảng cách giữa vật và các vật "đứng yên" trong không gian. Những vật đứng yên gọi là hệ quy chiếu.

+ Chất điểm là những vật có kích thước không đáng kể so với chuyển động của chúng. Trong động học ta thường gọi chất điểm là điểm nhằm nhấn mạnh khía cạnh hình học của việc khảo sát.

+ Vị trí của điểm M tại thời điểm t là điểm hình học P của không gian trùng với M lúc t. Gọi O là điểm gắn với hệ quy chiếu. Vị trí của điểm M được xác định bởi vectơ $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$. Chuyển động của M được xác định nếu biết hàm vectơ $\mathbf{u}(t)$ sao cho

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}(t). \tag{1.1}$$

Phương trình (1.1) gọi là luật chuyển động của điểm.

+ Quỹ đạo của M là tập hợp tất cả các vị trí của M trong khoảng thời gian khảo sát.

+ Vận tốc là đại lượng đặc trưng sự thay đổi vị trí của điểm theo thời gian, bằng đạo hàm của hàm vectơ $\mathbf{r}$,

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}. \tag{1.2}$$

Vectơ vận tốc có phương là tiếp tuyến với quỹ đạo tại vị trí đang xét.

+ Gia tốc là đạo hàm của vectơ vận tốc,

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}. \tag{1.3}$$

Mô đun của vectơ vận tốc, $v = |\mathbf{v}|$, gọi là tốc độ của điểm.

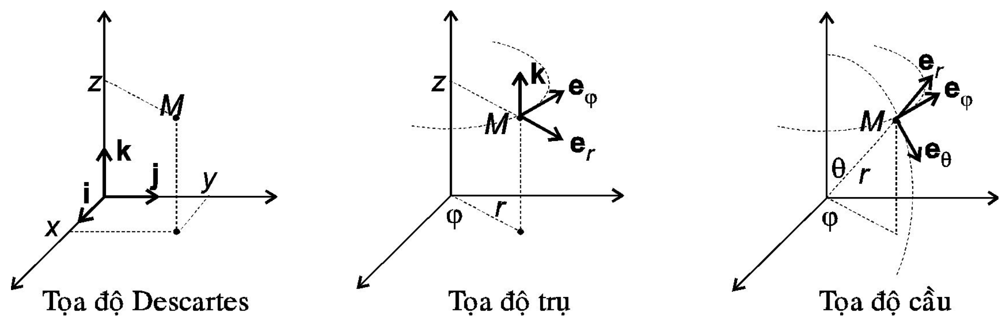
Vì

$$v^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \Rightarrow v\dot{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$$

nên tích vô hướng $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ của vận tốc và gia tốc thể hiện sự nhanh chậm của chuyển động

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = v\dot{v}\begin{cases} > 0 & \text{nhanh dần} \\ < 0 & \text{chậm dần} \\ = 0 & \text{đều} \end{cases} \tag{1.4}$$

1.1.1 Hệ tọa độ



Hình 1.1: Vectơ cơ sở địa phương.

+ Hệ tọa độ Descartes:

$$M(x,y,z) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{1.5}$$

$$\Rightarrow\; d\mathbf{r} = (dx)\mathbf{i} + (dy)\mathbf{j} + (dz)\mathbf{k} \tag{1.6}$$

+ Hệ tọa độ trụ:

$$M(r,\varphi,z) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{r} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z \tag{1.7}$$

$$\Rightarrow\; d\mathbf{r} = (dr)\mathbf{e}_r + (rd\varphi)\mathbf{e}_\varphi + (dz)\mathbf{e}_z \tag{1.8}$$

trong đó $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ là các vectơ cơ sở địa phương của tọa độ trụ tại M.

+ Hệ tọa độ cầu:

$$M(r,\varphi,\theta) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{r} = r\mathbf{e}_r \tag{1.9}$$

$$\Rightarrow\; d\mathbf{r} = (dr)\mathbf{e}_r + (rd\varphi)\mathbf{e}_\varphi + (rd\theta)\mathbf{e}_\theta \tag{1.10}$$

trong đó $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta$ là các vectơ cơ sở địa phương của tọa độ cầu tại M.

Hệ tọa độ	Quan hệ với tọa độ Descartes	Vectơ cơ sở địa phương
Trụ (r, φ, z)	$x = r\cos\varphi$ $y = r\sin\varphi$ $z = z$	$\mathbf{e}_r = \cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j}$ $\mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j}$ $\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$
Cầu (r, φ, θ)	$x = r\sin\theta\cos\varphi$ $y = r\sin\theta\sin\varphi$ $z = r\cos\theta$	$\mathbf{e}_r = \sin\theta(\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j}) + \cos\theta\mathbf{k}$ $\mathbf{e}_\varphi = \sin\theta(-\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j})$ $\mathbf{e}_\theta = \cos\theta(\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j}) - \sin\theta\mathbf{k}$

Bảng 1.1: Liên hệ giữa tọa độ trụ, cầu với tọa độ Descartes.

\+ Tọa độ tự nhiên. Cho trước đường cong C, chọn điểm M_0 làm gốc và một chiều dương trên C. *Hoành độ cong* của điểm M trên C là số đại số s có trị tuyệt đối bằng chiều dài cung $\overset{\frown}{M_0M}$ và lấy dấu cộng nếu chiều từ M_0 đến M là chiều dương, dấu trừ nếu ngược lại.

Nếu đã biết quỹ đạo của điểm M thì vị trí của M được xác định bởi hoành độ cong s,

$$M(s) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(s) \tag{1.11}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{s}\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \dot{s}\mathbf{t}, \quad v = \dot{s}. \tag{1.12}$$

Vectơ

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \tag{1.13}$$

được gọi là vectơ tiếp tuyến đơn vị tại M.

Vectơ pháp tuyến đơn vị $\mathbf{n}$ được xác định sao cho

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa\mathbf{n} = \frac{1}{\rho}\mathbf{n}, \tag{1.14}$$

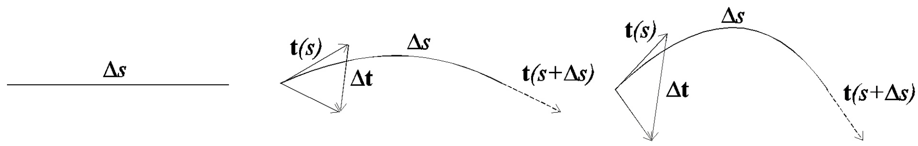
trong đó $\kappa = 1/\rho$ là *độ cong*, ρ là *bán kính cong* (của đường cong) tại M. Chú ý, *vectơ pháp tuyến đơn vị* $\mathbf{n}$ *luôn hướng về bề lõm của đường cong* C.

Ý nghĩa hình học của độ cong. Từ phương trình (1.14) ta có

$$\kappa = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\mathbf{t}(s + \Delta s) - \mathbf{t}(s)}{\Delta s} \right|.$$

Tỉ số (ký hiệu $\Delta\mathbf{t} = \mathbf{t}(s + \Delta s) - \mathbf{t}(s)$)

$$\kappa_{tb} = \frac{|\Delta\mathbf{t}|}{|\Delta s|}$$



Hình 1.2: Cung càng cong $|\Delta\mathbf{t}|$ càng lớn.

cho độ cong trung bình của cung giữa hai điểm $\mathbf{r}(s)$, $\mathbf{r}(s+\Delta s)$ (Hình 1.2).

Khai triển hàm vectơ $\mathbf{r}(s)$ trong lân cận điểm $M(0)$[1]

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(s) &= \mathbf{r}(0) + s\left[\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right]_{s=0} + \frac{1}{2}s^2\left[\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right]_{s=0} + O(s^3)\\ &= \mathbf{r}(0) + s\mathbf{t} + \left(\frac{1}{2}\kappa s^2\right)\mathbf{n} + O(s^3) \qquad (1.15)\end{aligned}$$

trong đó $\mathbf{r}(0)$ là vị trí điểm M, $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \kappa$ được tính tại điểm M.

Như vậy, gần M, đường cong C nằm trong mặt phẳng qua M có hai vectơ chỉ phương là $\mathbf{t}$ và $\mathbf{n}$. Dùng các công thức xấp xỉ

$$\sin(\kappa s) \approx \kappa s, \quad 1 - \cos(\kappa s) \approx \frac{1}{2}(\kappa s)^2$$

và đặt $\rho = 1/\kappa$, phương trình (1.15) có thể viết lại

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(0) + \rho\mathbf{n} + \rho[\sin(\kappa s)\mathbf{t} - \cos(\kappa s)\mathbf{n}] + O(s^3) \qquad (1.16)$$

nghĩa là đường cong C được xấp xỉ bởi đường tròn tâm tại điểm xác định bởi $\mathbf{r}(0) + \rho\mathbf{n}$ bán kính ρ.

Gia tốc:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{s}\mathbf{t} + \dot{s}^2\frac{d\mathbf{t}}{ds} &(1.17)\\ &= \ddot{s}\mathbf{t} + \kappa\dot{s}^2\mathbf{n} = \dot{v}\mathbf{t} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}. &(1.18)\end{aligned}$$

Gia tốc gồm hai thành phần: gia tốc tiếp $w_t = \dot{v}$, gia tốc pháp $w_n = v^2/\rho$.

Công thức tính bán kính cong (ký hiệu $w = |\ddot{\mathbf{r}}|$):

$$\rho = \frac{v^2}{\sqrt{w^2 - w_t^2}}. \qquad (1.19)$$

[1]Để đơn giản việc trình bày ta xét điểm M có hoành độ cong $s = 0$.

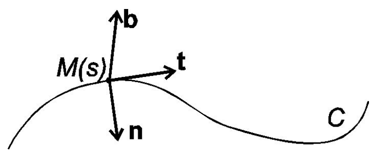
Phương pháp	Luật chuyển động	Vận tốc	Gia tốc
Vectơ	$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t)$	$\dot{\mathbf{r}}$	$\ddot{\mathbf{r}}$
Descartes $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$	$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$	$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$	$(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$
Trụ $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{k}\}$	$\begin{cases} r = f(t) \\ \varphi = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$	$(\dot{r}, r\dot{\varphi}, \dot{z})$	$(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}, \ddot{z})$
Cực $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi\}$	$\begin{cases} r = f(t) \\ \varphi = g(t) \end{cases}$	$(\dot{r}, r\dot{\varphi})$	$(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})$
Tự nhiên $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$	$s = f(t)$	$(v, 0)$, $v = \dot{s}$	$\left(\dot{v}, \dfrac{v^2}{\rho}\right)$

Bảng 1.2: Luật chuyển động - Vận tốc - Gia tốc.

Vectơ lưỡng pháp tuyến đơn vị:

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}. \tag{1.20}$$

Các vectơ $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ là cơ sở địa phương của đường cong có phương trình tham số $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ (hình 1.7).



Hình 1.3: Vectơ cơ sở địa phương của tọa độ tự nhiên.

1.1.2 Vài chuyển động quan trọng

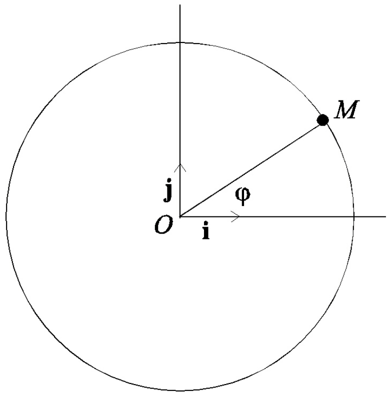
$\star$ *Chuyển động tròn.* Điểm M chuyển động tròn trong Oxy quanh O. Ký hiệu: $\mathbf{r}$ - vectơ định vị điểm,

$$\mathbf{r} = R(\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j}),$$

trong đó R là bán kính vòng tròn, φ là góc quay.

Vận tốc:

$$\mathbf{v} = R(-\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j})\dot{\varphi} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \tag{1.21}$$



Hình 1.4: Chuyển động tròn.

trong đó $\omega = \dot{\varphi}$ - vận tốc góc, $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ - vectơ vận tốc góc.

Gia tốc:

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r} + \underbrace{(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})}_{=0}\boldsymbol{\omega} - \omega^2\mathbf{r} \\ &= \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r} - \omega^2\mathbf{r}, \end{aligned} \tag{1.22}$$

trong đó $\boldsymbol{\epsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ - vectơ gia tốc góc.

Nếu chuyển động đều $\omega = const$ thì $v = \omega R$ ($\omega = const$) và gia tốc hướng tâm $w = \omega^2 R$.

$\star$ *Chuyển động có gia tốc xuyên tâm.* Điểm chuyển động có gia tốc xuyên tâm nếu đường thẳng đi qua điểm có phương gia tốc luôn luôn đi qua điểm cố định O.

Ta có

$$\mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) - \underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}}_{=\mathbf{0}} = \mathbf{0}.$$

Như vậy,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Điểm chuyển động} \\ \text{có gia tốc xuyên tâm}\end{array}} \Leftrightarrow \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}(\text{const}) \Rightarrow \text{Quỹ đạo phẳng.} \tag{1.23}$$

Trong mặt phẳng chuyển động dùng tọa độ cực. Nếu chọn điểm đầu P_0 của M làm gốc thì vị trí của M có thể được xác định bởi số đại số σ, có giá trị tuyệt đối bằng diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi tia OP_0, OM và quỹ đạo, lấy dấu cộng nếu chiều từ P_0 đến M là chiều dương, dấu trừ nếu ngược lại. Vectơ $\boldsymbol{\sigma} = \sigma\mathbf{k}$ được gọi là vectơ diện tích.

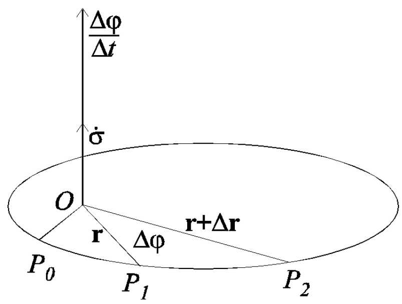
Ta có, với Δt bé,

$$\frac{\sigma(t+\Delta t)-\sigma(t)}{\Delta t}\mathbf{k} \approx \frac{1}{2}\frac{\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}(t+\Delta t)}{\Delta t}$$

suy ra

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sigma(t+\Delta t)-\sigma(t)}{\Delta t}\mathbf{k} = \frac{1}{2}\mathbf{r}\times\mathbf{v}(\text{const}) \tag{1.24}$$

là vectơ vận tốc diện tích.



Hình 1.5: Vectơ vận tốc diện tích.

Luật diện tích. *Vận tốc diện tích của điểm chuyển động có gia tốc xuyên tâm là hằng.*

1.2 Động học cố thể

+ Hệ chất điểm là tập hợp các chất điểm tương tác lẫn nhau và với các vật bên ngoài. Nếu khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ thuộc hệ không thay đổi trong suốt thời gian khảo sát ta gọi hệ là cố thể.

+ Ký hiệu cố thể là $\mathcal{S}$. Ánh xạ $\mathbf{v} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^3$, tương ứng mỗi điểm $M \in \mathcal{S}$ với vận tốc $\mathbf{v}(M)$ của nó, gọi là trường vận tốc của $\mathcal{S}$.

1.2.1 Trường vận tốc của cố thể

Ta chứng minh được rằng,

Trường vận tốc của một cố thể $\mathcal{S}$ là trường đẳng chiếu, nghĩa là

$$\mathbf{v}(M)\cdot\overrightarrow{MN} = \mathbf{v}(N)\cdot\overrightarrow{MN} \quad \forall M, N \in S. \tag{1.25}$$

Các trường hợp đặc biệt:

$\star$ Chuyển động tịnh tiến. Chuyển động của cố thể $\mathcal{S}$ gọi là chuyển động tịnh tiến nếu

$$\forall M, N \in \mathcal{S} : \overrightarrow{MN} = \text{const.}$$

Ta chứng minh được:

Nếu cố thể $\mathcal{S}$ chuyển động tịnh tiến thì trường vận tốc và gia tốc của nó là các trường đều.

Nếu trường vận tốc của hệ $\mathcal{S}$ là trường đều thì $\mathcal{S}$ là cố thể chuyển động tịnh tiến.

Nếu trường gia tốc của cố thể $\mathcal{S}$ là trường đều thì chuyển động của nó là chuyển động tịnh tiến.

Như vậy, trong chuyển động tịnh tiến, chuyển động của mọi điểm có thể suy ra từ chuyển động của một điểm đặc biệt. Quỹ đạo của chúng được suy ra từ quỹ đạo của điểm đặc biệt bằng phép tịnh tiến theo vectơ thích hợp; vận tốc, gia tốc của chúng bằng vận tốc, gia tốc của điểm đặc biệt.

$\star$ Chuyển động quay quanh một trục. Chuyển động của cố thể $\mathcal{S}$ gọi là chuyển động quay quanh một trục nếu tồn tại hai điểm A và B cố định. Đường thẳng AB gọi là trục quay. Ta chứng minh được:

Nếu cố thể $\mathcal{S}$ chuyển động quay quanh trục Δ thì:

(i) *Mọi điểm thuộc Δ cố định.*

(ii) *Mọi điểm nằm ngoài Δ chuyển động trên vòng tròn nhận Δ làm trục với cùng vận tốc góc.*

Chọn mặt phẳng cố định π_0 đi qua Δ làm gốc. Xét mặt phẳng π đi qua Δ và gắn với $\mathcal{S}$. Ký hiệu φ là số đo góc phẳng nhị diện (π_0, Δ, π), và gọi là góc quay.

Phương trình chuyển động của cố thể:

$$\varphi = \varphi(t). \tag{1.26}$$

Lấy $O \in \Delta$ và gọi $\mathbf{k}$ là vectơ đơn vị của trục quay, được chọn sao cho những điểm thuộc cố thể chuyển động theo chiều thuận. Vectơ $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$, $\omega = \dot{\varphi}$, được gọi là vectơ quay (vectơ vận tốc góc).

Áp dụng công thức tính vận tốc trong chuyển động tròn, trường vận tốc:

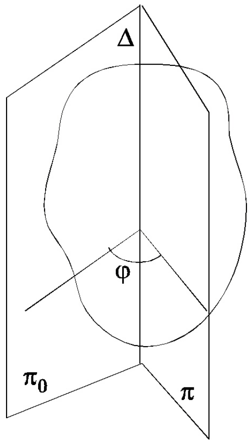
$$\mathbf{v}(M) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \tag{1.27}$$

Ta có thể chứng minh:

Trường vận tốc là trường tròn xoay đối với trục quay Δ, nghĩa là trường vận tốc bất biến đối với phép quay quanh trục Δ.

Trường gia tốc:

$$\mathbf{w}(M) = \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \tag{1.28}$$



Hình 1.6: Góc quay.

trong đó $\boldsymbol{\epsilon} = \ddot{\varphi}\mathbf{k}$ là vectơ gia tốc góc. Gia tốc tiếp $\mathbf{w}_t = \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r}$, gia tốc pháp $\mathbf{w}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$.

⋆ Chuyển động tổng quát. Chuyển dịch bất kỳ của cố thể từ vị trí này sang vị trí khác, trong khoảng thời gian Δt khá bé, có thể được thực hiện nhờ chuyển động tịnh tiến, tương ứng với chuyển dịch của một điểm A, và chuyển động quay quanh trục đi qua điểm ấy. Xét $M \in \mathcal{S}$, chuyển dịch của M trong khoảng thời gian Δt:

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\omega}^{tb} \Delta t \times \overrightarrow{AM}$$

Cho $\Delta t \to 0$,

$$\mathbf{v}(M) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{r}_A}{\Delta t} + \boldsymbol{\omega}^{tb} \times \overrightarrow{AM} \right) = \mathbf{v}(A) + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AM} .$$

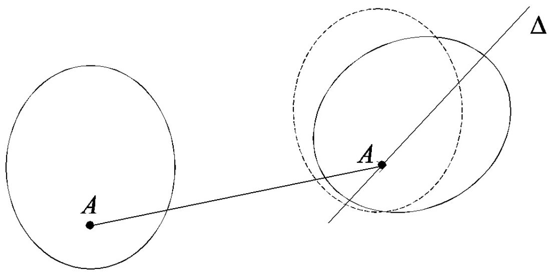
Ta nói *chuyển động tức thời* của cố thể lúc t là hợp hai chuyển động tịnh tiến và quay quanh trục, hay tại thời điểm t chuyển động của cố thể *tiếp xúc* với hợp hai chuyển động tịnh tiến và quay.

Trường vận tốc của cố thể trong chuyển động tổng quát (công thức Euler):

$$\mathbf{v}(M) = \mathbf{v}(A) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \overrightarrow{AM} . \tag{1.29}$$

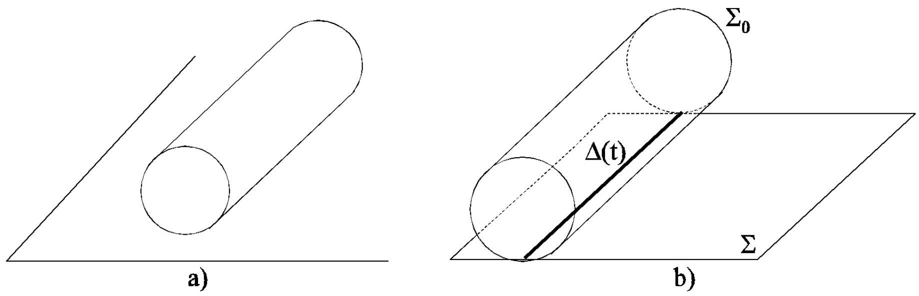
trong đó $\boldsymbol{\omega}(t)$ là vectơ quay tức thời tại t.

Khi t thay đổi, trục tức thời $\Delta(t)$ vẽ mặt Σ đối với hệ quy chiếu $Oxyz$ cố định, gọi là axoid cố định, đồng thời vẽ mặt Σ_0 đối với hệ quy chiếu $AXYZ$ gắn với cố thể, gọi là axoid động. Chuyển động của cố thể chính là chuyển động của Σ_0 đối với Σ.



Hình 1.7: Chuyển động tổng quát.

Trong chuyển động lăn của ống trụ trên mặt phẳng cố định (hình 1.8a)), trục $\Delta(t)$ vẽ mặt phẳng Σ đối với hệ quy chiếu cố định, và mặt trụ Σ_0 đối với hệ quy chiếu động gắn với ống trụ (hình 1.8b)).



Hình 1.8: a) Ống trụ lăn trên mặt phẳng, b) Axoid cố định và động.

1.2.2 Vài chuyển động quan trọng

$\star$ Chuyển động đinh ốc. Cố thể $\mathcal{S}$ có chuyển động đinh ốc nếu có trục Δ gắn với $\mathcal{S}$ trượt trên trục cố định Oz trong khi cố thể quay quanh trục Δ với vận tốc góc ω, vận tốc trượt tỉ lệ với vận tốc góc của chuyển động quay. Δ gọi là trục đinh ốc của chuyển động.

Chuyển động đinh ốc là hợp của chuyển động tịnh tiến (trượt theo trục Oz) và chuyển động quay quanh trục Δ.

Lấy $A \in \Delta$, đưa vào hệ tọa độ AYZ gắn với $\mathcal{S}$. Gọi $\varphi(t)$ là số đo góc phẳng nhị diện tạo bởi 2 nửa mặt phẳng $AXZ(X > 0)$, $Oxz(x > 0)$ tại thời điểm t. Xét điểm $M \in \mathcal{S}$, gọi (r_0, θ_0, z_0) là tọa độ trụ của M đối với hệ quy chiếu $AXYZ$ và (r, θ, z) là tọa độ trụ của M đối với hệ quy chiếu $Oxyz$, ta có

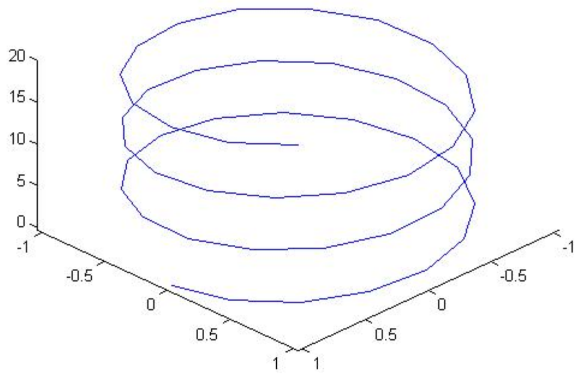
$$r = r_0 (= \text{const}), \quad \theta = \theta_0 + \varphi(t), \quad z = \overline{OA} + z_0.$$

Theo định nghĩa chuyển động đinh ốc, $\dot{\varphi} = \omega$ là vận tốc góc chuyển động quay của $\mathcal{S}$ quanh trục $\Delta \Rightarrow \varphi(t) = \omega t$, vận tốc trượt là $d\overline{OA}/dt = h\omega$ (h =const, hệ số tỉ lệ).

Vậy phương trình (luật) chuyển động của M trong hệ tọa độ Descartes:

$$x = r_0 \cos(\omega t + \theta_0), \quad y = r_0 \sin(\omega t + \theta_0), \quad z = h\omega t + z_0.$$

Quỹ đạo của nó là đường đinh ốc. Hình 1.9 thể hiện quỹ đạo của điểm M có tọa độ trụ trong hệ quy chiếu gắn với cố thể là $(1, 0, 0)$, với $\omega = \pi/16$ (s^{-1}), $h = 1$.



Hình 1.9: Quỹ đạo của điểm trong chuyển động đinh ốc.

Trường vận tốc:

$$\dot{x} = -r_0\omega \sin(\omega t + \theta_0), \quad \dot{y} = r_0\omega \cos(\omega t + \theta_0), \quad \dot{z} = h\omega.$$

Nếu dùng công thức Euler ($\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$) ta có:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(M) &= h\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ r_0\cos(\omega t + \theta_0) & r_0 \sin(\omega t + \theta_0) & h\omega t + z_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -r_0\omega \sin(\omega t + \theta_0) \\ r_0\omega \cos(\omega t + \theta_0) \\ h\omega \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{1.30}$$

⋆ Chuyển động của cố thể có một điểm cố định. Nếu cố thể $\mathcal{S}$ có một điểm cố định (O) thì chuyển động tức thời tại mọi thời điểm là chuyển động quay quanh trục tức thời $\Delta(t)$ với vận tốc góc tức thời $\boldsymbol{\omega}(t)$. Trường vận tốc tức thời:

$$\mathbf{v}(M) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}. \tag{1.31}$$

Trong chuyển động này các axoid Σ_0, Σ là những mặt nón có cùng đỉnh.

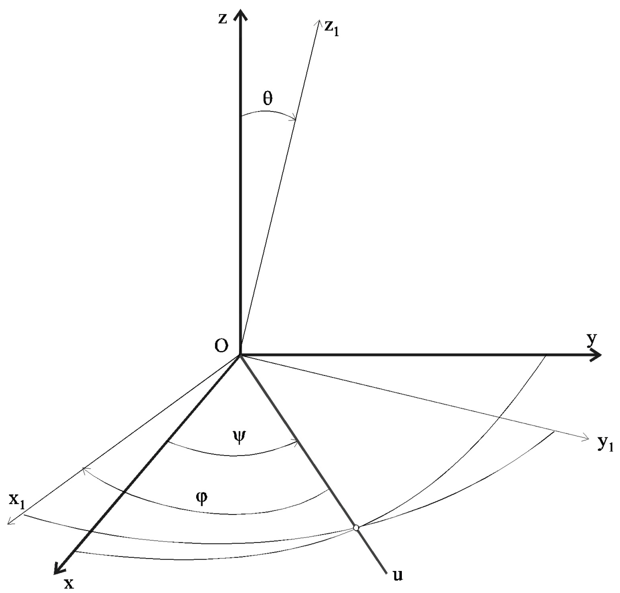
Biểu thức của vectơ quay. Để khảo sát chuyển động của cố thể $\mathcal{S}$ đối với hệ quy chiếu cố định $Oxyz$ ta đưa vào hệ quy chiếu $Ox_1y_1z_1$ gắn với $\mathcal{S}$. Gọi Ou là giao tuyến của Oxy với $Ox_1y_1z_1$.

Đặt:

$\psi = (Ox, Ou)$ gọi là góc chương động,

$\theta = (Oz, Oz_1)$ gọi là góc tiến động,

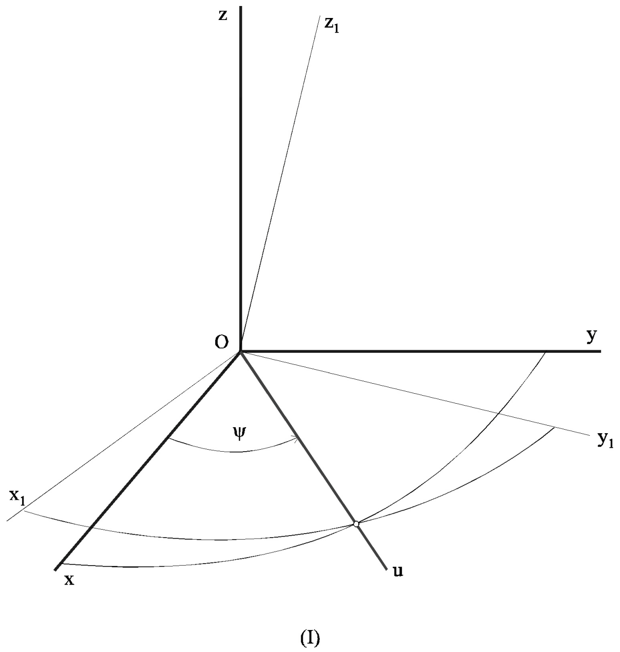
$\varphi = (Ou, Ox_1)$ gọi là góc quay riêng. Các góc này gọi chung là các góc Euler (hình 1.10).



Hình 1.10: Các góc Euler.

Các góc Euler hoàn toàn xác định vị trí của hệ quy chiếu $Ox_1y_1z_1$ đối với hệ quy chiếu $Oxyz$ cố định.

Thật vậy, ta có thể di chuyển hệ quy chiếu $Oxyz$ đến hệ quy chiếu $Ox_1y_1z_1$ bằng các phép quay các góc Euler. Cụ thể:



Hình 1.11: Hệ quy chiếu cố định và động, góc quay ψ.

(1) Phép quay trục Oz, góc quay ψ đưa trục Ox đến trùng với Ou, $Oxyz \to Ouvz$.

(2) Phép quay trục Ou, góc quay θ đưa trục Oz đến trùng với Oz_1, $Ouvz \to Ouv'z_1$.

(3) Phép quay trục Oz_1, góc quay φ đưa trục Ov' đến trùng với Oy_1, $Ouv'z_1 \to Ox_1y_1z_1$.

Gọi $M \in \mathcal{S}$ ta có $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\psi, \theta, \varphi)$, suy ra

$$\mathbf{v}(M) \;=\; \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi}\dot{\psi} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\dot{\varphi}. \tag{1.32}$$

Ta thấy ngay $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi}\dot{\psi}$ là thành phần vận tốc của M trong chuyển động quay của cố thể quanh trục Oz với vectơ quay $\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\mathbf{k}$ nên

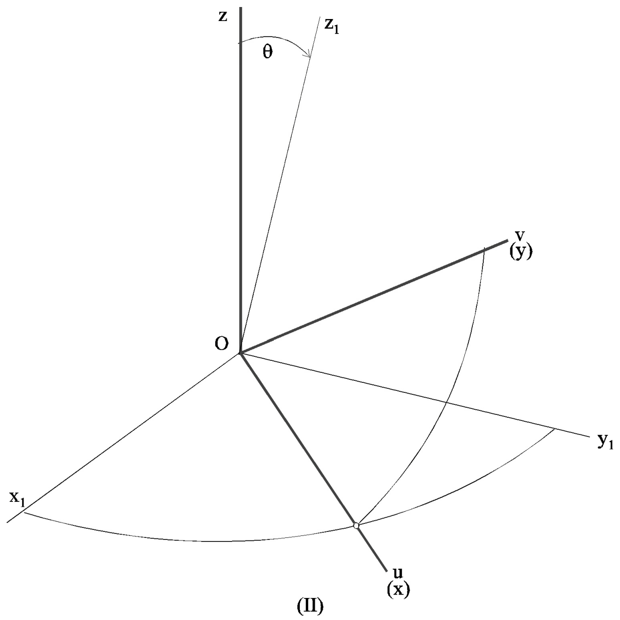
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi}\dot{\psi} = \dot{\psi}\mathbf{k} \times \mathbf{r}.$$

Tương tự,

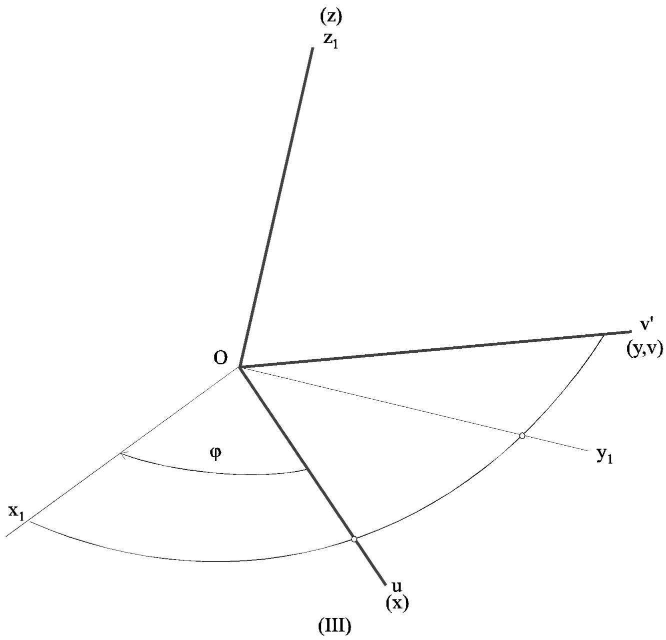
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\dot{\theta} = \dot{\theta}\mathbf{u} \times \mathbf{r}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\mathbf{k}_1 \times \mathbf{r}.$$

Từ đây ta suy ra

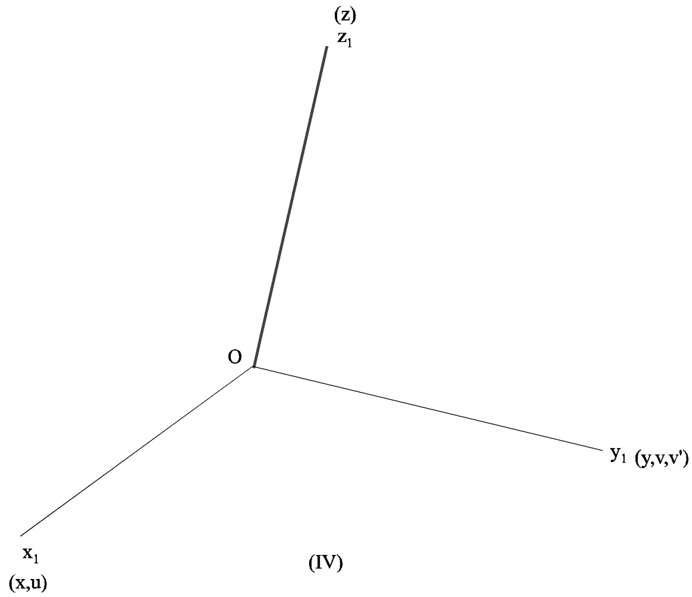
$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\mathbf{k} + \dot{\theta}\mathbf{u} + \dot{\varphi}\mathbf{k}_1. \tag{1.33}$$



Hình 1.12: $Oxyz \to Ouvz$.



Hình 1.13: $Ouvz \to Ouv'z_1$.



Hình 1.14: $Ouv'z_1 \to Ox_1y_1z_1$.

$\star$ Chuyển động song phẳng. Trong chuyển động của cố thể $\mathcal{S}$, nếu tồn tại mặt phẳng π_0 gắn với $\mathcal{S}$ trượt lên mặt phẳng π cố định thì ta nói $\mathcal{S}$ chuyển động song phẳng.

Mọi điểm $M \in \mathcal{S}$ vẽ quỹ đạo trên mặt phẳng song song hoặc trùng với π. Muốn biết chuyển động của mọi điểm thuộc $\mathcal{S}$ ta chỉ cần biết chuyển động của mọi điểm thuộc π_0, nghĩa là chuyển động của π_0 đối với π.

Chuyển động tức thời của chuyển động song phẳng là hợp của chuyển động tịnh tiến trong mặt phẳng π và chuyển động quay quanh trục $\Delta(t)$ vuông góc với π.

Trường vận tốc:

$$\mathbf{v}(M) = \mathbf{v}(A) + \boldsymbol{\omega}(t)\times \overrightarrow{AM} .$$

trong đó $A \in \pi_0$.

Gọi $I \in \pi_0$ là giao điểm của trục quay tức thời $\Delta(t)$ với mặt phẳng π (hay π_0) thì $\mathbf{v}(I) = \mathbf{0}$ và $I \in \Delta(t)$ được gọi là tâm quay tức thời. Nếu lấy $A \equiv I$ trong công thức trường vận tốc ta có

$$\mathbf{v}(M) = \boldsymbol{\omega}(t)\times \overrightarrow{IM} . \tag{1.34}$$

Tích hữu hướng hai vế với vectơ $\boldsymbol{\omega}$ (chú ý $M \in \pi_0$) ta có

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{v}(M) &= \boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{\omega}(t) \times \overrightarrow{IM}) \\ &= -\omega^2 \overrightarrow{IM} = -\omega^2 \overrightarrow{OM} + \omega^2 \overrightarrow{OI},\end{aligned}$$

suy ra (lấy $M \equiv O$)

$$\overrightarrow{OI} = \frac{\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{v}(O)}{\omega^2}. \tag{1.35}$$

Chú ý, ở đây ta phải hiểu $\mathbf{v}(O)$ là vận tốc của điểm thuộc cố thể trùng với O lúc t. Công thức (1.35) cho phép xác định tâm vận tốc.

Khi t thay đổi, I vẽ đường cong χ đối với π, gọi là đường đáy, đồng thời vẽ đường cong χ_0 đối với π_0, gọi là đường lăn. Chuyển động của π_0 đối với π chính là chuyển động của đường lăn đối với đường đáy.

1.3 Hợp chuyển động

Xét chuyển động của cố thể $\mathcal{S}$ đối với các hệ quy chiếu khác nhau.

- Hệ quy chiếu cố định $(T) = Oxyz$, chuyển động của M đối với (T) gọi là chuyển động tuyệt đối. $\mathbf{v}_a$, $\mathbf{w}_a$ - vận tốc, gia tốc của M đối với (T), gọi là vận tốc, gia tốc tuyệt đối của M.

- Hệ quy chiếu động $(T_1) = O_1x_1y_1z_1$ ((T_1) chuyển động đối với (T)), chuyển động của M đối với (T_1) gọi là chuyển động tương đối. $\mathbf{v}_r$, $\mathbf{w}_r$ - vận tốc, gia tốc của M đối với (T_1), gọi là vận tốc, gia tốc tương đối của M.

- Chuyển động của T_1 đối với (T) gọi là chuyển động theo. Chuyển động của điểm P, gắn với (T_1) trùng với M tại thời điểm đang xét, đối với (T) gọi là chuyển động theo của M. $\mathbf{v}_e$, $\mathbf{w}_e$ - vận tốc, gia tốc của P đối với (T), gọi là vận tốc, gia tốc theo của M.

Dùng các ký hiệu hình thức

$$\left(\frac{\mathcal{S}}{T}\right), \quad \left(\frac{\mathcal{S}}{T_1}\right), \quad \left(\frac{T_1}{T}\right)$$

để chỉ chuyển động của $\mathcal{S}$ đối với (T) (chuyển động tuyệt đối), chuyển động của $\mathcal{S}$ đối với (T_1) (chuyển động tương đối), chuyển động của (T_1) đối với (T) (chuyển động theo), ta có thể viết

$$\left(\frac{\mathcal{S}}{T}\right) = \left(\frac{T_1}{T}\right)\left(\frac{\mathcal{S}}{T_1}\right)$$

và nói $(\mathcal{S}/T)$ là hợp của các chuyển động thành phần $(\mathcal{S}/T_1)$, (T_1/T).

1.3.1 Công thức hợp vận tốc, gia tốc

Ta có liên hệ giữa hệ tọa độ tuyệt đối và hệ tọa độ tương đối

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO}_1+\overrightarrow{O_1M}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}+x_1\mathbf{i}_1+y_1\mathbf{j}_1+z_1\mathbf{k}_1.$$

⋆ *Công thức hợp vận tốc*

Đạo hàm hai vế theo thời gian, ta có

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_a &= \frac{da}{dt}\mathbf{i}+\frac{db}{dt}\mathbf{j}+\frac{dc}{dt}\mathbf{k}\\ &+x_1\frac{d\mathbf{i}_1}{dt}+y_1\frac{d\mathbf{j}_1}{dt}+z_1\frac{d\mathbf{k}_1}{dt}+\frac{dx_1}{dt}\mathbf{i}_1+\frac{dy_1}{dt}\mathbf{j}_1+\frac{dz_1}{dt}\mathbf{k}_1.\end{aligned} \tag{1.36}$$

Vận tốc tương đối của M chính là đạo hàm theo thời gian của hàm vectơ $\overrightarrow{O_1M}$ với $\mathbf{i}_1,\mathbf{j}_1,\mathbf{k}_1$, tức là

$$\mathbf{v}_r=\frac{d\,\overrightarrow{O_1M}}{dt}=\frac{dx_1}{dt}\mathbf{i}_1+\frac{dy_1}{dt}\mathbf{j}_1+\frac{dz_1}{dt}\mathbf{k}_1. \tag{1.37}$$

Ta cũng có

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO}_1+x_1\mathbf{i}_1+y_1\mathbf{j}_1+z_1\mathbf{k}_1,$$

với x_1,y_1,z_1 là hằng số (P gắn với hệ động); do đó, vận tốc theo của M chính là đạo hàm theo thời gian của hàm vectơ $\overrightarrow{OP}$ với x_1,y_1,z_1 không đổi, nhưng $\mathbf{i}_1,\mathbf{j}_1,\mathbf{k}_1$ di động

$$\mathbf{v}_e=\frac{d\,\overrightarrow{OP}}{dt}=\frac{da}{dt}\mathbf{i}+\frac{db}{dt}\mathbf{j}+x_1\frac{d\mathbf{i}_1}{dt}+y_1\frac{d\mathbf{j}_1}{dt}+z_1\frac{d\mathbf{k}_1}{dt}. \tag{1.38}$$

Thay (1.37), (1.38) vào (1.36) ta được công thức hợp vận tốc

$$\mathbf{v}_a=\mathbf{v}_r+\mathbf{v}_e. \tag{1.39}$$

⋆ *Công thức hợp gia tốc*

Đạo hàm hai vế (1.36) theo thời gian

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_a &= \frac{d^2a}{dt^2}\mathbf{i}+\frac{d^2b}{dt^2}\mathbf{j}+\frac{d^2c}{dt^2}\mathbf{k}+x_1\frac{d^2\mathbf{i}_1}{dt^2}+y_1\frac{d^2\mathbf{j}_1}{dt^2}+z_1\frac{d^2\mathbf{k}_1}{dt^2}\\ &+\frac{d^2x_1}{dt^2}\mathbf{i}_1+\frac{d^2y_1}{dt^2}\mathbf{j}_1+\frac{d^2z_1}{dt^2}\mathbf{k}_1\\ &+2\left(\frac{dx_1}{dt^t}\frac{d\mathbf{i}_1}{dt^t}+\frac{dy_1}{dt^t}\frac{d\mathbf{j}_1}{dt^t}+\frac{dz_1}{dt^t}\frac{d\mathbf{k}_1}{dt^t}\right).\end{aligned} \tag{1.40}$$

Lập luận tương tự như trên, ta có:

$$\mathbf{w}_r = \frac{d^2x_1}{dt^2}\mathbf{i}_1 + \frac{d^2y_1}{dt^2}\mathbf{j}_1 + \frac{d^2z_1}{dt^2}\mathbf{k}_1, \tag{1.41}$$

$$\mathbf{w}_e = = \frac{d^2a}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2b}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2c}{dt^2}\mathbf{k} + x_1\frac{d^2\mathbf{i}_1}{dt^2} + y_1\frac{d^2\mathbf{j}_1}{dt^2} + z_1\frac{d^2\mathbf{k}_1}{dt^2}. \tag{1.42}$$

Vì chuyển động của (T_1) đối với (T) là chuyển động của cố thể, trong trường hợp tổng quát, là hợp của chuyển động tịnh tiến và quay với vectơ vận tốc góc $\boldsymbol{\omega}$ nên

$$\frac{d\mathbf{i}_1}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}_1, \quad \frac{d\mathbf{j}_1}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}_1, \quad \frac{d\mathbf{k}_1}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_1$$

từ đó số hạng còn lại của (1.40) có thể viết lại

$$\mathbf{w}_c = 2\left(\frac{dx_1}{dt^t}\frac{d\mathbf{i}_1}{dt^t} + \frac{dy_1}{dt^t}\frac{d\mathbf{j}_1}{dt^t} + \frac{dz_1}{dt^t}\frac{d\mathbf{k}_1}{dt^t}\right) = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r. \tag{1.43}$$

Thay (1.41), (1.42), (1.43) vào (1.40) ta nhận được công thức hợp gia tốc

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_c, \tag{1.44}$$

trong đó $\mathbf{w}_c$ là gia tốc Coriolis sinh ra do chuyển động quay của (T_1) đối với (T).

⋆ *Công thức hợp vectơ quay*

Ký hiệu $\boldsymbol{\omega}_a, \boldsymbol{\omega}_r$ và $\boldsymbol{\omega}_e$ lần lượt là vận tốc quay tuyệt đối, tương đối và theo. Ta chứng minh

$$\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\omega}_e. \tag{1.45}$$

Để đơn giản ta giả thiết chuyển động (S/S_1) và (S_1/T) là chuyển động quay với vectơ vận tốc góc là $\boldsymbol{\omega}_r$ và $\boldsymbol{\omega}_e$.

Trường hợp các trục quay trong chuyển động (S/S_1) , (S_1/T) cắt nhau

Giả sử trục quay trong chuyển động (S/S_1) (là giá mang vectơ $\boldsymbol{\omega}_r$) và trục quay trong chuyển động (S_1/T) (là giá mang vectơ $\boldsymbol{\omega}_e$) cắt nhau tại O. Trượt vectơ $\boldsymbol{\omega}_r$, $\boldsymbol{\omega}_e$ đến O. Xét điểm M bất kỳ của vật xác định bởi vectơ bán kính $\mathbf{r}$ từ O. Ta có

$$\mathbf{v}_r = \boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{v}_e = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}.$$

Theo công thức cộng vận tốc

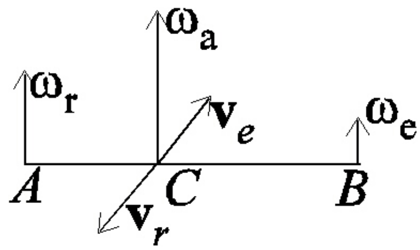
$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e = (\boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\omega}_e) \times \mathbf{r}.$$

Như vậy,

$$\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\omega}_e.$$

Trường hợp các trục quay trong chuyển động (S/S_1) , (S_1/T) *song song với nhau*

Nếu các vận tốc góc $\boldsymbol{\omega}_r$, $\boldsymbol{\omega}_e$ cùng chiều. Điểm đặt của chúng lần lượt là A và B. Ta có thể coi AB vuông góc với $\boldsymbol{\omega}_r$, $\boldsymbol{\omega}_e$ vì đó là các vectơ trượt. Xét sự phân bố vận tốc trong mặt phẳng qua A, B và vuông góc với $\boldsymbol{\omega}_r$, $\boldsymbol{\omega}_e$. Trên đường thẳng AB tồn tại điểm C có vận tốc bằng không. Thật vậy, vận tốc tương đối của điểm C bằng $\omega_r AC$ và vận tốc theo bằng $\omega_e BC$ và chiều của chúng ngược nhau và



Hình 1.15: Vận tốc điểm C trường hợp $\boldsymbol{\omega}_r, \boldsymbol{\omega}_e$ cùng chiều.

$$\omega_r AC = \omega_e BC \Rightarrow \frac{\omega_r}{\omega_e} = \frac{BC}{AC}.$$

Vậy trục qua C song song với các vectơ $\boldsymbol{\omega}_r, \boldsymbol{\omega}_e$ là trục quay tức thời tuyệt đối của vật. Tính vận tốc tại B. Ta có

$$\begin{aligned} v_a(B) &= AB\omega_r, \\ v_a(B) &= CB\omega_a \end{aligned}$$

suy ra

$$\omega_a = \frac{AB}{CB} = \omega_r = \frac{(AC + CB)\omega_r}{CB} = \left(\frac{\omega_e}{\omega_r} + 1\right)\omega_r = \omega_r + \omega_e.$$

Vận tốc góc của chuyển động tuyệt đối cũng bằng tổng của các vận tốc góc tương đối và vận tốc góc theo (về mặt vectơ).

Nếu các vận tốc góc $\boldsymbol{\omega}_r$, $\boldsymbol{\omega}_e$ trái chiều. Giả sử về độ lớn $\omega_r > \omega_e$. Làm tương tự như trên, trên đường thẳng AB tồn tại điểm C có vận tốc bằng không. Thật vậy, điểm C phải nằm bên trái để các vận tốc ngược chiều nhau và

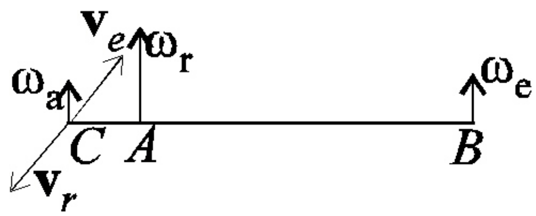
$$\omega_r AC = \omega_e BC \Rightarrow \frac{\omega_r}{\omega_e} = \frac{BC}{AC}.$$

Vậy trục qua C song song với các vectơ $\boldsymbol{\omega}_r, \boldsymbol{\omega}_e$ là trục quay tức thời tuyệt đối của vật. Tính vận tốc tại B. Ta có

$$\begin{aligned} v_a(B) &= AB\omega_r, \\ v_a(B) &= CB\omega_a \end{aligned}$$

suy ra

$$\omega_a = \frac{AB}{CB} = \omega_r = \frac{(CB - CA)\omega_r}{CB} = \left(1 - \frac{\omega_e}{\omega_r}\right)\omega_r = \omega_r - \omega_e.$$



Hình 1.16: Vận tốc điểm C trường hợp $\boldsymbol{\omega}_r, \boldsymbol{\omega}_e$ cùng chiều.

Vận tốc góc của chuyển động tuyệt đối cũng bằng tổng của các vận tốc góc tương đối và vận tốc góc theo (về mặt vectơ).

Trường hợp các trục quay trong chuyển động (S/S_1) , (S_1/T) *chéo nhau*

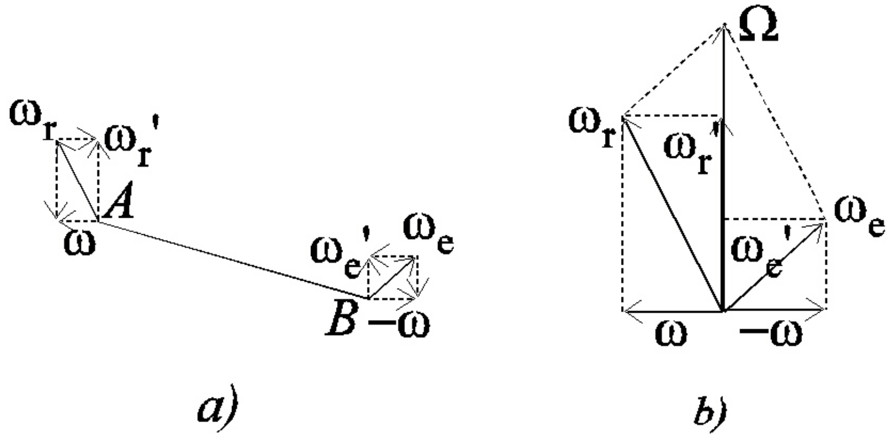
Ký hiệu khoảng cách ngắn nhất giữa các trục quay là AB. Với vectơ $\boldsymbol{\omega}_r$ đặt ở A, vectơ $\boldsymbol{\omega}_e$ ở B. Ký hiệu $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\omega}_e$. Ta phân tích các vectơ $\boldsymbol{\omega}_r$, $\boldsymbol{\omega}_e$ thành tổng các vectơ song song với $\boldsymbol{\Omega}$ và vuông góc với nó như hình 1.17. Vì các thành phần vuông góc với $\boldsymbol{\Omega}$ của $\boldsymbol{\omega}_r$ và $\boldsymbol{\omega}_e$ bằng nhau về độ lớn và ngược chiều nên ta ký hiệu chúng là $\boldsymbol{\omega}$ và $-\boldsymbol{\omega}$ còn các thành phần của $\boldsymbol{\omega}_r$ và $\boldsymbol{\omega}_e$ song song với $\boldsymbol{\Omega}$ ta ký hiệu chúng là $\boldsymbol{\omega}'_r$ và $\boldsymbol{\omega}'_e$. Hai thành phần vận tốc góc đầu, như chỉ ra ở trên, được dẫn về một vectơ $\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\Omega}$ song song với chúng. Còn các vectơ $\boldsymbol{\omega}$ và $-\boldsymbol{\omega}$ tạo thành một ngẫu, xác định chuyển động tịnh tiến (?) với vận tốc

$$\mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\omega}_a \times \overrightarrow{AB} .$$

Vận tốc tịnh tiến hướng dọc theo vectơ $\boldsymbol{\omega}_a$. Như vậy, chuyển động tuyệt đối của vật là sự quay của vật quanh trục và đồng thời chuyển động tịnh tiến dọc theo trục ấy. Tóm lại, ta cũng có vectơ quay là

$$\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\omega}_e.$$

■



Hình 1.17: Cách phân tích vectơ vận tốc góc.

Tổng quát: chuyển động (T_n/T_0) là hợp của các chuyển động (T_1/T_0), (T_2/T_1), $\ldots$, $(T_n)/T_{n-1})$, (T_n/T),

$$\left(\frac{T_n}{T_0}\right) = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)\cdots\left(\frac{T_n}{T_{n-1}}\right)$$

Trong chuyển động (T_i/T_{i-1}), ký hiệu: $\mathbf{v}_{i,i-1}(M)$ là vận tốc của điểm thuộc (T_i) trùng với M tại thời điểm t trong chuyển động của (T_i) đối với (T_{i-1}), $\boldsymbol{\omega}_{i,i-1}$ là vectơ quay tương ứng, ta có:

$$\mathbf{v}(M) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_{i,i-1}(M), \tag{1.46}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_{i,i-1}. \tag{1.47}$$

1.3.2 Chuyển động ngược

Hai cố thể $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ chuyển động đối với nhau. Những chuyển động $(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2)$ và $(\mathcal{S}_2/\mathcal{S}_1)$ được gọi là những chuyển động ngược tương hỗ.

Ta có

$$\mathbf{v}_{1,2}(M) = -\mathbf{v}_{2,1}(M), \tag{1.48}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{1,2} = -\boldsymbol{\omega}_{2,1}, \tag{1.49}$$

trục tức thời của chúng trùng nhau.

1.3.3 Chuyển động của hai cố thể tiếp xúc

Cho hai cố thể $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ chuyển động và luôn tiếp xúc với nhau. Gọi I là tiếp điểm tại thời điểm t. Gọi I_1 là điểm gắn với $\mathcal{S}_1$ trùng với I lúc t, I_2 là điểm gắn với $\mathcal{S}_2$ trùng với I lúc t. Vận tốc của I_i trong chuyển động của $\mathcal{S}_i$ $(i = 1, 2)$ được ký hiệu là $\mathbf{v}_{10}(I_1)$, $\mathbf{v}_{20}(I_2)$. Hiệu

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{10}(I_1) - \mathbf{v}_{20}(I_2)$$

được gọi là vận tốc trượt của $\mathcal{S}_1$ đối với $\mathcal{S}_2$.

Vận tốc trượt không phụ thuộc vào hệ quy chiếu cố định và nếu khác không vectơ này nằm trong mặt phẳng tiếp xúc của hai cố thể tại thời điểm đó.

Bài tập chương 1

Bài tập ôn về vectơ

1.1. Trong hệ tọa độ Descartes, cho ba vectơ:

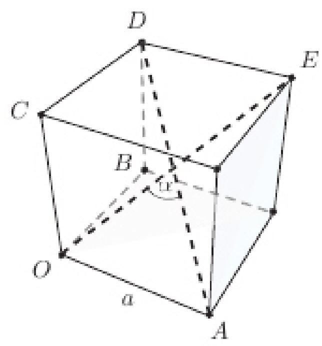
$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k},\ \ \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{k},\ \ \mathbf{c} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

a) Tìm $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 4\mathbf{c}$ và $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2$.
b) Tìm $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$ và $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Suy ra góc giữa $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$.
c) Tìm thành phần của $\mathbf{c}$ theo hướng của $\mathbf{a}$ và theo hướng của $\mathbf{b}$.
d) Tìm $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ và $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.
e) Tìm $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ và $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ và chỉ ra rằng chúng bằng nhau. Tập được sắp $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ là hệ vectơ thuận hay nghịch?
f) Kiểm đồng nhất thức (công thức Gibss): $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$.

1.2. Tìm góc giữa hai đường chéo khối lập phương trên hình 1.18.

1.3. Cho $ABCD$ là hình bốn cạnh tổng quát (lệch) và cho P, Q, R, S là các trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA tương ứng. Chứng minh $PQRS$ là hình bình hành.

1.4. Trong hình tứ diện, vẽ các đường nối trung điểm của mỗi cạnh với trung điểm của cạnh đối diện. Chứng tỏ rằng ba đường này cắt nhau tại một điểm chia đôi chúng.



Hình 1.18: Bài tập 1.2

1.5. Cho tứ diện $ABCD$ và cho P, Q, R, S là trọng tâm của các mặt đối diện với các đỉnh A, B, C, D tương ứng. Chứng tỏ rằng các đường AP, BQ, CR, DS đồng quy tại một điểm gọi là trọng tâm (centroid) của tứ diện, nó chia mỗi đường theo tỉ số 3 : 1.
H.D. Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}:\overrightarrow{MB} = k$.

1.6. Chứng tỏ rằng ba đường cao của tam giác đồng quy tại một điểm.
H.D. Chọn O là giao điểm của hai đường cao.

1.7. Chứng minh các đồng nhất thức:
a) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$.
b) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}]\mathbf{c} - [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]\mathbf{d}$.
c) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = 0$ (đồng nhất thức Jacobi).

1.8. Cho vectơ $\mathbf{v}$ là hàm của thời gian t và $\mathbf{k}$ là vectơ hằng. Tìm đạo hàm theo thời gian của: a) $|\mathbf{v}|^2$; b) $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})\mathbf{v}$; c) $[\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, \mathbf{k}]$.
Đ.S. a) $2\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}$; b) $(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{k})\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})\dot{\mathbf{v}}$; c) $[\mathbf{v}, \ddot{\mathbf{v}}, \mathbf{k}]$.

1.9. Tìm vectơ tiếp tuyến đơn vị, vectơ pháp tuyến đơn vị và độ cong của vòng tròn: $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$, $z = 0$ tại điểm có tham số θ.
ĐS. $\mathbf{t} = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}$, $\mathbf{n} = -\cos\theta\mathbf{i} - \sin\theta\mathbf{j}$, $k = 1/a$.

1.10. Tìm vectơ tiếp tuyến đơn vị, vectơ pháp tuyến đơn vị và độ cong của đường xoắn ốc: $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$, $z = b\theta$ tại điểm có tham số θ.
Đ.S. $\mathbf{t} = (-a\sin\theta\mathbf{i} + a\cos\theta\mathbf{j} + b\mathbf{k})/(a^2 + b^2)^{1/2}$, $\mathbf{n} = -\cos\theta\mathbf{i} - \sin\theta\mathbf{j}$, $k = a/(a^2 + b^2)$.

1.11. Tìm vectơ tiếp tuyến đơn vị, vectơ pháp tuyến đơn vị và độ cong của parabol $x = ap^2$, $y = 2ap$, $z = 0$ tại điểm có tham số p.
Đ.S. $\mathbf{t} = (p\mathbf{i} + \mathbf{j})/(p^2 + 1)^{1/2}$, $\mathbf{n} = (\mathbf{i} - p\mathbf{j})/(p^2 + 1)^{1/2}$, $k = 1/2a(p^2 + 1)^{3/2}$.

1.12. Chứng minh: điều kiện cần và đủ để hàm vectơ $\mathbf{u}(t)$ có mô đun không đổi là $\dot{\mathbf{u}} \perp \mathbf{u}$.

1.13. Trong mặt phẳng Oxy, vectơ đơn vị $\mathbf{u}$ có gốc là O, góc định hướng φ hợp bởi chiều dương trục hoành với vectơ $\mathbf{u}$, được gọi là góc cực của $\mathbf{u}$. Chứng minh đạo hàm của vectơ đơn vị $\mathbf{u}(\varphi)$ theo góc cực, $d\mathbf{u}/d\varphi$, nhận được bằng cách quay $\mathbf{u}$ một góc $\pi/2$.

1.14. Trong hệ tọa độ Descartes toán tử gradient:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Viết toán tử gradient trong tọa độ trụ, cầu.

1.15 (Tọa độ cong tổng quát). Một tập các số $q^1, q^2, \ldots, q^n$ xác định vị trí một điểm trong không gian $\mathbb{R}^n$ được gọi là tọa độ cong của nó. Quan hệ giữa tọa độ Descartes và tọa độ cong được biểu diễn bởi các phương trình

$$x_s = x_s(q^1, q^2, \ldots, q^n) \tag{1.50}$$

hay ở dạng vectơ

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, q^2, \ldots, q^n),$$

trong đó $\mathbf{r}$ là vectơ bán kính. Các hàm (1.50) được giả thiết liên tục trong miền xác định của nó và có các đạo hàm riêng đến cấp ba. Chúng phải giải được đối với $q^1, q^2, \ldots, q^n$. Điều này tương đương với Jacobian

$$J = \left| \frac{\partial x_s}{\partial q^k} \right| \tag{1.51}$$

khác không.

Phương trình (1.50) xác định n họ siêu mặt tọa độ $q^r = q_0^r$. Bất kỳ $n-1$ siêu mặt tọa độ, thuộc về các họ khác nhau, giao nhau theo một đường cong nào đó gọi là đường tọa độ.

Ký hiệu $\mathbf{r}_k = \partial \mathbf{r}/\partial q^k$, ta có

$$d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k dq^k$$

suy ra

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{s,k=1}^{n} \underbrace{(\mathbf{r}_s \cdot \mathbf{r}_k)}_{g_{sk}} dq^s dq^k.$$

Các đại lượng $g_{sk} = \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{r}_k$ xác định một metric trong hệ tọa độ cong.
Hệ tọa độ cong được gọi là tọa độ cong trực giao nếu

$$g_{sk} = \begin{cases} 0, & s \neq k \\ H_s^2, & s = k \end{cases}$$

Các đại lượng H_s^2 được gọi là các hệ số Lamé. Ta có: $H_s = |\mathbf{r}_s|$ và

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{n} H_k^2 (dq^k)^2.$$

Tọa độ elliptic trong $\mathbb{R}^3$:

$$q^1 = \lambda, \quad q^2 = \mu, \quad q^3 = z$$

được xác định bởi công thức

$$x = c\lambda\mu, \quad y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \quad z = z.$$

trong đó c là thừa số tỉ lệ.
(a) Tìm các mặt tọa độ của hệ tọa độ elliptic.
(b) Tính các hệ số Lamé.

Bài tập về vận tốc, gia tốc và vận tốc góc

1.16. Một điểm P di chuyển dọc theo trục x; chuyển dịch của nó tại thời điểm t được cho bởi $x = 6t^2 - t^3 + 1$, trong đó x đo bằng mét, t đo bằng giây. Tìm vận tốc, gia tốc của P tại thời điểm t. Tìm những thời điểm P dừng và vị trí của P tại những thời điểm đó.

1.17. Một điểm P di chuyển dọc theo trục x với gia tốc tại thời điểm t được cho bởi $a = 6t - 4\ ms^{-2}$. Ban đầu P ở điểm $x = 20\ m$ và có vận tốc $15\ ms^{-1}$ về phía x âm. Tìm vận tốc và chuyển dịch của P tại thời điểm t. Tìm thời điểm P dừng và chuyển dịch của P tại thời điểm đó.

1.18. Một hạt mang điện di chuyển trong từ trường theo luật

$$\mathbf{r} = b\cos\Omega t\mathbf{i} + b\sin\Omega t\mathbf{j} + ct\mathbf{k},$$

trong đó b, Ω và c là các hằng số dương. Chứng tỏ rằng điểm di chuyển với tốc độ không đổi và tìm độ lớn của gia tốc của hạt.

1.19. Một con côn trùng bay trên quỹ đạo xoắn ốc sao cho tọa độ cực của nó tại thời điểm t là

$$r = be^{\Omega t}, \quad \theta = \Omega t,$$

trong đó b và Ω là các hằng số dương. Tìm các vectơ vận tốc và gia tốc của con côn trùng tại thời điểm t. Chứng tỏ rằng góc giữa các vectơ này luôn luôn bằng $\pi/4$.

1.20. Một hạt P chuyển động sao cho vectơ định vị của nó, r thỏa phương trình vi phân

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c} \times \mathbf{r},$$

trong đó $\mathbf{c}$ là vectơ hằng. Chứng minh P chuyển động với tốc độ không đổi trên một đường tròn.
H.D. Từ phương trình vi phân ta suy ra

$$\dot{\mathbf{r}} \perp \mathbf{r} \Rightarrow \frac{dr^2}{dt} = 2\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0 \Rightarrow r = R \text{ (const)} \qquad (a)$$

$$\dot{\mathbf{r}} \perp \mathbf{c} \Rightarrow \frac{d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{c})}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{c} = 0 \Rightarrow \mathbf{r} \cdot \mathbf{c} = \text{const} \qquad (b)$$

Từ đẳng thức (b) ta thấy hình chiếu của P lên trục đi qua O có vectơ chỉ phương $\mathbf{c}$ là điểm cố định, gọi là Q; hay nói cách khác, P luôn luôn nằm trên mặt phẳng cố định đi qua điểm Q và nhận $\mathbf{c}$ làm pháp vectơ. Cùng với đẳng thức (a) ta rút ra quỹ đạo của P là đường tròn.

Ký hiệu $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ là vận tốc và $\mathbf{w} = \ddot{\mathbf{r}}$ là gia tốc. Ta có [*bằng cách lấy đạo hàm hai vế phương trình vi phân*]

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0.$$

Vậy P chuyển động với tốc độ không đổi.

1.21. Chứng minh công thức (1.19).

1.22. Chứng minh công thức Frenet

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix},$$

trong đó τ là độ xoắn.

Từ công thức $d\mathbf{b}/ds = -\tau\mathbf{n}$ chỉ ra ý nghĩa hình học của độ xoắn.

1.23. Cho vòng tròn tâm O bán kính R. Chọn điểm $(R, 0)$ là gốc tính hoành độ cong. Xác định cơ sở địa phương của đường cong. Tính độ cong của đường cong.

1.24 (Công thức động học Euler)**.** Ký hiệu (p_1, q_1, r_1) là thành phần tọa độ của $\boldsymbol{\omega}$ trong hệ quy chiếu $Ox_1y_1z_1$, (p, q, r) là thành phần tọa độ của $\boldsymbol{\omega}$ trong hệ quy chiếu $Oxyz$. Chứng minh:

$$\begin{aligned} p_1 &= \dot\theta\cos\varphi + \dot\psi\sin\theta\sin\varphi, \\ q_1 &= -\dot\theta\sin\varphi + \dot\psi\sin\theta\cos\varphi, \\ r_1 &= \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta. \end{aligned} \tag{1.52}$$

$$\begin{aligned} p &= \dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\sin\theta\sin\psi, \\ q &= \dot\theta\sin\psi - \dot\varphi\sin\theta\cos\psi, \\ r &= \dot\varphi\cos\theta + \dot\psi. \end{aligned} \tag{1.53}$$

HD. Theo công thức (1.33)

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\psi\mathbf{k} + \dot\theta\mathbf{u} + \dot\varphi_1,$$

để tính hình chiếu vectơ $\boldsymbol{\omega}$ lên các trục của hệ trục di động $Ox_1y_1z_1$ ta chiếu các vectơ $\boldsymbol{\omega}^{(1)} = \dot\varphi\mathbf{k}_1$, $\boldsymbol{\omega}^{(2)} = \dot\psi\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\omega}^{(3)} = \dot\theta\mathbf{u}$ xuống hệ trục tọa độ $Ox_1y_1z_1$. Vì vectơ $\boldsymbol{\omega}_1$ hướng theo $\mathbf{k}_1$ nên

$$\omega_{x_1}^{(1)} = 0, \quad \omega_{y_1}^{(1)} = 0, \quad \omega_{z_1}^{(1)} = \dot\varphi.$$

Để tìm các hình chiếu vectơ $\boldsymbol{\omega}^{(2)}$ ta dựng mặt phẳng đi qua z_1 và z và ký hiệu giao tuyến của nó với mặt phẳng x_1y_1 là OM (hình 1.19). Khi đó trục z_1 và đường thẳng OM vuông góc với nhau. Ta phân tích vectơ $\boldsymbol{\omega}^{(2)}$ thành hai thành phần $\omega_{z_1}^{(2)}$ dọc theo trục z_1 và $\omega_M^{(2)}$ dọc theo OM

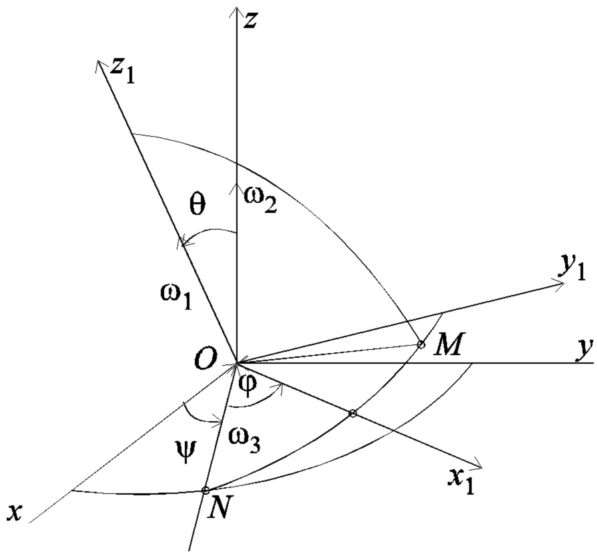
$$\boldsymbol{\omega}^{(2)} = \omega_{z_1}^{(2)}\mathbf{k}_1 + \omega_M^{(2)}\mathbf{U},$$

trong đó $\mathbf{U}$ là vectơ đơn vị của $\overrightarrow{OM}$,

$$\omega_{z_1}^{(2)} = \dot\psi\cos\theta, \quad \omega_M^{(2)} = \dot\psi\sin\theta.$$

Để ý rằng, đường nút ON vuông góc với mặt phẳng z_1z nên nó vuông góc với đường thẳng OM và vì vậy góc giữa trục x và đường thẳng OM bằng $\pi/2 - \varphi$. Như vậy,

$$\begin{aligned} \omega_{x_1}^{(2)} &= \omega_M^{(2)}\sin\varphi = \dot\psi\sin\theta\sin\varphi, \\ \omega_{y_1}^{(2)} &= \omega_M^{(2)}\sin\varphi = \dot\psi\sin\theta\cos\varphi, \\ \omega_{z_1}^{(2)} &= \dot\psi\cos\theta. \end{aligned}$$



Hình 1.19: Góc Euler.

Để tìm các hình chiếu vectơ $\boldsymbol{\omega}^{(3)}$ ta lưu ý rằng nó nằm trong mặt phẳng x_1y_1 nên hình chiếu của nó lên trục z_1 bằng không. Ngoài ra, vì vectơ $\boldsymbol{\omega}^{(3)}$ hướng theo đường nút ON nên góc giữa nó với trục x_1 bằng φ, còn với trục y_1 bằng $\varphi + \pi/2$. Từ đó, suy ra

$$\begin{aligned}
\omega_{x_1}^{(3)} &= \omega^{(3)}\cos\varphi = \dot{\theta}\cos\varphi, \\
\omega_{y_1}^{(3)} &= \omega^{(3)}\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\dot{\theta}\sin\varphi, \\
\omega_{z_1}^{(3)} &= 0.
\end{aligned}$$

Lấy tổng các hình chiếu tương ứng ta được kết quả.

Phần còn lại làm tương tự.

1.25. Cho cơ cấu thước vẽ elip gồm thanh OA quay quanh O với góc $\varphi = \omega t$, thanh BC có hai đầu chuyển động trên hai trục x, y. Cho $OA = AB = AC = 2a$. Viết phương trình chuyển động, quỹ đạo của điểm M ($AM = MB$) (hình 1.20). Xác định vận tốc, gia tốc, gia tốc tiếp, gia tốc pháp của điểm M tại thời điểm bất kỳ.

H.D. [*Chú ý đến các mối liên hệ giữa điểm M (cần khảo sát) với các điểm mà giả thiết của bài toán cho biết chuyển động. Dùng tọa độ descartes.*]

Ta có:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA} &= (2a\cos\omega t, 2a\sin\omega t), \\
\overrightarrow{OB} &= (2x_A, 0) = (4a\cos\omega t, 0).
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = (3a\cos\omega t, a\sin\omega t).$$

Phương trình chuyển động của M:

$$\begin{cases} x = 3a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \end{cases}$$

Quỹ đạo (khử t từ phương trình chuyển động):

$$\frac{x^2}{9a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Vận tốc:

$$\dot{x} = -3a\omega\sin\omega t, \quad \dot{y} = a\omega\cos\omega t.$$

Gia tốc:

$$\ddot{x} = -3a\omega^2\cos\omega t, \quad \ddot{y} = -a\omega^2\sin\omega t.$$

Để tính gia tốc tiếp ta cần tính tốc độ (môđun vectơ vận tốc)

$$v = a|\omega|\sqrt{1 + 8\sin^2\omega t}.$$

Gia tốc tiếp:

$$w_t = \dot{v} = \frac{4a|\omega|\omega\sin 2\omega t}{\sqrt{1 + 8\sin^2\omega t}}.$$

Để tính gia tốc pháp ta cần đến môđun vectơ gia tốc:

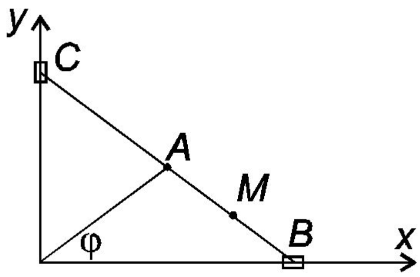
$$w = a\omega^2\sqrt{1 + 8\cos^2\omega t}.$$

Gia tốc pháp:

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_t^2} = \frac{a\omega^2\sqrt{9 - 12\sin^2 2\omega t}}{\sqrt{1 + 8\sin^2\omega t}}.$$

Chú ý, gia tốc pháp luôn luôn là số dương!

1.26. Một bánh xe bán kính R chuyển động lăn không trượt trên đường thẳng với vận tốc ở tâm bằng v_0. Viết phương trình chuyển động của điểm M nằm trên vành bánh xe. Xác định vận tốc, gia tốc điểm M, bán kính cong ρ của quỹ đạo. Khảo sát sự nhanh chậm của chuyển động.
H.D. Chuyển động của tâm C là chuyển động thẳng đều vận tốc v_0. Do bánh



Hình 1.20: Bài tập 1.25.

xe lăn không trượt nên $R\varphi = v_0 t$ (giả thiết lúc $t = 0$ điểm M nằm ở gốc tọa độ O).

Hệ thức liên hệ $\overrightarrow{OM}$ với $\overrightarrow{OC}$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} \; .$$

Chiếu hệ thức vectơ xuống các trục tọa độ

$$\begin{cases} x &= x_C + R\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) \\ y &= y_C + R\cos(\pi - \varphi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= v_0 t - R\sin\frac{v_0 t}{R} \\ y &= R - R\cos\frac{v_0 t}{R} \end{cases}$$

Vận tốc:

$$\dot{x} = v_0\left(1 - \cos\frac{v_0 t}{R}\right), \quad \dot{y} = v_0 \sin\frac{v_0 t}{R} \Rightarrow v = v_0\sqrt{2\left(1 - \cos\frac{v_0 t}{R}\right)}.$$

Gia tốc:

$$\ddot{x} = \frac{v_0^2}{R}\sin\frac{v_0 t}{R}, \quad \ddot{y} = \frac{v_0^2}{R}\cos\frac{v_0 t}{R} \Rightarrow w = \frac{v_0^2}{R}.$$

Để tính bán kính cong ta cần biết gia tốc tiếp,

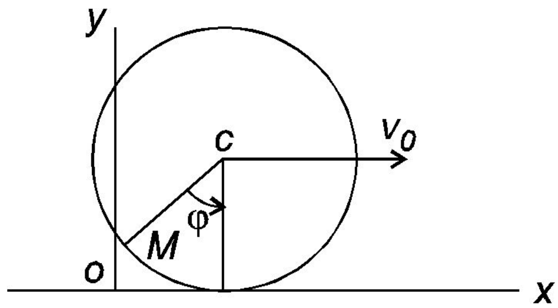
$$w_t = \dot{v} = \frac{v_0^2}{R}\frac{\sin\frac{v_0 t}{R}}{\sqrt{2\left(1 - \cos\frac{v_0 t}{R}\right)}},$$

gia tốc pháp

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_t^2} = \frac{v_0^2}{2R}\sqrt{2\left(1 - \cos\frac{v_0 t}{R}\right)}.$$

Suy ra

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = 2R\sqrt{2\left(1 - \cos\frac{v_0 t}{R}\right)} = 4R\left|\sin\frac{v_0 t}{2R}\right|.$$



Hình 1.21: Bài tập 1.26.

1.27. Điểm M chuyển động theo phương trình

$$x = at, \quad y = bt^2 \quad (a, b \text{ là hằng số}).$$

Xác định quỹ đạo, luật chuyển động của điểm trên quỹ đạo. Tính vận tốc, gia tốc của điểm và bán kính cong của quỹ đạo tại thời điểm $t = 0$.

1.28. Điểm M chuyển động theo phương trình

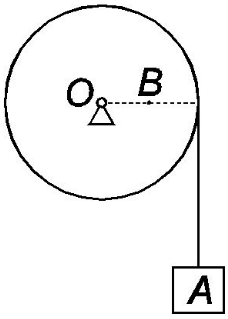
$$x = x_0 e^{\alpha t}, \quad y = y_0 e^{-\alpha t} \quad (x_0, y_0, \alpha \text{ là hằng số}).$$

Xác định quỹ đạo, vận tốc, gia tốc, gia tốc tiếp và gia tốc pháp của điểm. Tìm bán kính cong của quỹ đạo của điểm.

1.29. Một bánh đà bán kính $R = 2\ m$ quay nhanh dần đều từ trạng thái đứng yên. Sau 10 s một điểm trên vành bánh xe có trị số vận tốc $v = 100\ m/s^2$. Xác định vận tốc và gia tốc của điểm trên vành bánh đà ở thời điểm $t = 15\ s$.

1.30. Một đầu sợi dây không giãn buộc vào vật A, còn đầu kia quấn vào ròng rọc bán kính $R = 10\ cm$ quay quanh trục O cố định. Cho điểm A chuyển động đi xuống với phương trình $x = 100t^2$, $(x(cm), t(s))$. Xác định vận tốc góc và gia tốc góc của ròng rọc, đồng thời xác định gia tốc của điểm B trên ròng rọc $(OB = 5\ cm)$.

1.31. Cho cơ cấu chuyền động như hình 1.23. Biết vật (1) chuyển động với phương trình $x = 70t^2 + 2\ (x(cm), t(s))$, $R_2 = 50\ cm$, $r_2 = 30\ cm$, $R_3 = 60\ cm$, $r_3 = 40\ cm$. Xác định vận tốc, gia tốc tiếp, gia tốc pháp và gia tốc toàn phần của điểm M khi vật (1) đi được một đoạn $s = 40\ cm$.
H.D. Vận tốc của (1): $\dot{x} = 140t\ (cm/s)$.



Hình 1.22: Bài tập 1.30.

Do đai chuyền, bánh xe (2) chuyển động quay với vận tốc góc ω_2 thỏa $\omega_2 r_2 = 140t$ suy ra $\omega_2 = 14t/3$ (s^{-1}) [*vận tốc của điểm trên vành bánh xe (2) bằng vận tốc của vật (1)*].

Bánh xe (3) chuyển động quay với vận tốc góc ω_3 thỏa $\omega_2 R_2 = \omega_3 R_3$ suy ra $\omega_3 = R_2\omega_2/R_3 = 35t/9$ (s^{-1}) [*bánh xe (3) và bánh xe (2) nối với nhau bằng đai chuyền. Dùng công thức chuyền động*].

Điểm M gắn với bánh xe (3) chuyển động quay quanh trục. Vận tốc của M là $v = \omega_3 r_3 = 1400t/9$ (cm/s). Gia tốc góc của bánh xe (3) là $\epsilon_3 = 35/9$ $(1/s^2)$ nên gia tốc tiếp của M là $w_t = \epsilon_3 r_3 = 1400/9$ (cm/s^2) và gia tốc pháp của M là $w_n = \omega_3^2 r_3 = 19000t^2/81$ (cm/s^2) [*xem lại các công thức liên quan đến chuyển động của cố thể quanh một trục*].

Thời điểm (1) đi được $s = 40$ (cm) là $t = 2/\sqrt{7}$, thay vào các biểu thức trên ta được kết quả cần tìm.

[*Chú ý, kết quả tính vận tốc, gia tốc tiếp, gia tốc pháp của điểm M chỉ là độ lớn. Để xác định hướng của các vectơ này ta cần xét thêm chiều quay của các bánh xe liên kết với nhau!*]

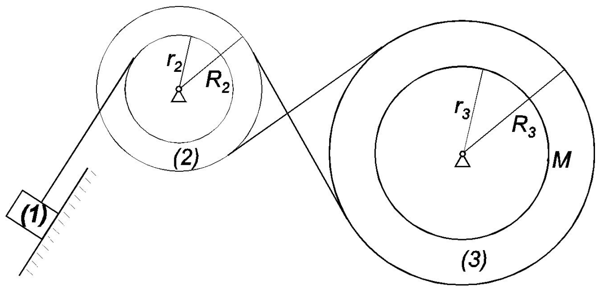
Chú thích. Bài toán chuyền động gồm các bánh xe quay quanh các trục và có liên hệ với nhau (ăn khớp bằng răng, tiếp xúc không trượt, nối với nhau bằng các đai chuyền). Tỉ số chuyền động giữa chúng

$$K_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1}, \tag{1.54}$$

trong đó ω_i, R_i và z_i lần lượt là vận tốc góc, bán kính và số răng của bánh xe thứ i.

Bài tập về hợp chuyển động

1.32. Một hình nón quay đều quanh trục OA với vận tốc góc ω. Điểm M chuyển động đều theo đường sinh của hình nón từ đỉnh đến đáy với vận tốc



Hình 1.23: Bài tập 1.31.

v_r; góc $\angle MOA = \alpha$. Tại thời điểm đầu $t = 0$, điểm M ở vị trí M_0 ($OM_0 = a$). Tính gia gốc của M tại thời điểm t.
H.D. Chuyển động tương đối của M đối với hình nón (hệ tọa độ động) là chuyển động thẳng đều nên gia tốc tương đối w_r bằng không.

Chuyển động theo là chuyển động tròn với vận tốc góc ω không đổi nên vận tốc theo của M là $\mathbf{v}_e = \vec{\omega} \times \mathbf{r}$, trong đó $\vec{\omega} = \omega\mathbf{k}$, $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$. Gia tốc theo (dùng công thức Gibbs):

$$\mathbf{w}_e = \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = (\vec{\omega} \cdot \mathbf{r})\vec{\omega} - \omega^2\mathbf{r}.$$

Để ý rằng $\vec{\omega} \cdot \mathbf{r} = -\omega r \cos\alpha$ nên

$$\mathbf{w}_e = -\omega^2 r \cos\alpha\mathbf{k} - \omega^2 r\mathbf{r}_0,$$

trong đó $\mathbf{r}_0$ là vectơ đơn vị của $\mathbf{r}$. Nếu phân tích vectơ $\mathbf{r}_0$ thành

$$\mathbf{r}_0 = -\cos\alpha\mathbf{k} + \sin\alpha\mathbf{u}$$

với $\mathbf{u}$ là vectơ đơn vị trực giao với $\mathbf{k}$ (trục z) và nằm trong mặt phẳng (AOM), thì

$$\mathbf{w}_e = -\omega^2 r \sin\alpha\mathbf{u}.$$

Gia tốc Coriolis của M:

$$\mathbf{w}_c = 2\vec{\omega} \times \mathbf{v}_r = 2\omega v_r \sin\alpha\mathbf{v},$$

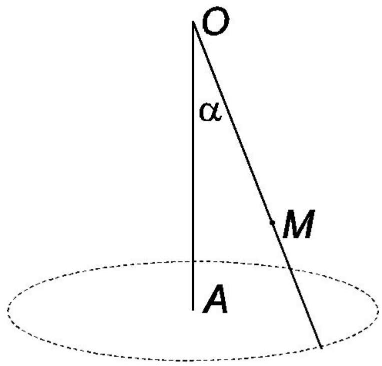
trong đó $\mathbf{v}$ là vectơ đơn vị của vectơ $\mathbf{k} \times \mathbf{v}_r$, vectơ này vuông góc với mặt phẳng (AOM).

Áp dụng công thức cộng gia tốc,

$$\mathbf{w}_a = -\omega^2 r \sin\alpha\mathbf{u} + 2\omega v_r \sin\alpha\mathbf{v},$$

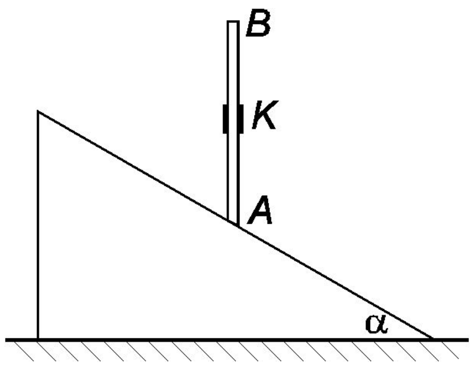
gia tốc này nằm trong mặt phẳng vuông góc với OA. Tại thời điểm t, $r = v_r t + a$,

$$\mathbf{w}_a = -\omega^2(v_r t + a)\sin\alpha\mathbf{u} + 2\omega v_r \sin\alpha\mathbf{v}.$$



Hình 1.24: Bài tập 1.32.

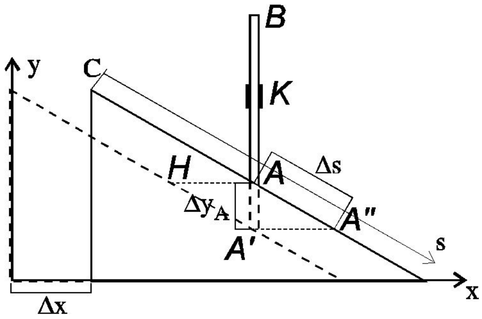
1.33. Tam giác ABC vuông tại A quay quanh cạnh AB thẳng đứng cố định với vận tốc góc ω =const. Một điểm M chuyển động trên cạnh BC theo phương trình $BM = s = 20t^2$. Xác định vận tốc, gia tốc của điểm M khi M nằm ở trung điểm BC. Biết $BC = 40\ cm$, $\alpha = 30^o$, $\omega = 2\ s^{-1}$.



Hình 1.25: Bài tập 1.34.

1.34. Cơ cấu cam có dạng hình nêm với $\alpha = 30^o$ chuyển động tịnh tiến trong mặt phẳng nằm ngang, với vận tốc không đổi $v_1 = 30\ cm/s$. Cam đẩy thanh

AB chuyển động thẳng đứng trong rãnh cố định K (hình 1.25). Xác định vận tốc tuyệt đối của thanh AB và vận tốc tương đối của nó so với cam.
H.D. Hệ tọa độ cố định Oxy gắn với nền. Hệ tọa độ động Cs gắn với mặt nghiêng của nêm.



Hình 1.26: Hai vị trí trước và sau của nêm (bài tập 1.34).

Hình 1.26 vẽ hai vị trí của nêm, trong đó hình vẽ không liền nét ứng với vị trí ban đầu của nêm.

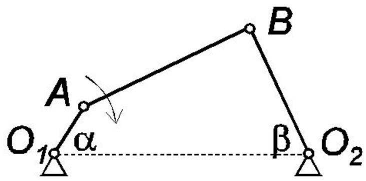
Thanh AB chuyển động tịnh tiến, vận tốc của thanh được cho bởi vận tốc của A. Điểm A' là vị trí ban đầu của A (trong hệ cố định). Ta có: $HA = \Delta x$, $\Delta y_A = HA \tan\alpha = \Delta x \tan\alpha$, suy ra vận tốc tuyệt đối của thanh AB: $v_a(A) = v \tan\alpha$, hướng thẳng đứng lên trên. *Kết quả nhận được bằng cách chia hai vế cho Δt, rồi qua giới hạn, $\Delta t \to 0$.*

Điểm A'' là vị trí ban đầu của A trên nêm. Ta có: $A'A'' = \Delta s \cos\alpha$, $A'A'' = HA = \Delta x$, suy ra vận tốc tương đối của A: $v_r(A) = v/cos\alpha$, hướng ngược chiều với s. Dùng dữ liệu số:

$$v_a(A) = 30 \tan 30^o = 10\sqrt{3}\ (cm/s), \quad v_r(A) = 30/\cos 30^o 20\sqrt{3}\ (cm/s).$$

Ta có thể giải bằng công thức hợp vận tốc. Trước hết, để ý rằng vận tốc của nêm v là vận tốc theo của A, $v_e(A) = v$. Tính vận tốc tương đối của A, $v_r(A)$ (như trên) rồi dùng công thức hợp vận tốc tính vận tốc tuyệt đối của A, $v_a(A)$.

1.35. Một cơ cấu bốn khâu gồm tay quay $O_1A = 10\ cm$ quay quanh O_1 với vận tốc góc $\omega_1 = 10\pi s^{-1}$, tay quay $O_2B = 30\ cm$ quay quanh O_2 và thanh AB chuyển động song phẳng. Cho $O_1O_2 = 50\ cm$. Xác định vận tốc góc thanh AB, vận tốc điểm B và vận tốc góc tay quay O_2B khi $\alpha = \beta = 60^o$.
H.D. Gọi I, ω_{AB} lần lượt là tâm quay tức thời, vận tốc góc tức thời của thanh AB. Điểm I chính là giao điểm của O_1A và O_2B. Ở vị trí $\alpha = \beta = 60^o$



Hình 1.27: Bài tập 1.35.

tam giác O_1IO_2 là tam giác đều, suy ra: $IA = O_1I - O_1A = 40$ (cm), $IB = O_2I - O_2B = 20$ (cm). Từ công thức vận tốc của chuyển động quay của thanh O_1A và thanh AB ta có

$$10 \times 10\pi = 40\omega_{AB} \Rightarrow \omega_{AB} = 2,5\pi\ (1/s).$$

Điểm B chuyển động với vận tốc $V_B = 20 \times 2,5\pi = 50\pi$ (cm/s).

Vận tốc góc của thanh O_2B sinh viên tự làm.

Chương 2

ĐỘNG LỰC HỌC

2.1 Các định luật Newton

Nội dung các định luật, xem Mục 1.2, [1].

2.1.1 Lực

Quan hệ giữa lực và chuyển động là nội dung của định luật thứ hai

$$\mathbf{F} = m\mathbf{w}. \tag{2.1}$$

⋆ *Lực hấp dẫn.* Hai vật khối lượng m_1, m_2 hút nhau bởi lực có phương là đường nối khối tâm của chúng và độ lớn bằng

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}, \tag{2.2}$$

trong đó d là khoảng cách hai khối tâm và $G \approx 6,67 \times 10^{-11} m^3/s^2 kg$ là hằng số hấp dẫn.

Trọng lượng của một vật là môđun của lực hút do Trái đất tác dụng lên vật.

⋆ *Lực ma sát.* Lực ma sát nằm trong mặt phẳng tiếp xúc giữa các vật, ngược hướng với chiều chuyển động của vật hay chiều của lực tác dụng vào vật. Về độ lớn lực ma sát tỉ lệ với phản lực pháp tuyến

$$F_{ms} = \eta R_n, \tag{2.3}$$

trong đó η là hệ số ma sát.

⋆ *Lực cản của môi trường.* Vật chuyển động trong môi trường như không khí, nước,... luôn luôn chịu một sức cản có hướng ngược với hướng chuyển động và có độ lớn tỉ lệ với lũy thừa của vận tốc

$$F = \mu v^{\alpha}. \tag{2.4}$$

Hệ số tỉ lệ μ phụ thuộc bản chất của môi trường, kích thước và hình dáng của vật; α là hằng số phụ thuộc vào chuyển động. Trong các chuyển động với vận tốc lớn nhưng không vượt quá vận tốc âm, thực nghiệm cho thấy, lực cản của môi trường tỉ lệ với bình phương của vận tốc ($\alpha = 2$).

Nếu vật rơi tự do trong không khí thì lực cản F sẽ tăng dần từ 0 cùng với sự gia tăng vận tốc. Cuối cùng thì F cũng sẽ bằng trọng lực mg của vật. Sau đó vận tốc của vật sẽ không tăng lên nữa do không có gia tốc. Vận tốc không đổi này, gọi là vận tốc giới hạn (xác định từ phương trình $F = mg$).

⋆ *Lực đàn hồi.* Khi lò xo bị kéo dãn $\Delta x = x - x_0$ nó sẽ tác dụng lên vật gây ra lực kéo một lực $F_{\text{đh}}$ tỉ lệ với độ giãn Δx, ngược với hướng lực kéo

$$F_{\text{đh}} = -k\Delta x. \tag{2.5}$$

Hệ số tỉ lệ k gọi là độ cứng của lò xo.

2.1.2 Hai bài toán cơ bản của động lực học

Bài toán thuận. Cho chuyển động của chất điểm tìm lực tác dụng lên chất điểm.

Bài toán ngược. Cho lực tác dụng lên chất điểm tìm chuyển động của điểm.

2.2 Các định lý tổng quát của động lực học

Nội dung các định lý, xem Mục 1.5, 2.1, 2.2 và 2.3 [1]. Lưu ý một số khái niệm và công thức cần thiết dưới đây.

2.2.1 Động lượng

⋆ *Khối tâm* của một hệ là điểm hình học C xác định bởi

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{M}\sum m_k \mathbf{r}_k, \tag{2.6}$$

trong đó $\mathbf{r}_k$ là vectơ định vị chất điểm thứ k, $M = \sum m_k$ là khối lượng của toàn hệ.

⋆ *Động lượng của hệ*

$$\mathbf{P} = \sum m_k \mathbf{v}_k = M\mathbf{v}_C.$$

Định lý 2.1 (Định lý động lượng của hệ)**.**

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum \mathbf{F}_k^{(e)}. \tag{2.7}$$

Định lý động lượng của hệ có thể được phát biểu dưới một dạng khác. Nếu coi đạo hàm $\dot{\mathbf{P}}$ như vận tốc điểm ngọn của vectơ $\mathbf{P}$ có điểm gốc tại điểm O, thì (2.7) có thể phát biểu như sau:

Định lý 2.2 (Định lý Rêdan thứ nhất)**.** *Vận tốc điểm ngọn của vectơ động lượng bằng vectơ chính của tất cả ngoại lực tác dụng lên hệ.*

Định lý 2.3 (Định lý chuyển động khối tâm)**.**

$$M\ddot{\mathbf{r}}_C = \sum \mathbf{F}_k^{(e)}. \tag{2.8}$$

2.2.2 Mômen động lượng

⋆ *Mômen động lượng của hệ*

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k = \mathbf{r}_C \times M\mathbf{v}_C + \sum \mathbf{r}'_k \times m_k \mathbf{v}'_k. \tag{2.9}$$

Định lý 2.4 (Định lý mômen động lượng của hệ)**.**

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{(e)}. \tag{2.10}$$

Cũng như định lý về động lượng, có thể phát biểu định lý về mô men động lượng dưới dạng:

Định lý 2.5 (Định lý Rêdan thứ hai)**.** *Vận tốc điểm ngọn của vectơ mô men động lượng bằng mô men chính của các ngoại lực tác dụng lên hệ.*

Trong **chuyển động quay của vật rắn quanh điểm cố định** O với vận tốc góc $\boldsymbol{\omega}$, ta có

$$\mathbf{v}_k = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k$$

mô men động lượng của vật rắn đối với O là

$$\mathbf{L}_O = \boldsymbol{\omega}\left(\sum m_k r_k^2\right) - \sum m_k \mathbf{r}_k (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_k). \tag{2.11}$$

⋆ *Mômen quán tính* của vật rắn đối với điểm O:

$$J_O = \sum m_k r_k^2, \tag{2.12}$$

trong đó r_k là khoảng cách từ chất điểm thứ k đến O.

⋆ *Mômen quán tính* của vật rắn đối với trục Δ (đi qua O):

$$J_\Delta = \sum m_k d_k^2, \tag{2.13}$$

trong đó d_k là khoảng cách từ chất điểm thứ k đến Δ.

Nếu chiếu vectơ $\mathbf{L}_O$ xuống các trục tọa độ x, y, z thì được

$$\begin{aligned}
L_x &= \omega_x \sum m_k(y_k^2 + z_k^2) - \omega_y \sum m_k x_k y_k - \omega_z \sum m_k x_k z_k, \\
L_y &= \omega_y \sum m_k(z_k^2 + x_k^2) - \omega_z \sum m_k y_k z_k - \omega_z \sum m_k y_k x_k, \\
L_z &= \omega_z \sum m_k(y_k^2 + z_k^2) - \omega_y \sum m_k x_k y_k - \omega_z \sum m_k z_k y_k. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Ký hiệu:

J_x, J_y, J_z là mômen quán tính của vật rắn đối với các trục Ox, Oy, Oz;

J_{xy}, J_{xz}, J_{zx} là các mômen quán tính ly tâm của vật rắn

$$\begin{aligned}
J_{xy} = J_{yx} &= \sum m_k x_k y_k, \\
J_{yz} = J_{zx} &= \sum m_k y_k z_k, \\
J_{zx} = J_{xz} &= \sum m_k z_k x_k. \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

⋆ *Tenxơ quán tính* là ma trận

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}, \tag{2.16}$$

Như vậy,

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}. \tag{2.17}$$

Nếu $\mathbf{n} = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]^T$ là vectơ đơn vị của trục Δ (đi qua O) thì

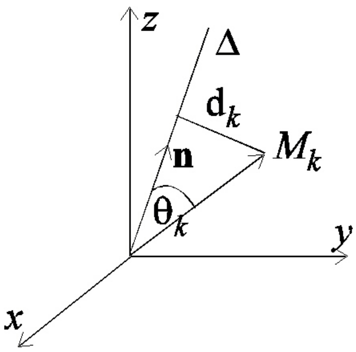
$$J_\Delta = \mathbf{n}^T \mathbf{J} \mathbf{n}. \tag{2.18}$$

Thậy vậy, theo định nghĩa ta có

$$J_\Delta = \sum m_k d_k^2.$$

Mà

$$d_k = r_k \sin\theta_k = |\mathbf{r}_k \times \mathbf{n}|$$



Hình 2.1: Khoảng cách d_k từ điểm M_k đế trục Δ.

và

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_k \times \mathbf{n} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_k & y_k & z_k \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} \\
&= (y_k \cos\gamma - z_k \cos\beta)\mathbf{i} - (x_k \cos\gamma - z_k \cos\alpha)\mathbf{j} + (x_k \cos\beta - y_k \cos\alpha)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned}
d_k^2 &= (y_k \cos\gamma - z_k \cos\beta)^2 + (x_k \cos\gamma - z_k \cos\alpha)^2 + (x_k \cos\beta - y_k \cos\alpha)^2 \\
&= (y_k^2 + z_k^2)\cos^2\alpha + (z_k^2 + x_k^2)\cos^2\beta + (x_k^2 + y_k^2)\cos^2\gamma \\
&\quad -2y_k z_k \cos\beta\cos\gamma - 2z_k x_k \cos\gamma\cos\alpha - 2x_k y_k \cos\alpha\cos\beta.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
J_\Delta &= J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta + J_z \cos^2\gamma \\
&\quad -2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2J_{zx}\cos\gamma\cos\alpha - 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

■

Đặt $x = \cos\alpha/\sqrt{J_\Delta}$, $x = \cos\alpha/\sqrt{J_\Delta}$, $x = \cos\alpha/\sqrt{J_\Delta}$, phương trình (2.19) trờ thành

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy} - 2J_{yz} - 2J_{zx} = 1. \qquad (2.20)$$

Vế trái (2.20) là một dạng toàn phương, và phương trình (2.20) là phương trình của một elipxôit, gọi là *elipxôit quán tính*. Nếu ta chọn các trục của elipxôit làm trục tọa độ đi qua O thì phương trình của elipxôit sẽ có dạng chính tắc

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 = 1.$$

Các trục của elipxôit quán tính gọi là các *trục quán tính chính* của vật tại điểm O.

Định lý 2.6 (Định lý Huygens)**.** *Khi chuyển từ trục đi qua tâm khối C sang trục khác song song với nó, Δ, thì*

$$J_\Delta = J_C + Md^2, \tag{2.21}$$

trong đó M là khối lượng của vật và d là khoảng cách giữa hai trục.

Chứng minh. Giả sử ta có J_Δ được tính theo các mô men quán tính J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} đối với hệ tọa độ $Oxyz$. Xét hệ $Cx'y'z'$ với các trục lần lượt song song với Ox, Oy, Oz. Khi ấy $x = x' + x_C$, $y = y' + y_C$, $z = z' + z_C$, ta có

$$\begin{aligned}
J_x &= \sum m_k[(y'_k + y_C)^2 + (z'_k + z_C)^2] \\
&= \sum m_k(y'^2_k + z'^2_k) + \sum m_k(y_C^2 + z_C^2) + 2\sum m_k(y'_k y_C + z'_k z_C) \\
&= \sum m_k(y'^2_k + z'^2_k) + \left(\sum m_k\right)(y_C^2 + z_C^2) + 2y_C\sum m_k y'_k + 2z_C\sum m_k z'_k.
\end{aligned}$$

Vì $\sum m_k y'_k = \sum m_k z'_k = 0$ nên

$$J_x = J_{x'} + M(y_C^2 + z_C^2).$$

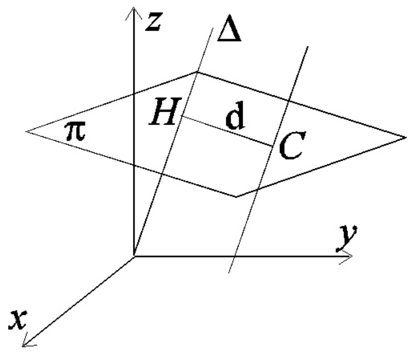
$$\begin{aligned}
J_{xy} &= \sum m_k(x'_k + x_C)(y'_k + y_C) \\
&= \sum m_k x'_k y'_k + \sum m_k y_C x_C + \sum m_k(y'_k x_C - x'_k y_C) \\
&= J_{x'y'} + My_C x_C.
\end{aligned}$$

Tương tự với các mô men quán tính còn lại.

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}
J_\Delta &= (J_{x'} + M(y_C^2 + z_C^2))\cos^2\alpha + (J_{y'} + M(z_C^2 + x_C^2))\cos^2\beta \\
&\quad + (J_{z'} + M(x_C^2 + y_C^2))\cos^2\gamma - 2(J_{y'z'} + My_C z_C)\cos\beta\cos\gamma \\
&\quad - 2(J_{z'x'} + Mz_C x_C)\cos\gamma\cos\alpha - 2(J_{x'y'} + Mx_C y_C)\cos\alpha\cos\beta \\
&= (J_{x'}\cos^2\alpha + J_{y'}\cos^2\beta + J_{z'}\cos^2\gamma - 2J_{y'z'}\cos\beta\cos\gamma \\
&\quad - 2J_{z'x'}\cos\gamma\cos\alpha - 2J_{x'y'}\cos\alpha\cos\beta) + M[(y_C^2 + z_C^2)\cos^2\alpha \\
&\quad + (z_C^2 + x_C^2)\cos^2\beta + (x_C^2 + y_C^2)\cos^2\gamma - 2y_C z_C\cos\beta\cos\gamma \\
&\quad - 2z_C x_C\cos\gamma\cos\alpha - 2x_C y_C\cos\alpha\cos\beta] \\
&= J_C + M[(y_C^2 + z_C^2)\cos^2\alpha + (z_C^2 + x_C^2)\cos^2\beta + (x_C^2 + y_C^2)\cos^2\gamma \\
&\quad - 2y_C z_C\cos\beta\cos\gamma - 2z_C x_C\cos\gamma\cos\alpha - 2x_C y_C\cos\alpha\cos\beta]
\end{aligned}$$

Bây giờ ta chứng minh số hạng trong dấu ngoặc vuông bằng d^2, trong đó



Hình 2.2: Khoảng cách d giữa Δ và trục qua tâm khối và song song với Δ.

d là khoảng cách giữa Δ và trục qua tâm khối và song song với nó. Phương trình mặt phẳng (π) qua C và vuông góc với Δ

$$(x - x_C)\cos\alpha + (y - y_C)\cos\beta + (z - z_C)\cos\gamma = 0.$$

Phương trình đường thẳng Δ

$$x = \tau\cos\alpha, \quad y = \tau\cos\beta, \quad z = \tau\cos\gamma.$$

Giao điểm H của (π) với Δ

$$\tau_0 = x_C\cos\alpha + y_C\cos\beta + z_C\cos\gamma \Rightarrow \begin{cases} x_H = \tau_0\cos\alpha \\ y_H = \tau_0\cos\beta \\ z_H = \tau_0\cos\gamma \end{cases}$$

Bình phương khoảng cách

$$\begin{aligned} d^2 &= (\tau_0\cos\alpha - x_C)^2 + (\tau_0\cos\beta - y_C)^2 + (\tau_0\cos\gamma - z_C)^2 \\ &= x_C^2 + y_C^2 + z_C^2 - \tau_0^2 \\ &= (x_C^2 + y_C^2 + z_C^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) \\ &\quad -(x_C^2\cos^2\alpha + y_C^2\cos^2\beta + z_C^2\cos^2\gamma + 2x_Cy_C\cos\alpha\cos\beta \\ &\quad +2y_Cz_C\cos\beta\cos\gamma + 2z_Cx_C\cos\gamma\cos\alpha) = [\ ]. \end{aligned}$$

Tóm lại, $J_\Delta = J_C + Md^2$.

■

⋆ *Công thức tính mômen quán tính cần nhớ*

1. Thanh mảnh đồng chất chiều dài l, khối lượng M đối với trục qua khối tâm và vuông góc với thanh

$$J_C = \frac{1}{3}Ml^2. \tag{2.22}$$

2. Vòng đồng chất bán kính R, khối lượng M đối với trục qua tâm và vuông góc với mặt phẳng chứa vòng
$$J_C = MR^2. \tag{2.23}$$
3. Đĩa tròn đồng chất bán kính R, khối lượng M đối với trục qua tâm và vuông góc với đĩa
$$J_C = \frac{1}{2}MR^2. \tag{2.24}$$
4. Hình trụ tròn đồng chất bán kính R, khối lượng M đối với trục hình trụ[1]
$$J_C = MR^2. \tag{2.25}$$

2.2.3 Động năng

⋆ *Động năng*

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k v_k^2 = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \sum m_k v_k'^2.$$

Trường hợp đặc biệt:

(1) Chuyển động tịnh tiến
$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2. \tag{2.26}$$
(2) Chuyển động quay quanh trục Δ
$$T = \frac{1}{2}J_\Delta \omega^2. \tag{2.27}$$

⋆ *Công*

Công phân tố của lực $\mathbf{F}$ làm chất điểm thực hiện chuyển dịch vô cùng bé $d\mathbf{r}$, ký hiệu δW,
$$\delta W = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \tag{2.28}$$

Công (toàn phần) làm chất điểm chuyển dịch từ điểm A đến điểm B, ký hiệu W,
$$W = \int_{C(A,B)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}, \quad \text{(tích phân đường loại 2)} \tag{2.29}$$

[1]Đây là công thức tính mômen quán tính cho ống trụ. Trường hợp khối trụ (đặc) $J_C = \frac{1}{2}MR^2$.

trong đó $C(A, B)$ là đường cong định hướng từ A đến B.

Lực $\mathbf{F}$ gọi là *lực bảo toàn* nếu tồn tại hàm $V(x, y, z)$ (chỉ phụ thuộc vị trí) sao cho

$$\mathbf{F} = - \bigtriangledown V. \tag{2.30}$$

Hàm V được gọi là *hàm thế* hay *thế năng*. Hàm $U = -V$ gọi là *hàm lực*.

$\star$ *Vài công thức tính công của lực và hàm thế*

1. *Công của trọng lực* (trục z thẳng đứng hướng lên):

$$\delta W = m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = -mgdz. \tag{2.31}$$

   Công toàn phần (từ A đến B)

$$W = mg(z_A - z_B). \tag{2.32}$$

   Hàm thế của trọng lực: $V = mgz + C$.

2. *Công của lực đàn hồi* gây ra do lò xo độ cứng k có độ giãn x (lò xo nằm ngang theo phương x, gốc tọa độ được chọn ở vị trí cân bằng)

$$\delta W = -kxdx. \tag{2.33}$$

   Công toàn phần (từ A đến B)

$$W = \frac{k}{2}(x_A^2 - x_B^2). \tag{2.34}$$

   Hàm thế của lực đàn hồi: $V = \frac{k}{2}x^2$.

3. *Công của lực ma sát*

$$\delta W = -\eta R_n dx. \tag{2.35}$$

   Công của lực ma sát luôn luôn âm (công cản). Lực ma sát không có thế.

4. *Công của lực trong chuyển động quay quanh trục*

$$\delta W = \omega M_\Delta(\mathbf{F})dt, \tag{2.36}$$

   trong đó $M_\Delta(\mathbf{F})$ là chiếu của mômen lực $\mathbf{F}$ xuống trục Δ, còn gọi là mômen của lực đối với trục Δ.

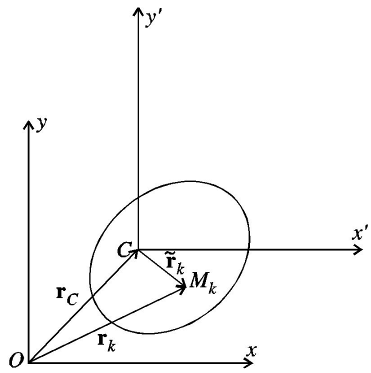
Định lý 2.7 (Định lý động năng của hệ)**.**

$$dT = \sum \mathbf{F}_k^{(e)} \cdot \delta\mathbf{r}_k + \sum \mathbf{F}_k^{(i)} \cdot \delta\mathbf{r}_k. \tag{2.37}$$

2.2.4 Cách tính vectơ động lượng, vectơ mômen động lượng của hệ

Vectơ động lượng của hệ được tính nhờ định lý chuyển động của khối tâm C

$$\mathbf{P} = \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{\mathbf{r}}_k = \left(\sum_{k=1}^{n} m_k \right) \dot{\mathbf{r}}_C = M \dot{\mathbf{r}}_C.$$



Hình 2.3: Hệ quy chiếu di động $Cx'y'z'$.

Để tính vectơ mômen động lượng của hệ, ta chọn một điểm đặc biệt của hệ làm cực (thường là khối tâm), gọi là C. Chuyển động của hệ được phân tích thành hợp của hai chuyển động: (1) chuyển động đối với hệ di động $Cx'y'z'$ ($Cx' \parallel Ox$, $Cy' \parallel Oy$, $Cz' \parallel Oz$), hệ này chuyển động tịnh tiến với hệ quy chiếu cố định $Oxyz$; (2) chuyển động theo gắn với hệ di động. Ta có

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_C + \tilde{\mathbf{r}}_k, \quad \tilde{\mathbf{r}}_k = \overrightarrow{CM}_k \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_k = \dot{\mathbf{r}}_C + \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_k.$$

Số hạng $\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_k$ là vận tốc tương đối của chất điểm đối với hệ quy chiếu di động, còn $\dot{\mathbf{r}}_C$ là vận tốc theo của chất điểm trong chuyển động của hệ động đối với hệ quy chiếu cố định $Oxyz$.

Vectơ mômen động lượng của hệ

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_O &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times m_k (\dot{\mathbf{r}}_C + \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_k) = \left(\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{r}_k \right) \times \dot{\mathbf{r}}_C + \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{r}_k \times \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_k \\ &= \mathbf{r}_C \times M \dot{\mathbf{r}}_C + \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{r}_k \times \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_k. \end{aligned}$$

Các trường hợp đặc biệt quan trọng:

a) Cố thể chuyển động tịnh tiến, $\tilde{\mathbf{r}}_k$ là vectơ hằng nên $\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_k = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r}_C \times M\dot{\mathbf{r}}_C.$$

b) Cố thể chuyển động quay quanh trục qua O. Trong trường hợp này ta cần tính mômen động lượng đối với trục quay L_Δ

$$L_\Delta = J_\Delta \omega.$$

Việc thiết lập phương trình tổng quát động lực học,

$$\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{F}_k - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k)\delta\mathbf{r}_k = 0.$$

cho cố thể (gồm vô số chất điểm) thường làm cho người mới bắt đầu lúng túng. Các sách giải bài tập thường không trình bày rõ gây ra tình trạng lơ mơ của người học. Dưới đây ta giải thích rõ cách tính toán.

Ta phân biệt các trường hợp:

1) Cố thể chuyển động tịnh tiến (tối đa có 3 bậc tự do). Chọn $\mathbf{r} = (x, y, z)$ làm điểm khảo sát (các tọa độ suy rộng). Ta có

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_k &= \dot{\mathbf{r}} \Rightarrow \delta\mathbf{r}_k = \delta\mathbf{r}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_k &= \ddot{\mathbf{r}}, \end{aligned}$$

với mọi k. Từ đó,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \delta\mathbf{r}_k &= \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k\right) \cdot \delta\mathbf{r} = \mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r}, \\ \sum_{k=1}^{n} -m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta\mathbf{r}_k &= -\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\right) \ddot{\mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r} = -M\ddot{\mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r}, \end{aligned}$$

trong đó $\mathbf{R} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k$ là tổng hình học các lực chủ động, $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ là khối lượng của cố thể.

2) Cố thể chuyển động quay quanh trục Δ đi qua O. Chọn φ (góc quay) làm tham số định vị hệ (tọa độ suy rộng). Ta có, với mọi k,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_k &= \dot{\varphi}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_k \Rightarrow \delta\mathbf{r}_k = \delta\varphi\mathbf{k} \times \mathbf{r}_k, \\ \ddot{\mathbf{r}}_k &= \ddot{\varphi}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_k + \dot{\varphi}\mathbf{k} \times (\dot{\varphi}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_k), \\ \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta\mathbf{r}_k &= \delta\varphi\ddot{\mathbf{r}}_k \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_k) = |\mathbf{k} \times \mathbf{r}_k|^2 \ddot{\varphi}\delta\varphi = d_k^2 \ddot{\varphi}\delta\varphi, \end{aligned}$$

trong đó $\mathbf{k}$ là vectơ đơn vị của trục quay Δ xác định bằng quy tắc vặn nút chai, d_k là khoảng cách từ chất điểm thứ k đến trục quay. Từ đó,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \delta\mathbf{r}_k &= \delta\varphi \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_k) = \delta\varphi \mathbf{k} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k\right) = M_\Delta \delta\varphi, \\ \sum_{k=1}^{n} -m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta\mathbf{r}_k &= -\left(\sum_{k=1}^{n} m_k d_k^2\right) \ddot{\varphi}\delta\varphi = -J_\Delta \ddot{\varphi}\delta\varphi,\end{aligned}$$

trong đó $M_\Delta = \mathbf{k} \cdot (\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k)$ là tổng mômen của lực chủ động đối với trục quay Δ, $J_\Delta = (\sum_{k=1}^{n} m_k d_k^2)$ là mômen quán tính của cố thể với trục quay.

3) Cố thể chuyển động tổng quát là hợp của chuyển động tịnh tiến và quay. Ta có thể thực hiện theo cách như hai trường hợp trên. Chú ý vectơ quay trong trường hợp này có phương chiều thay đổi theo t.

2.3 Chuyển động hành tinh

Đầu thế kỷ thứ 17, Johannes Kepler đã công bố tác phẩm của ông "Các quy luật của chuyển động hành tinh" dựa trên các phân tích chính xác số liệu quan sát của nhà thiên văn Tycho Brahe.

Ba định luật của Kepler

Định luật thứ nhất. Mỗi hành tinh di chuyển trên quỹ đạo ellipse với Mặt trời nằm ở một tiêu điểm của ellipse.

Định luật thứ hai. Với mỗi hành tinh, đường thẳng nối hành tinh với Mặt trời quét những diện tích bằng nhau trong những khoảng thời gian bằng nhau.

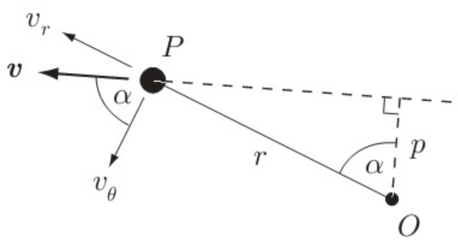
Định luật thứ ba. Bình phương chu kỳ của các hành tinh tỉ lệ với lũy thừa ba của trục chính của hành tinh.

Bài toán xác định quy luật của lực gây ra chuyển động mô tả bởi Kepler là một bài toán quan trọng trong khoa học của thế kỷ thứ 17. Trong tác phẩm "Principiain" xuất bản năm 1687, Newton không chỉ chứng minh quy luật nghịch đảo bình phương của trọng trường (chứa đựng các định luật của Kepler), mà còn đặt nền móng cho cơ học.

2.3.1 Bài toán một vật

Định nghĩa 2.1. Trường lực $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ được gọi là *trường xuyên tâm* với tâm O nếu nó có dạng

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\hat{\mathbf{r}},$$



Hình 2.4: Mô men động lượng.

trong đó $r = |\mathbf{r}|, \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$. Như vậy, trường xuyên tâm đối xứng cầu quanh tâm của nó.

Quỹ đạo nằm trong mặt phẳng đi qua tâm của lực

Khi một chất điểm P di chuyển trong trường lực xuyên tâm O, quỹ đạo của nó là phẳng và mặt phẳng này đi qua O. Dùng tọa độ cực (r, θ) có gốc đặt tại O. Định luật thứ hai của Newton cho

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r), \tag{2.38}$$
$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0. \tag{2.39}$$

Sự bảo toàn mô men động lượng

Nghiệm tổng quát của phương trình (2.39)

$$mr^2\dot{\theta} = const.$$

Đại lượng $mr^2\dot{\theta}$ là mô men động lượng của chất điểm. Từ hình 2.4 ta có

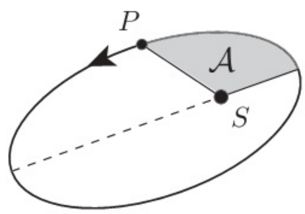
$$\begin{aligned} mr^2\dot{\theta} &= mr(r\dot{\theta}) = mrv = m(r\cos\alpha)\left(\frac{v_\theta}{\cos\alpha}\right) \\ &= mpv, \end{aligned}$$

trong đó p là khoảng cách từ O đến tiếp tuyến với quỹ đạo của chất điểm P, và $v = |\mathbf{v}|$. Công thức này cho phép tính giá trị hằng của mô men động lượng từ điều kiện đầu.

Khử m khỏi lý thuyết. Nếu ta viết

$$F(r) = mf(r),$$

trong đó $f(r)$ là lực trên đơn vị khối lượng, và đặt $L = r^2\dot{\theta}$ là mô men động lượng trên đơn vị khối lượng, thì các phương trình (2.38), (2.39) có thể viết



Hình 2.5: Vận tốc diện tích.

lại ở dạng đặc biệt

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = f(r), \tag{2.40}$$
$$r^2\dot{\theta} = L, \tag{2.41}$$

trong đó L là hằng số. Không mất tính tổng quát, ta có thể lấy $L \geq 0$.

Định luật Kepler thứ hai

Sự bảo toàn mô men động lượng trên là nội dung định luật thứ hai của Kepler. Diện tích $\mathcal{A}$ được chỉ trên hình 2.5 có thể tính như sau

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_0^\theta r^2 d\theta.$$

Bằng quy tắc đạo hàm hàm hợp,

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{d\mathcal{A}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}L,$$

trong đó L là giá trị hằng của mô men động lượng. Đây là nội dung định luật thứ hai của Kepler. Như vậy định luật thứ hai của Kepler đúng cho mọi trường lực xuyên tâm, chứ không chỉ cho "quy luật nghịch đảo bình phương".

Sự bảo toàn năng lượng

Các trường lực xuyên tâm $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = mf(r)\hat{\mathbf{r}}$ là bảo toàn với thế năng $mV(r)$, trong đó

$$f(r) = -\frac{dV}{dr}. \tag{2.42}$$

Sự bảo toàn năng lượng ngụ ý rằng

$$T + V = E,$$

trong đó T là động năng riêng (động năng trên đơn vị khối lượng), V là thế năng riêng (thế năng trên đơn vị khối lượng), và hằng số E là năng lượng toàn phần riêng (năng lượng toàn phần trên đơn vị khối lượng). Thay biểu thức của T theo tọa độ cực, ta được

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) + V(r) = E. \tag{2.43}$$

Các phương trình bảo toàn (2.41), (2.43) tương đương với các phương trình Newton (2.38), (2.39) và là điểm khởi đầu tiện lợi hơn khi khảo sát bản chất của quỹ đạo.

2.3.2 Phương trình chuyển động xuyên tâm

Từ phương trình mô men động lượng (2.41), ta có

$$\dot{\theta} = L/r^2$$

và, khử $\dot{\theta}$ khỏi phương trình bảo toàn năng lượng (2.43), ta được

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V(r) + \frac{L}{2r^2} = E, \tag{2.44}$$

một phương trình vi phân thường cho bán kính $r(t)$. Ta gọi đây là *phương trình chuyển động xuyên tâm* cho điểm P. Phương trình (2.44) (cùng với điều kiện đầu) đủ để xác định sự thay đổi của r theo t, và phương trình mô men động lượng (2.41) để xác định sự thay đổi của θ theo t. Đáng tiếc, với hầu hết các quy luật của lực, thủ tục này không thể thực hiện thông qua giải tích. Tuy nhiên, nó vẫn có thể dẫn đến các kết luận quan trọng về bản chất của chuyển động.

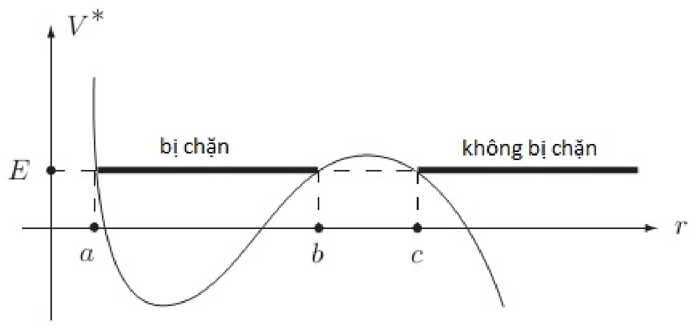
Phương trình (2.44) có thể viết dưới dạng

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V^*(r) = E, \tag{2.45}$$

trong đó

$$V^*(r) = V(r) + \frac{L^2}{2r^2}. \tag{2.46}$$

Hàm $V^*(r)$ được gọi là *thế năng hiệu quả* của chuyển động xuyên tâm và nó được dùng để dẫn phương trình chuyển động xuyên tâm của P về bài toán thẳng.



Hình 2.6: Thế hiệu quả V^*.

Bản chất của chuyển động phụ thuộc vào hình dạng của V^* (phụ thuộc L) và giá trị của hằng số E. Các giá trị của hằng số L và E lại phụ thuộc vào điều kiện đầu

Giả sử, chẳng hạn, quy luật của lực và các điều kiện đầu sao cho V^* có dạng được cho trên hình 2.6 và E có giá chỉ đã chỉ ra. Thì, vì $T \geq 0$, ta có chuyển động bị hạn chế với các giá trị r thỏa bất đẳng thức

$$V^* \leq E,$$

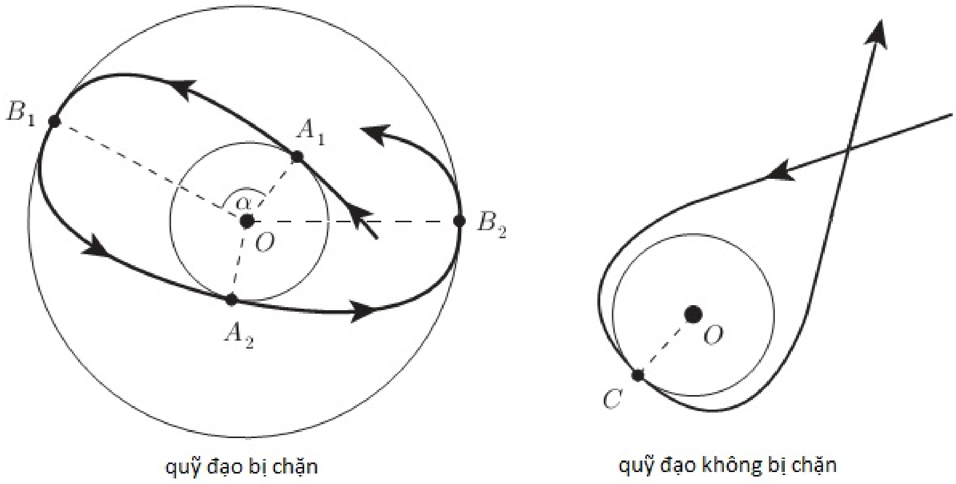
với dấu đẳng thức xảy ra khi $\dot{r} = 0$. Có hai chuyển động có thể xảy ra, trong mỗi trường hợp sự thay đổi của r đối với t phải thỏa phương trình chuyển động xuyên tâm (2.44).

(i) **Chuyển động bị chặn** trong đó r dao động trong phạm vi $[a, b]$. Trong chuyển động này, $r(t)$ là một hàm tuần hoàn.

(ii) **Chuyển động không bị chặn** trong đó r nằm trong khoảng $[c, \infty)$. Trong chuyển động này r không tuần hoàn nhưng giảm cho đến khi đạt giá trị cực tiểu $r = c$ và rồi tăng vô hạn.

Quỹ đạo bị chặn

Một quỹ đạo bị chặn điển hình được thể hiện trong hình 2.7 (trái). Các quỹ đạo luân phiên chạm vào vòng tròn trong và vòng tròn ngoài $r = a$ và $r = b$, tương ứng với tọa độ kính dao động trong khoảng $[a, b]$. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng P tại điểm B_1 khi $t = 0$ và OB_1 là đường $\theta = 0$. Xét phần quỹ đạo giữa A_1 và A_2. Từ phương trình (2.44), (2.41) r là hàm chẵn của t trong khi θ là hàm lẻ của t. Điều này có nghĩa là đoại B_1A_2 của quỹ đạo chính là phản xạ của đoạn A_1B_1 qua đường OB_1. Chứng minh này có thể lặp lại để chứng tỏ đoạn A_2B_2 là phản xạ của đoạn B_1A_2 qua đường OA_2, và vân vân. Như vậy toàn bộ quỹ đạo có thể được xây dựng từ kiến thức của một đoạn như A_1B_1.



Hình 2.7: Quỹ đạo bị chặn và không bị chặn.

Từ những điều đã nêu các góc $\angle A_1OB_1, \angle B_1OA_2, \angle A_2OB_2$ (và vân vân) là bằng nhau. Gọi α là giá trị chung của các góc này. Rồi cuối cùng quỹ đạo sẽ tự đóng nếu một số bội của α bằng với một số nguyên lần sự xoay vòng hoàn chỉnh, nghĩa là, nếu α/π là số hữu tỉ. Không có lý do để hy vọng điều này là đúng, nói chung, nó không đúng. Từ đó các quỹ đạo bị chặn nói chung là không đóng. Các quỹ đạo đóng liên kết với trường hấp dẫn nghịch đảo bình phương vì vậy là đặc biệt, chứ không phải điển hình!

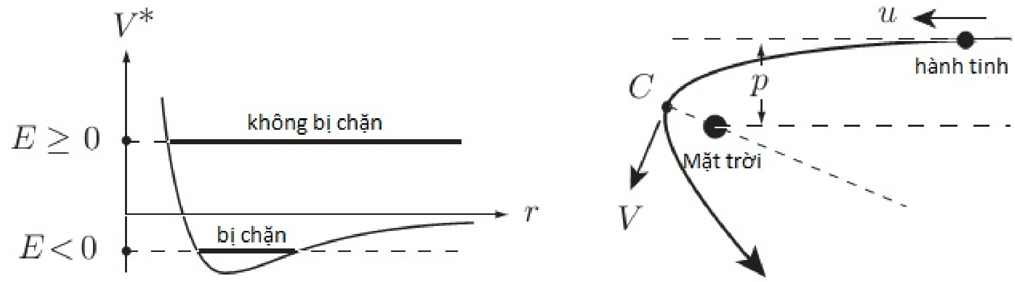
Quỹ đạo không bị chặn

Trong trường hợp không bị chặn có đúng hai đoạn cả hai là nửa vô hạn (xem hình 2.7 (phải)). Đoạn trong đó P lùi xa dần O là phản xạ của đoạn trong đó P tiến tới O theo đường OC.

Cùng điểm, khoảng cách cùng điểm

Các điểm mà tại đó quỹ đạo chạm vào vòng tròn bao của nó rất quan trọng và được đặt tên:

Định nghĩa 2.2. Điểm của quỹ đạo mà tại đó khoảng cách OP đạt giá trị cực đại hoặc cực tiểu được gọi là *cùng điểm* (apse) của quỹ đạo. Các khoảng cách tối đa hoặc tối thiểu được gọi là *khoảng cách cùng điểm* (apsidal distances) và góc dịch chuyển giữa các cùng điểm liên tiếp (góc α trong hình 2.7 (trái)) được gọi là *góc cùng điểm* (apsidal angle).



Hình 2.8: **Trái:** Thế hiệu quả V^* cho lực hấp dẫn nghịch đảo bình phương. **Phải:** Quỹ đạo của hành tinh quanh Mặt trời. C là điểm gần nhất.

Trong trường hợp đặc biệt của các quỹ đạo bao quanh Mặt trời, điểm tiếp cận gần nhất được gọi là *điểm cận nhật* (perihelion) và điểm có khoảng cách tối đa là *điểm viễn nhật* (aphelion). Các từ tương ứng cho quỹ đạo quanh Trái đất là *cận điểm* (perigee) và viễn điểm (apogee).

Khoảng cách cùng điểm dễ dàng được tìm thấy nhờ phương trình chuyển động xuyên tâm (2.43). Tại cùng điểm, $\dot{r} = 0$ và vì vậy r phải thỏa

$$V(r) + \frac{L^2}{2r^2} = E. \tag{2.47}$$

Các nghiệm dương của phương trình này là các khoảng cách cùng điểm.

Thí dụ 2.1 (Hành tinh chệch hướng bởi Mặt trời)**.** Một chất điểm có khối lượng m di chuyển trong trường lực xuyên tâm $-(m\gamma/r^2)\hat{\mathbf{r}}$, trong đó γ là hằng số dương. Chứng tỏ rằng các quỹ đạo bị chặn và không bị chặn có thể phụ thuộc vào giá trị của E.

Một hành tinh tiếp cận Mặt trời một khoảng cách xa. Tại thời điểm này nó có tốc độ hằng u và di chuyển theo đường thẳng mà khoảng cách vuông góc của nó đến Mặt trời là p. Tìm phương trình được thỏa mãn bởi các khoảng cách cùng điểm của quỹ đạo.

Giải

Với quy luật của lực, $V = -\gamma/r$ và thế năng hiệu quả V^* là

$$V^* = -\frac{\gamma}{r} + \frac{L^2}{2r^2}.$$

Thế năng hiệu quả này có dạng được chỉ trong hình 2.8 (trái), từ nó rõ ràng rằng quỹ đạo sẽ là

(i) bị chặn nếu $E < 0$,

(ii) không bị chặn nếu $E \geq 0$,
bất kỳ giá trị của L.

Trong thí dụ hành tinh, hằng số $\gamma = M_\odot G$, trong đó $M_\odot$ là khối lượng của Mặt trời còn G là hằng số hấp dẫn. Với điều kiện đầu cho trước, $L = pu$ và $E = u^2/2$, để cho $E > 0$ và quỹ đạo là không bị chặn.

Phương trình (2.47) cho khoảng cách cùng điểm trờ thành

$$-\frac{\gamma}{r} + \frac{p^2u^2}{2r^2} = \frac{1}{2}u^2,$$

nghĩa là,

$$u^2r^2 + 2\gamma r - p^2u^2 = 0,$$

trong đó $\gamma = M_\odot G$.

Khoảng cách tiếp cận gần nhất của hành tinh là nghiệm dương của phương trình bậc hai này, cụ thể $r = p/2$.

Tốc độ V của hành tinh ở tiếp cận gần nhất dễ dàng suy ra từ sự bảo toàn mô men động lượng. Ban đầu $L = pu$, tại tiếp cận gần nhất, $L = (p/2)V$. Từ đó suy ra $V = 2u$.

◇

2.3.3 Phương trình quỹ đạo

Về nguyên tắc, phương pháp ở trên cho phép chúng ta xác định đầy đủ chuyển động của vật thể quay xung quanh như là hàm của thời gian. Tuy nhiên, các thủ tục thường là quá khó để thực hiện thông qua phân tích. Ta có thể làm bài toán dễ hơn bằng cách tìm chỉ phương trình quỹ đạo của vật thể mà không đòi hỏi vị trí vật thể trên quỹ đạo này tại thời điểm cụ thể.

Bắt đầu từ phương trình Newton (2.40) và cố gắng khử thời gian bằng cách dùng phương trình mô men động lượng (2.41). Trong khi làm điều này dùng biến mới

$$u = 1/r. \tag{2.48}$$

Bằng quy tắc đạo hàm hàm hợp,

$$\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -(r^2\dot{\theta})\frac{du}{d\theta}$$

rồi dùng phương trình mô men động lượng (2.41), cho

$$\dot{r} = -L\frac{du}{d\theta}. \tag{2.49}$$

Đạo hàm cấp hai đối với t cho

$$\ddot{r} = -L\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}\right) = -L\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dt} = -L^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}. \tag{2.50}$$

Số hạng $r\dot{\theta}^2 = L^2u^3$ nên phương trình Newton (2.40) được biến đổi thành

$$-L^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - L^2u^3 = f(1/u),$$

hay

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{f(1/u)}{L^2u^2}. \tag{2.51}$$

Đây là phương trình quỹ đạo. Nghiệm của nó là phương trình trong tọa độ cực của quỹ đạo mà vật thực hiện dưới trường lực $\mathbf{F} = mf(r)\hat{\mathbf{r}}$.

Mặc dù vế trái của phương trình (2.51), phương trình quỹ đạo là không tuyến tính. Điều này là do vế phải là hàm của u, biến phụ thuộc. Chỉ với các quy luật nghịch đảo bình phương và nghịch đảo lũy thừa ba phương trình quỹ đạo mới có dạng tuyến tính. May mắn, quy luật nghịch đảo bình phương lại là trường hợp quan trọng nhất.

Các điều kiện đầu của phương trình quỹ đạo

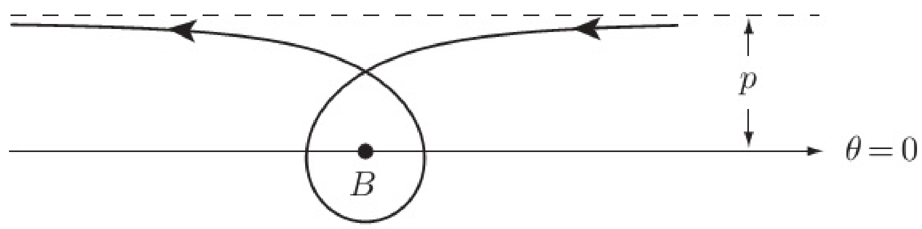
Các điều kiện đầu thích hợp cho phương trình quỹ đạo được cung cấp bởi giá trị của u và $du/d\theta$ khi $\theta = 0$ chẳng hạn. Vì $u = 1/r$, giá trị đầu của u được cho trước trực tiếp bởi dữ liệu đầu. Giá trị của $du/d\theta$ không được cho trực tiếp nhưng có thể suy ra từ phương trình (2.49) ở dạng

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{\dot{r}}{L}. \tag{2.52}$$

trong đó $\dot{r}$ và L nhận được từ dữ liệu đầu.

Thí dụ 2.2. [Phương trình quỹ đạo cho luật nghịch đảo bậc ba] Các động cơ của phi thuyền Enterprise đã thất bại và con tàu đang chuyển động trên một đường thẳng với tốc độ V. Phi hành đoàn tính toán rằng tiến trình hiện tại của họ sẽ chệch hướng khỏi hành tinh B-Zar một khoảng cách p. Tuy nhiên, B-Zar được biết gây ra lực

$$\mathbf{F} = -\frac{m\gamma}{r^3}\hat{\mathbf{r}}$$



Hình 2.9: Quỹ đạo của Enterprise quanh hành tinh B-Zar (B).

trên bất kỳ khối lượng m nào trong lân cận của nó. Một phép đo hằng số γ cho

$$\gamma = \frac{8p^2V^2}{9}.$$

Chứng tỏ rằng phi hành đoàn của Enterprise will có một chuyến du lịch miễn phí quanh B–Zar trước khi tiếp tục theo quỹ đạo gốc của họ. Khoảng cách tại điểm gần nhất và tốc độ của Enterprise tại thời điểm đó là bao nhiêu?

Giải

Với quy luật của lực cho trước $f(r) = -\gamma/r^3$ để cho $f(1/u) = -\gamma u^3$. Cũng vậy, từ điều kiện đầu $L = pV$. Phương trình quỹ đạo là

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\gamma u^3}{p^2V^2u^2},$$

đơn giản

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{u}{9} = 0,$$

bằng cách dùng giá trị của γ. Nghiệm tổng quát của phương trình này là

$$u = A\cos(\theta/3) + B\sin(\theta/3).$$

Bây giờ xác định các hằng số A và B từ các điều kiện đầu. Lấy đường thẳng đầu $\theta = 0$ như hình 2.9. Thì:

(i) Điều kiện đầu $r = \infty$ khi $\theta = 0$ ngụ ý rằng $u = 0$ khi $\theta = 0$. Nó cho $A = 0$.

(ii) Điều kiện đầu trên $du/d\theta$ được cho bởi (2.52)

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{\dot{r}}{L} = -\left(\frac{-V}{pV}\right) = \frac{1}{p}$$

khi $\theta = 0$. Điều này cho $B = 3/p$.

Vậy nghiệm là

$$u = \frac{3}{p}\sin(\theta/3),$$

nghĩa là

$$r = \frac{p}{3\sin(\theta/3)}.$$

Đây là phương trình quỹ đạo trong tọa độ cực của Enterprise, được chỉ ra trong hình 2.9. Enterprise lùi xa ra vô hạn khi $\sin(\theta/3) = 0$ một lần nữa nghĩa là khi $\theta = 3\pi$. Như vậy Enterprise tạo một vòng quanh B-Zar trước khi tiếp tục như trước đó. Khoảng cách điểm gần nhất là $p/3$ và nhận được khi $\theta = 3\pi/2$. Bởi sự bảo toàn mô men động lượng, tốc độ của Enterprise tại thời điểm đó là $3V$.

◇

2.3.4 Các quỹ đạo gần tròn

Mặc dù phương trình quỹ đạo không thể giải chính xác với hầu hết các quy luật của lực, nó có thể nhận được nghiệm xấp xỉ khi vật thể bị nhiễu một chút khỏi quỹ đạo đã biết. Đặc biệt, điều này luôn luôn có thể thực hiện được khi quỹ đạo không bị nhiễu là vòng tròn tâm O.

Giả sử rằng một điểm P di chuyển trên quỹ đạo tròn bán kính a dưới lực hấp dẫn $f(r)$ trên đơn vị khối lượng. Điều này chỉ có thể nếu tốc độ v của nó thỏa $v^2/a = f(a)$, trong trường hợp mà mô men động lượng L được cho bởi $L^2 = a^3 f(a)$. Bây giờ giả sử P bị nhiễu nhẹ bởi một xung xuyên tâm nhỏ. Mô men động lượng không thay đổi nhưng P bây giờ di chuyển dọc theo một quỹ đạo mới nào đó

$$u = \frac{1}{a}(1+\xi(\theta)),$$

trong đó ξ là nhiễu bé. Theo ξ, phương trình quỹ đạo trở thành

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + 1 + \xi = \frac{(1+\xi)^{-2}}{f(a)} f\left(\frac{a}{1+\xi}\right).$$

Phương trình chính xác cho ξ là phi tuyến, nhưng bây giờ ta sẽ xấp xỉ nó bằng cách khai triển vế phải thành các lũy thừa của ξ. Bằng cách khai triển hàm $f(r)$ thành chuỗi Taylor quanh điểm $r = a$ ta nhận được

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a}{1+\xi}\right) &= f\left(a - \frac{a\xi}{1+\xi}\right) \\ &= f(a) - \left(\frac{a\xi}{1+\xi}\right) f'(a) + O\left(\frac{a\xi}{1+\xi}\right)^2 \\ &= f(a) - af'(a)\xi + O(\xi^2), \end{aligned}$$

và khai triển nhị thức cho

$$(1-\xi)^{-2} = 1 - 2\xi + O(\xi^2).$$

Tổ hợp các kết quả này lại với nhau, khử các số hạng hằng ta nhận được

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \left(3 + \frac{af'(a)}{f(a)}\right)\xi = 0, \tag{2.53}$$

bỏ qua số hạng cấp $O(\xi^2)$. Đây là phương trình tuyến tính xấp xỉ được thỏa bởi nhiễu $\xi(\theta)$.

Dáng điệu tổng quát của các nghiệm phương trình (2.53) phụ thuộc vào *dấu* của hệ số của ξ.

(i) Nếu

$$3 + \frac{af'(a)}{f(a)} < 0, \tag{2.54}$$

thì nghiệm là tổ hợp tuyến tính của các số mũ thực, một trong chúng có số mũ dương. Trong trường hợp này, nghiệm xi sẽ không còn nhỏ, mâu thuẫn với giả thiết. Kết luận là quỹ đạo tròn gốc là *không ổn định*.

(ii) Nếu

$$\Omega^2 \equiv 3 + \frac{af'(a)}{f(a)} > 0, \tag{2.55}$$

thì nghiệm là tổ hợp tuyến tính của sin và cos thực, chúng vẫn giữ bị chặn. Kết luận là quỹ đạo tròn gốc là *ổn định* (ít ra là xung xuyên tâm nhỏ).

Sự khép kín của quỹ đạo nhiễu

Từ bây giờ ta sẽ giả định rằng điều kiện ổn định (2.55) được thỏa. Nghiệm tổng quát của phương trình (2.53) có dạng

$$\xi = A\cos\Omega\theta + B\sin\Omega\theta.$$

Ta thấy rằng quỹ đạo nhiễu sẽ tự đóng sau một chu kỳ nếu Ω là một số nguyên dương. Khi quy luật của lực là lũy thừa

$$f(r) = kr^{\nu},$$

quỹ đạo nhiễu sẽ ổn định với $\nu > -3$ và sẽ tự khép kín sau một chu kỳ nếu

$$\nu = m^2 - 3,$$

trong đó m là số nguyên dương. Trường hợp $m = 1$ tương ứng với hấp dẫn nghịch đảo bình phương và $m = 2$ tương ứng với hấp dẫn điều hòa đơn giản. Các số mũ $\nu = 6, 13, \ldots$ cũng được tiên đoán cho quỹ đạo khép kín. Nên nhớ rằng mặc dù đây chỉ là những dự đoán của lý thuyết tuyến tính hóa gần đúng. Có thể (nhưng không đẹp) cải thiện xấp xỉ tuyến tính bằng cách bao gồm số hạng bình phương theo ξ. Kết quả của lý thuyết tinh tế này là các lũy thừa $\nu = -2$ và $\nu = 1$ vẫn cho quỹ đạo khép kín, nhưng các lũy thừa $\nu = 6, 13, \ldots$ thì không. Điều này chứng tỏ rằng các quy luật lũy thừa với $\nu = 6, 13, \ldots$ không cho quỹ đạo nhiễu khép kín sau một chu kỳ, nhưng các trường hợp $\nu = -2$ và $nu = 1$ vẫn không là quyết định cuối cùng. Không cần phải thực hiện thủ tục xấp xỉ thêm nữa tất cả các quỹ đạo tương ứng với cả hấp dẫn nghịch đảo bình phương và hấp dẫn điều hòa đơn giản có thể được tính toán chính xác. Ta thấy rằng, với hai quy luật của lực này, *mọi quỹ đạo bị chặn khép kín sau một chu kỳ.* Vẫn còn có khả năng các quỹ đạo nhiễu loạn có thể khép kín sau hơn một chu kỳ, nhưng phân tích tương tự chứng tỏ rằng điều này không xảy ra. Vì vậy chúng ta đã chứng tỏ rằng chỉ các quy luật lũy thừa với nó mọi quỹ đạo bị chặn là khép kín là quy luật điều hòa đơn giản và nghịch đảo bình phương. Kết quả này thực sự đúng với mọi trường xuyên tâm (không chỉ cho luật lũy thừa) và được biết như là định lý Bertrand.

Tiến động của điểm cận nhật của sao Thủy (Mercury)

Thực tế là quy luật nghịch đảo bình phương dẫn đến các quỹ đạo khép kín, trong khi các quy luật rất tương tự thì không, cung cấp một thử nghiệm cực kỳ nhạy cảm của luật hấp dẫn. Giả sử chẳng hạn lực hấp dẫn gây ra bởi hành tinh là

$$f(r) = \frac{\gamma}{r^{2+\epsilon}}$$

(trên đơn vị khối lượng), trong đó $\gamma > 0$ và $|\epsilon|$ là nhỏ. Thì giá trị Ω cho một quỹ đạo gần tròn là

$$\Omega = (1-\epsilon)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}\epsilon + O(\epsilon^2).$$

Quỹ đạo nhiễu này thì không khép kín nhưng có góc cùng điểm α, trong đó

$$\alpha = \frac{\pi}{\Omega} = \frac{\pi}{1 - \frac{1}{2}\epsilon + O(\epsilon^2)} = \pi\left(1 + \frac{1}{2}\epsilon\right) + O(\epsilon^2).$$

Do đó điểm cận nhật tiếp theo của hành tinh này sẽ không xảy ra tại cùng một điểm, nhưng điểm cận nhật sẽ tăng lê "mỗi năm" một góc nhỏ $\pi\epsilon$. Vị trí của điểm cận nhật của một hành tinh có thể đo với sự chính xác cao. Với sao Thủy nó được tìm thấy (sau khi đã loại tất cả các nhiễu loạn đã biết) rằng điểm cận nhật tăng thêm bởi 43 (± 0.5) giây của cung trên thế kỷ, hay 5×10^{-7} radian trên chu kỳ. Điều này tương ứng với $\epsilon = 1.6 \times 10^{-7}$ và một lũy thừa của -2.00000016 thay vì -2. Mặc dù sự khác biệt với luật nghịch đảo bình phương rất nhỏ dường như, nó là lớn hơn đáng kể so với các lỗi trong quan sát. Vấn đề này đã được giải quyết bởi lý thuyết tương đối rộng, do Einstein công bố năm 1915. Einstein chứng tỏ rằng một trong những hệ quả của lý thuyết của ông quỹ đạo hành tinh nên tiến động một chút và rằng, trong trường hợp sao Thủy, tốc độ của tiến động nên là 43 giây của cung trên thế kỷ!

2.3.5 Trường hấp dẫn nghịch đảo bình phương

Vì nhiều ứng dụng của nó cho thiên văn học, trường hấp dẫn nghịch đảo bình phương là trường lực quan trọng nhất trong lý thuyết về quỹ đạo. Các trường lực tương tự cũng xuất hiện trong hạt tán xạ khi hai hạt mang điện trái dấu. Vì tính chất quan trọng này, ta sẽ xử lý các trường nghịch đảo bình phương chi tiết hơn.

Quỹ đạo

Giả sử $f(r) = -\gamma/r^2$ trong đó $\gamma > 0$. Thì $f(1/u) = -\gamma u^2$ và phương trình quỹ đạo thành

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\gamma}{L^2},$$

trong đó L là mô men động lượng của quỹ đạo. Phương trình này có dạng phương trình chuyển động điều hòa đơn giản với một hằng số bên vế phải. Nghiệm tổng quát là

$$u = A\cos\theta + B\sin\theta + \frac{\gamma}{L^2},$$

mà có thể viết ở dạng

$$\frac{1}{r} = \frac{\gamma}{L^2}(1 + e\cos(\theta - \alpha)).$$

trong đó e, α là hằng số với $e > 0$. Đây là phương trình trong tọa độ cực của một cô nic với độ lệch tâm e và một tiêu điểm đặt tại O; α là góc giữa trục chính của cô nic và đường thẳng đầu $\theta = 0$. Nếu $e < 1$, thì cô nic là một elip; nếu $e = 1$ thì cô nic là một parabol; và khi $e > 1$ thì cô nic là một nhánh của hyperpol.

Định luật thứ nhất của Keppler

Theo các bàn luận ở trên chỉ có các quỹ đạo bị chặn trong trường hấp dẫn nghịch đảo bình phương là elip với một tiêu điểm tại tâm của lực. Đây là định luật thứ nhất của Keppler, mà vì vậy là một hệ quả của sự hấp dẫn nghịch đảo bình phương của Mặt trời. Nó không đúng với các quy luật khác của lực.

L-công thức và E-công thức

Bằng cách so sánh công thức quỹ đạo (2.3.5) với dạng chuẩn của elip ta thấy rằng mô men động lượng L của quỹ đạo được liên hệ với các tham số cô nic a, b bởi công thức

$$\frac{\gamma}{L^2} = \frac{a}{b^2},$$

nghĩa là

$$L^2 = \gamma b^2/a. \tag{2.56}$$

Đây là L-công thức. Nó áp dụng cho cả quỹ đạo elip lẫn hyperbol. Nó là một trong hai công thức quan trọng liên hệ L, E, các hằng số động lực của chuyển động, với các tham số cô nic của quỹ đạo.

Công thức thứ hai bao gồm năng lượng E. Tại điểm gần nhất $r = c$,

$$E = \frac{1}{2}V^2 - \frac{\gamma}{c},$$

trong đó V là tốc độ của P khi $r = c$. Vì P di chuyển ngang tại điểm tiếp cận gần nhất, ta suy ra $cV = L$, để mà E có thể viết

$$E = \frac{L^2}{2c^2} - \frac{\gamma}{c} = \frac{\gamma b^2}{ac^2} - \frac{\gamma}{c}$$

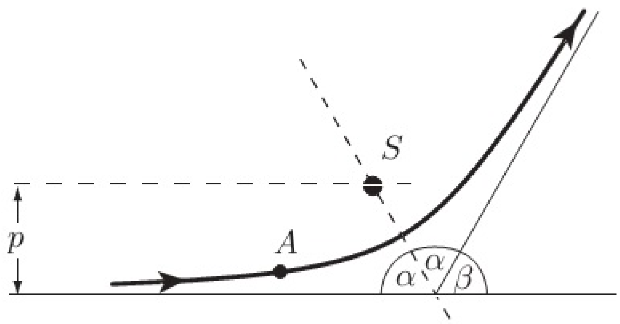
bằng cách dùng L-công thức.

Từ điểm này, các loại khác nhau của cô nic phải được đối xử cách tách biệt. Khi quỹ đạo là một elip, $c = a(1-e)$, trong đó e là độ lệch tâm, và a, b và e được liên hệ bởi công thức

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}.$$

Thì E có thể viết

$$\begin{aligned} E &= \frac{\gamma a^2(1-e^2)}{2a^3(1-e)^2} - \frac{\gamma}{a(1-e)} \\ &= -\frac{\gamma}{2a}. \end{aligned}$$



Hình 2.10: Hành tinh A di chuyển trên hyperbol quanh Mặt trời S như một tiêu điểm và bị lệch góc β.

Vậy năng lượng toàn phần E được nối trực tiếp với a, bán trục chính của quỹ đạo elip. Các quỹ đao parabol và hyperbol được đối xử tương tự và kết quả đầy đủ được gọi là E-công thức

$$\begin{array}{lll} \text{Elip:} & E < 0 & E = -\dfrac{\gamma}{2a} \\ \text{Parabol:} & E = 0 & \\ \text{Hyperbol:} & E > 0 & E = +\dfrac{\gamma}{2a} \end{array} \tag{2.57}$$

Thí dụ 2.3 (Hành tinh chệch hướng bởi Mặt trời)**.** Một hành tinh tiếp cận Mặt trời với tốc độ V dọc theo đường thẳng vuông góc với khoảng cách đến Mặt trời p. Tìm góc mà qua đó hành tinh đang chệch hướng với Mặt trời.

Giải

Trong trường hợp này ta có trường hấp dẫn nghịch đảo bình phương với $\gamma = GM_\odot$, trong đó $M_\odot$ là khối lượng của Mặt trời. Vấn đề này có thể được giải quyết từ nguyên lý thứ nhất bằng cách sử dụng phương trình quỹ đạo, nhưng ở đây ta làm tất bằng cách sử dụng các L- và E-công thức.

Từ các điều kiện đầu, $L = pV$ và $E = \frac{1}{2}V^2$. Vì $E > 0$, quỹ đạo là gần nhánh của một hyperbol và L- và E-công thức cho

$$p^2V^2 = \frac{M_\odot G b^2}{a} \quad \text{và} \quad \frac{1}{2}V^2 = +\frac{M_\odot G}{2a}.$$

Suy ra

$$a = \frac{M_\odot G}{V^2}, \quad b = p.$$

Nửa góc α giữa các tiệm cận của hyperbol được cho bởi

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \frac{pV^2}{M_\odot G}.$$

Cho β là góc mà hành tinh bị lệch. Thì $\beta = \pi - 2\alpha$ và

$$\tan(\beta/2) = \tan(\pi/2 - \alpha) = \cot\alpha = \frac{M_\odot G}{pV^2}.$$

◇

Chu kỳ của quỹ đạo elip

Quy luật của lực bất kể là gì, ngay khi quỹ đạo của P được tìm thấy, quá trình của P dọc theo quỹ đạo có thể được dẫn ra từ phương trình mô men động lượng

$$r^2\dot{\theta} = L.$$

Nếu ta lấy $\theta = 0$ khi $t = 0$, thì thời gian t để cho P đến điểm trên quỹ đạo với tọa độ cực r, θ được cho bởi

$$t = \frac{1}{L}\int_0^\theta r^2 d\theta, \tag{2.58}$$

trong đó $r = r(\theta)$ là phương trình của quỹ đạo. Đặc biệt thì, chu kỳ τ của quỹ đạo elip được cho bởi

$$\tau = \frac{1}{L}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta,$$

trong đó quỹ đạo $r = r(\theta)$ được cho bởi

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{b^2}(1 + e\cos\theta). \tag{2.59}$$

May mắn không có nhu cầu phải đánh giá tích phân trên vì với quỹ đạo bất kỳ sau một vòng,

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta = A,$$

trong đó A là diện tích miền giới hạn bởi quỹ đạo khép kín. Với quỹ đạo elip, $A = \pi ab$ vì vậy

$$\tau = \frac{2\pi ab}{L},$$

và bằng cách dùng L-công thức, chu kỳ quỹ đạo elip được cho bởi:

$$\tau = 2\pi\left(\frac{a^3}{\gamma}\right)^{1/2}. \tag{2.60}$$

Định luật thứ ba của Keppler

Trong trường hợp quỹ đạo hành tinh, $\gamma = M_\odot G$, trong đó $M_\odot$ là khối lượng của Mặt trời. Phương trình (2.60) có thể viết lại

$$\tau^2 = \left(\frac{4\pi^2}{M_\odot G}\right) a^3. \tag{2.61}$$

Đây là định luật thứ ba của Keppler, mà vì vậy nó là hệ quả của luật nghịch đảo bình phương lực hấp dẫn của Mặt trời và nó không đúng với các quy luật khác của lực.

Khối lượng các thiên thể

Ngay khi hằng số hấp dẫn G được biết, công thức (2.61) cung cấp một cách chính xác để tìm khối lượng của Mặt trời. Cùng một phương pháp áp dụng cho bất kỳ thiên thể nào mà có một vệ tinh. Điều cần làm là đo trục chính $2a$ và chu kỳ của quỹ đạo vệ tinh.

Thí dụ 2.4 (Khối lượng của sao Mộc (Jupiter))**.** Mặt trăng di chuyển trên quỹ đạo gần tròn bán kính 384.000 km và chu kỳ $27,32$ ngày. Callisto, mặt trăng thứ tư của sao Mộc, di chuyển trên quỹ đạo gần tròn bán kính1.883.000 km và chu kỳ $16,69$ ngày. Ước lượng khối lượng của sao Mộc như là bội của khối lượng Trái đất.

Đáp số $M_J = 316 M_E$.

◇

Đơn vị thiên văn

Với các bài toán thiên văn, thật hữu ích khi viết phương trình chu kỳ (2.61) theo đơn vị thiên văn. Trong đơn vị này, đơn vị của khối lượng là khối lượng của Mặt trời ($M_\odot$), đơn vị của độ dài (AU) là bán trục lớn của quỹ đạo Trái đất, và đơn vị của thời gian là năm (Trái đất). Bằng cách thay thế dữ liệu cho Trái đất và Mặt trời vào phương trình (2.61), ta thấy rằng $G = 4\pi^2$ trong đơn vị thiên văn. Suy ra, trong đơn vị thiên văn công thức chu kỳ trở thành

$$\tau^2 = \frac{a^3}{M}.$$

Thí dụ 2.5 (Trục lớn của quỹ đạo của sao Diêm vương (Pluto))**.** Chu kỳ của sao Diêm vương là 248 năm. Bán trục lớn của quỹ đạo của nó?

ĐS. $39,5$ AU.

◇

Hình 2.11: Các hành tinh trong Thái dương hệ (tính từ Mặt trời ra): Mercury, Venus, Earth, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, and Neptune.

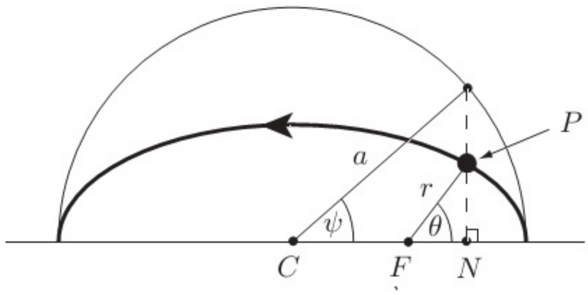
Theo hình 2.11 Pluto không được xem như hành tinh và như vậy Thái dương hệ chỉ có 8 hành tinh không kể Mặt trời. Điều này có nghĩa là Pluto, cái được xem là hành tinh xa nhất được phát hiện năm 1930, bây giờ được xem như là một sao lùn (dwarf planet). Sự thay đổi trong định nghĩa đến sau khi phát hiện ra ba vật thể tương tự như Pluto về kích thước và quỹ đạo, (Quaoar vào năm 2002, Sedna vào năm 2003, và Eris vào năm 2005). Với những tiến bộ về trang thiết bị và kỹ thuật, các nhà thiên văn biết rằng còn nhiều vật thể giống như Pluto sẽ được phát hiện, và như vậy số các hành tinh trong Thái dương hệ sẽ gia tăng nhanh chóng. Vì vậy việc loại Pluto ra khỏi danh sách hành tinh là có lý do.

Sự phụ thuộc thời gian của chuyển động - Phương trình Kepler

Công thức (2.58) có thể được sử dụng để tìm thấy phải mất bao lâu để P tiến tới một điểm chung của quỹ đạo. Tuy nhiên, dù tích phân đối với θ có thể được thực hiện ở dạng đóng, nó rất phức tạp. Để có được một công thức có thể quản lý được, ta phải đổi biến cách khôn ngoan, thay góc cực θ bằng *góc lệch tâm* (eccentric angle) ψ. Quan hệ giữa các góc này được chỉ ra trong hình 2.12. Vì $CN = CF + FN$, nên

$$a\cos\psi = ae + r\cos\theta,$$

và bằng cách dùng phương trình trong tọa độ cực cho elip (2.59) cùng với



Hình 2.12: Góc lệch tâm ψ tương ứng với góc cực θ.

công thức $b^2 = a^2(1 - e^2)$, liên hệ giữa ψ và θ có thể được viết ở dạng đối xứng

$$(1 - e\cos\psi)(1 + e\cos\theta) = \frac{b^2}{a^2}. \tag{2.62}$$

Lấy đạo hàm ẩn phương trình (2.62) đối với ψ ta được

$$\frac{d\theta}{d\psi} = \frac{b}{a(1 - e\cos\psi)}, \tag{2.63}$$

sau một số tính toán.

Bây giờ dùng phép đổi biến từ θ sang ψ. Từ (2.58) và (2.59)

$$\begin{aligned} t &= \frac{b^4}{a^2 L}\int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + e\cos\theta)^2} \\ &= \frac{b^4}{a^2 L}\int_0^\psi \frac{1}{(1 + e\cos\theta)^2}\frac{d\theta}{d\psi}d\psi \\ &= \frac{ab}{L}\int_0^\psi (1 - e\cos\psi)d\psi \\ &= \frac{ab}{L}(\psi - e\sin\psi), \end{aligned}$$

bằng cách dùng (2.62), (2.63). Cuối cùng, bằng cách dùng L-công thức $L^2 = \gamma b^2/a$, ta nhận được

$$t = \frac{\tau}{2\pi}(\psi - e\sin\psi), \tag{2.64}$$

trong đó τ (cho bởi (2.60)) là chu kỳ của quỹ đạo. Phương trình (2.64) gọi là phương trình Keppler, cho thời gian như là hàm của vị trí trên quỹ đạo elip.

Nếu cần tính của vật trên quỹ đạo sau một thời gian cho trước, thì phương trình (2.64) phải được giải số với góc lệch tâm ψ. Giá trị tương ứng của θ được cho bởi phương trình (2.62) và giá trị r bởi phương trình (2.59), xem (2.62), có thể viết dưới dạng

$$r = a(1 - e\cos\psi). \tag{2.65}$$

Sự cần thiết giải phương trình Keppler cho ẩn ψ là một kích thích chính trong sự phát triển các phương pháp số tìm nghiệm của phương trình.

Thí dụ 2.6. Một vật thể di động theo trường hấp dẫn nghịch đảo bình phương, chuyển động trên quỹ đạo elip với độ lệch tâm e và chu kỳ τ. Tìm thời gian để vật đi được một nửa quỹ đạo mà ở gần tâm của lực.

Giải

Một nửa của quỹ đạo gần tâm của lực tương ứng với phạm vi $-\pi/2 \le \psi \le \pi/2$. Thời gian cần là

$$\frac{\tau}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - e\right) = \tau\left(\frac{1}{2} - \frac{e}{\pi}\right).$$

Chẳng hạn, sao chổi Halley di chuyển trên một quỹ đạo elip mà độ lệch tâm của nó hầu như bằng đơn vị. Vì vậy nó dành chỉ khoảng 18% của thời gian của nó trên nửa quỹ đạo gần Mặt trời.

◇

2.4 Động lực học của vật quay quanh điểm cố định

Nhắc lại rằng, với cách chọn các góc Euler, ta có công thức biểu diễn vectơ quay

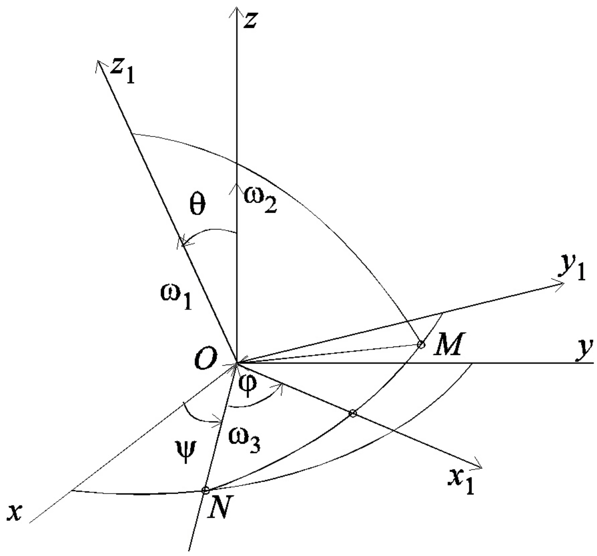
$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\mathbf{k} + \dot{\theta}\mathbf{u} + \dot{\varphi}\mathbf{k}_1. \tag{2.66}$$

2.4.1 Phương trình động lực học Euler

Áp dụng định lý động lượng và mô men động lượng cho vật có một điểm cố định, ta được

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\mathbf{w}_C = \mathbf{R} + \mathbf{N}, \tag{2.67}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}, \tag{2.68}$$



Hình 2.13: Góc Euler.

trong đó **P** là động lượng của vật, **L** là mô men động lượng của vật đối với O (điểm cố định), M là khối lượng của vật, $\mathbf{w}_C$ là gia tốc của khối tâm, **R** là vectơ chính của các lực chủ động đặt vào vật, **N** là phản lực của điểm cố định. **M** là mô men của các lực chủ động đối với điểm ấy. Phản lực **N** không tạo thành mô men đối với điểm O nên không có mặt trong phương trình (2.68). Để thiết lập hệ phương trình xác định chuyển động của vật rắn quanh điểm cố định ta làm như sau.

Biểu thị mô men động lượng **L** qua các góc Euler và đạo hàm của chúng, rồi chiếu các vectơ của phương trình (2.68) lên các trục tọa độ, ta sẽ được 3 phương trình vi phân cấp hai đối với các góc Euler, φ, ψ, θ, cùng với các điều kiện đầu, đủ để xác định chúng như là các hàm của thời gian. Vậy, phương trình (2.68) là phương trình vi phân vectơ xác định chuyển động của vật rắn quanh điểm cố định. Sau khi tích phân phương trình (2.68), ta tính gia tốc khối tâm C của nó và khi đó, từ phương trình (2.67) ta tìm được phản lực **N** chưa biết.

Chọn hệ tọa độ đặc biệt gắn với vật

Trước đây, ta đã tìm được biểu thức của vectơ quay $\boldsymbol{\omega}$, (2.66), và các hình chiếu của chúng trên các trục của hệ tọa độ cố định và hệ tọa độ động (bài tập 1.24). Từ đó hình chiếu của vectơ mô men động lượng **L** suy ra hình chiếu của mô men động lượng của vật trên các trục của hệ tọa độ cố định và hệ tọa độ động. Nếu chọn hệ trục trục cố định $Oxyz$ thì, do chuyển động, vật sẽ chiếm những vị trí khác nhau đối với các trục của hệ tọa độ ấy, và các mô men quán tính của nó đối với các trục ấy sẽ thay đổi. Nếu chọn các trục của hệ tọa độ động $Ox_1y_1z_1$ gắn với vật làm hệ trục tọa độ thì các mô men quán tính sẽ không đổi và có thể tính trước được chúng. Điều này làm cho việc nghiên cứu được đơn giản đi nhiều vì vậy người ta thường dùng hệ tọa độ này. Vì vị trí của các trục x_1, y_1, z_1 có thể lấy tùy ý nên ta sẽ chọn chúng là các trục quán tính chính của vật. Điều này lại làm vấn đề được đơn giản hóa đi nữa vì các mô men quán tính ly tâm bằng không và biểu thức của hình chiếu mô men động lượng **L** được rút gọn đáng kể. Cụ thể là

$$L_{x_1} = J_{x_1}\omega_{x_1} = Ap_1, \quad L_{y_1} = J_{y_1}\omega_{y_1} = Bq_1, \quad L_{z_1} = J_{z_1}\omega_{z_1} = Cr_1, \quad (2.69)$$

trong đó $A = J_{x_1}, B = J_{y_1}, C = J_{z_1}$ là các mô men quán tính đối với các trục chính; p_1, q_1, r_1 là hình chiếu của vectơ quay lên các trục đó.

Phương trình chuyển động của vật trong hệ tọa độ động

Chọn hệ tọa độ di động có các trục hướng theo các trục quán tính chính của vật tại điểm O là hệ tọa độ khi nghiên cứu. Theo định lý Rêdan thứ hai ta có thể viết (2.68) dưới dạng

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{M},$$

trong đó $\mathbf{u}_a$ là vận tốc tuyệt đối của ngọn vectơ mô men động. Nhưng theo công thức cộng vận tốc

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_e,$$

trong đó $\mathbf{u}_r$ và $\mathbf{u}_e$ là vận tốc tương đối và kéo theo của ngọn vectơ mô men động lượng. Vì $\mathbf{u}_e$ là vận tốc của điểm của vật rắn trùng với ngọn của vectơ **L** nên

$$\mathbf{u}_e = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}.$$

Từ đây, suy ra định lý về mô men động lượng viết trong hệ tọa độ động x_1, y_1, z_1 theo công thức Rêdan có dạng

$$\mathbf{u}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{M}. \quad (2.70)$$

Các phương trình động lực học Euler

Chiếu đẳng thức vectơ (2.70) lên các trục của hệ động ta được

$$\begin{aligned}
\frac{dL_{x_1}}{dt} + \omega_{y_1}L_{z_1} - \omega_{z_1}L_{y_1} &= M_{x_1},\\
\frac{dL_{y_1}}{dt} + \omega_{z_1}L_{x_1} - \omega_{x_1}L_{z_1} &= M_{y_1},\\
\frac{dL_{y_1}}{dt} + \omega_{x_1}L_{y_1} - \omega_{y_1}L_{x_1} &= M_{z_1},
\end{aligned}$$

Thay các biểu thức (2.69) của $L_{x_1}, L_{y_1}, L_{z_1}$, chú ý rằng các mô men quán tính A, B, C là hằng số, ta được

$$\begin{aligned} A\frac{dp_1}{dt} + (C-B)q_1r_1 &= M_{x_1}, \\ B\frac{dq_1}{dt} + (A-C)r_1p_1 &= M_{y_1}, \\ C\frac{dr_1}{dt} + (B-A)p_1q_1 &= M_{z_1}. \end{aligned} \tag{2.71}$$

Các phương trình này được gọi là các phương trình động lực học Euler. Chúng là hệ gồm 3 phương trình vi phân cấp 1 đối với các hình chiếu p_1, q_1, r_1 của vectơ vận tốc góc tức thời. Cùng với các biểu thức động học Euler (1.52) của p_1, q_1, r_1 ta có hệ gồm 6 phương trình vi phân cấp 1 đối với $p_1, q_1, r_1, \varphi, \psi, \theta$. Nếu thay các biểu thức động học Euler (1.52) vào hệ phương trình (2.71) ta được hệ gồm 3 phương trình vi phân phi tuyến đối với các góc φ, ψ, θ. Tuy nhiên, những phương trình thu được sẽ rất phức tạp nên làm như thế không lợi.

Bài toán thuận và bài toán ngược

Nếu cho trước các lực tác dụng lên vật và tìm chuyển động của nó thì, trong trường hợp tổng quát, các mô men $M_{x_1}, M_{y_1}, M_{z_1}$ là hàm của thời gian t, các góc Euler φ, ψ, θ và đạo hàm của chúng theo thời gian. Lấy tích phân hệ ta có thể tìm được sự phụ thuộc của góc Euler vào thời gian và 6 hằng số tích phân tùy ý xác định bởi các điều kiện đầu. Thường điều kiện đầu được cho bởi

$$\begin{aligned} \varphi(0) = \varphi_0, \quad \psi(0) = \psi_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \\ \dot\varphi(0) = \varphi_1, \quad \dot\psi(0) = \psi_1, \quad \dot\theta(0) = \theta_1. \end{aligned}$$

Bài toán ngược - Tìm các lực gây ra chuyển động khi đã biết luật chuyển động. Trong trường hợp đó cần thay các hàm φ, ψ, θ đã biết vào các phương trình động học Euler để tìm p_1, q_1, r_1. Sau đó, thay kết quả vừa tìm vào các phương trình động lực học Euler để tìm các mô men chưa biết của các ngoại lực $M_{x_1}, M_{y_1}, M_{z_1}$.

2.4.2 Lý thuyết gần đúng về con quay hồi chuyển

Ta gọi *con quay hồi chuyển đối xứng* là vật rắn thỏa:

(i) vật có một điểm cố định (O),

(ii) đường thẳng qua khối tâm của vật và qua điểm cố định là trục quán tính chính,

(iii) các mô men quán tính đối với hai trục chính khác đi qua O thì bằng nhau.
Ta thấy các vật tròn xoay đồng nhất có một điểm cố định trên trục đối xứng thỏa những điều kiện đã nêu.

Việc nghiên cứu chuyển động con quay hồi chuyển đối xứng trên cơ sở các phương trình Euler rất phức tạp. Dưới đây ta xét lý thuyết sơ cấp về con quay hồi chuyển, trong đó chỉ cần vận dụng định lý biến thiên mô men động lượng.

Ta xét một vật tròn xoay đồng nhất quay quanh trục đối xứng cố định của nó. Lấy trên trục quay điểm O bất kỳ và hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho trục z trùng với trục đối xứng của vật. Khi đó

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_O &= (\omega_x J_x - \omega_y J_{xy} - \omega_z J_{xz})\mathbf{i} + (-\omega_x J_{xy} + \omega_y J_y - \omega_z J_{yz})\mathbf{j} \\ &\quad + (-\omega_x J_{xz} - \omega_y J_{yz} + \omega_z J_z)\mathbf{k},\end{aligned}$$

trong đó $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ là các hình chiếu của vectơ vận tốc góc $\boldsymbol{\omega}$ lên các trục tọa độ; J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} là các mô men quán tính trục và ly tâm của vật. Vì vật có trục đối xứng, trục z, nên các mô men quán tính ly tâm $J_{zx} = J_{yz} = 0$. Do đó

$$\mathbf{L}_O = J_z \boldsymbol{\omega}.$$

Con quay hồi chuyển

Vật có trục vật chất đối xứng và có vận tốc góc, ω_1 lớn quay quanh trục đó được gọi là *con quay hồi chuyển.*

Giả thiết cơ bản của lý thuyết sơ cấp về con quay hồi chuyển

Giả sử con quay hồi chuyển thực hiện một chuyển động phức tạp: vừa quay quanh trục đối xứng của nó với vận tốc góc $\boldsymbol{\omega}_1$, vừa cùng với trục đó quay quanh một trục cố định với vận tốc góc $\boldsymbol{\omega}_2$. Ngoài ra, các trục quay tương ứng cắt nhau tại O. Trong lý thyết sơ cấp về con quay hồi chuyển ta coi độ lớn của $\boldsymbol{\omega}_1$ rất lớn so với độ lớn của $\boldsymbol{\omega}_2$ và coi vectơ mô men động lượng $\mathbf{L}_O$ hướng theo trục đối xứng của vật và bằng

$$\mathbf{L}_O = J\boldsymbol{\omega}_1,$$

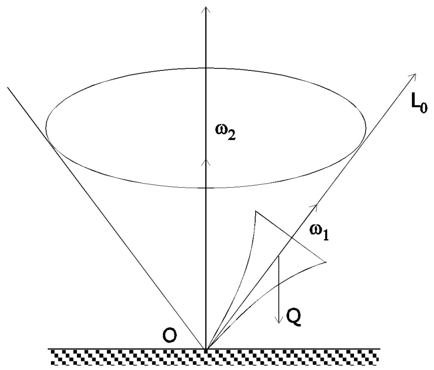
trong đó J là mô men quán tính của vật đối với trục đối xứng của nó.

Phương trình cơ bản của lý thuyết sơ cấp về con quay hồi chuyển

Định lý mô men động lượng theo cách phát biểu của Rêdan:

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$$

trong đó $\mathbf{u}$ là vận tốc đầu mút của vectơ $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ là mô men ngoại lực đối với O. Theo giả thiết cơ bản ở trên, $\mathbf{L}$ hướng theo vectơ $\boldsymbol{\omega}_1$ và sự dịch chuyển



Hình 2.14: Con quay.

của nó trong không gian là chuyển động quay quanh trục cố định với vận tốc góc $\boldsymbol{\omega}_2$. Khi đó

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{L}$$

và bởi vì

$$\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega}_1$$

nên

$$\mathbf{u} = J\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1.$$

Vậy

$$J\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{M}.$$

Hệ thức này là phương trình cơ bản của lý thuyết sơ cấp về con quay hồi chuyển.

Tiến động đều

Giả sử con quay hồi chuyển quay quanh trục đối xứng của nó với vận tốc góc có độ lớn không đổi $\boldsymbol{\omega}_1$ và đồng thời quay quanh một trục với vận tốc góc không đổi $\boldsymbol{\omega}_2$ và góc θ_0 giữa $\boldsymbol{\omega}_1$ và $\boldsymbol{\omega}_2$ là không đổi. Trường hợp này gọi là *tiến động đều của con quay hồi chuyển*. Khi đó ta có

$$|\mathbf{M}| = J\omega_1\omega_2 \sin\theta_0 = const.$$

Vậy mô men $\mathbf{M}$ gây ra tiến động đều có mô đun không đổi và có phương vuông góc với mặt phẳng xác định bởi $(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$.

Con quay

Giả sử con quay hồi chuyển chịu tác dụng của trọng lực $\mathbf{Q}$ đặt ở khối tâm của nó. Ngoài ra nó còn chịu tác dụng của phản lực $\mathbf{N}$ của giá đỡ tại điểm cố định. Góc giữa trục của con quay hồi chuyển và phương thẳng đứng là θ_0. Nếu con quay hồi chuyển không có chuyển động quay riêng quanh trục đối xứng của nó thì dưới tác dụng của trọng lực $\mathbf{Q}$ nó sẽ bị đổ. Thực vậy, mô men của lực $\mathbf{Q}$ đối với điểm O sẽ vuông góc với mặt phẳng xác định bởi $(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$. Mô men của phản lực $\mathbf{N}$ đối với O bằng không. Vậy vận tốc của ngọn vectơ mô men động sẽ luôn luôn vuông góc với các vectơ $(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$. Từ đó suy ra rằng ngọn của vectơ $\mathbf{L}$ sẽ vạch nên một đường tròn có bán kính không đổi và tâm nằm trên trục thẳng đứng. Nhưng vì vectơ $\mathbf{L}$ hướng theo trục xác định bởi vectơ $\boldsymbol{\omega}_1$ nên góc giữa $(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$ sẽ giữ nguyên giá trị không đổi θ_0 trong quá trình chuyển động. Vậy con quay hồi chuyển đang xét sẽ không đổ.

Vì mô men ngoại lực bằng

$$\mathbf{M} = Qa \sin\theta_0,$$

trong đ1o a là khoảng cách từ điểm cố định đến trọng tâm của con quay hồi chuyển và

$$|\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2| = \omega_1\omega_2 \sin\theta_0$$

nên từ phương trình cơ bản của lý thuyết sơ cấp về con quay hồi chuyển ta được

$$Qa \sin\theta_0 = J\omega_1\omega_2 \sin\theta_0,$$

từ đó suy ra

$$\omega_2 = \frac{Qa}{J\omega_1}.$$

Do đó ω_2 (gọi là vận tốc tiến động) sẽ không đổi và càng nhỏ nếu vận tốc quay riêng ω_1 càng lớn. Vậy con quay hồi chuyển quay nhanh có tính ổn định đối với mô men lật của trọng lực.

Bài tập chương 2

Bài tập về bài toán thuận

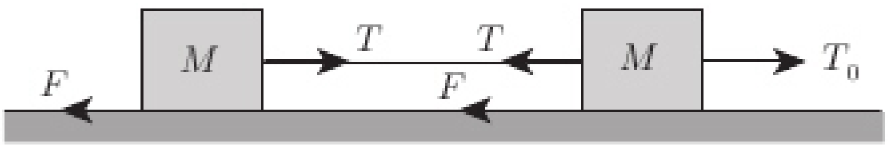
2.1 (Bài tập 1.5, [1]). Một cầu vòm có bán kính cong tại đỉnh A bằng $R = 250\ m$.

a) Hãy tìm áp lực của xe có khối lượng $m = 200\ kg$, đang chuyển động với vận tốc $v = 40\ km/h$, tác dụng lên cầu tại A.

b) Tính vận tốc tối đa của xe để nó vẫn còn bám vào mặt cầu. Lấy $9 = 9,81\ m/s^2$.

2.2 (Bài tập 1.6, [1]). Hai vật khối lượng $m_1 = 2\ kg$, $m_2 = 3\ kg$ nối với nhau bằng dây không giãn, không trọng lượng. Kéo vật m_2 bởi lực 10 N theo phương thẳng đứng. Hãy tính gia tốc các vật và lực căng dây đặt lên m_1, m_2.

2.3. Hai vật giống nhau khối lượng mỗi khối là M, được nối với nhau bằng dây mảnh không giãn và có thể di chuyển trên mặt phẳng nhám nằm ngang (hình 2.15). Hai vật được kéo với tốc độ không đổi theo đường thẳng bằng sợi dây buộc vào một vật. Cho biết sức căng trong dây kéo là T_0, tìm sức căng trong dây nối. Nếu sức căng trong dây nối bất thình lình tăng tới $4T_0$, thì gia tốc tức thời của hai khối và sức căng tức thời trong dây nối bằng bao nhiêu?



Hình 2.15: Bài tập 2.3

Bài tập về phương trình vi phân chuyển động (bài toán ngược)

2.4 (Mục 1.3.2 Chuyển động thẳng, [1]). Xác định chuyển động thẳng của chất điểm dưới tác dụng của lực:
a) Phụ thuộc thời gian $F(t)$;
b) Phụ thuộc vị trí $F(x)$;
c) Phụ thuộc vận tốc $F(\dot{x})$.

2.5 (Mục 1.4.2 Dao động thẳng, [1]). Một vật khối lượng m treo vào đầu một lò xo có độ cứng k.

a) Xác định chuyển động của vật khi lò xo được kéo giãn một đoạn λ và buông ra không vận tốc đầu.

b) Với điều kiện đầu như câu a), tìm chuyển động của vật trong trường hợp vật chịu lực cản của môi trường có độ lớn tỉ lệ với vận tốc $\mu\dot{x}$. Chuyển động của vật sẽ như thế nào nếu vật còn chịu thêm lực kích động tuần hoàn $Q(t) = Q_0 \sin pt$.

2.6. Máy bay bổ nhào thẳng đứng đạt được vận tốc 1000 km/h, sau đó người lái đưa máy bay ra khỏi hướng bổ nhào và vạch thành một cung tròn bán kính $R = 600\ m$ trong mặt phẳng thẳng đứng. Trọng lượng người lái là 800 N. Hỏi người lái đã ép lên ghế ngồi một lực cực đại bằng bao nhiêu.

2.7. Một quả cầu khối lượng m rơi thẳng đứng trong môi trường chất lỏng và chịu lực cản tỉ lệ với vận tốc, $F_C = kv$, k là hệ số cản, gia tốc trọng trường g. Xác định vận tốc, phương trình chuyển động của quả cầu. Giả thiết $v(0) = 0, y(0) = 0$.
H.D. Quả cầu chịu tác dụng của: trọng lực $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, lực cản của môi trường $\mathbf{F}_C = -k\mathbf{v}$ (bỏ qua lực đẩy Archimède). Định luật thứ hai cho

$$m\mathbf{w} = \mathbf{P} + \mathbf{F}_C.$$

Chọn hệ trục độ Oy thẳng đứng hướng lên. Chiếu hệ thức vectơ lên trục Oy, ta được:

$$m\ddot{y} = -mg - k\dot{y} \Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} = -g. \qquad (a)$$

Giải phương trình vi phân (a) - cách 1. Tách biến (xem $\dot{y}$ là ẩn hàm),

$$\frac{d\dot{y}}{\frac{k}{m}\dot{y} + g} = -dt,$$

tích phân hai vế

$$\frac{m}{k}\ln\left|\frac{k}{m}\dot{y} + g\right| = -t + C. \qquad (b)$$

Dùng điều kiện đầu $\dot{y}(0) = 0$, ta được $C = \frac{m}{k}\ln g$; thay vào (b), sau một số biến đổi, ta thu được vận tốc của quả cầu:

$$\dot{y} = \frac{mg}{k}\left[\exp\left(-\frac{kt}{m}\right) - 1\right]. \qquad (c)$$

Để ý rằng khi $t \to +\infty$, $\dot{y} \to -\frac{mg}{k}$ (vận tốc giới hạn). Vận tốc giới hạn này cũng có thể tìm từ phương trình $\mathbf{P} + \mathbf{F}_C = \mathbf{0}$.

Tích phân (c) và dùng điều kiện đầu $y(0) = 0$ ta được phương trình chuyển động (luật chuyển động):

$$y = \frac{m^2 g}{k^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{kt}{m}\right)\right] - \frac{mgt}{k}.$$

Cách 2. Phương trình (a) là phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

$$y = C_1 + C_2\exp\left(-\frac{kt}{m}\right).$$

Tìm nghiệm phương trình không thuần nhất dưới dạng

$$y = C_1(t) + C_2(t)\exp\left(-\frac{kt}{m}\right).$$

$C_1'(t), C_2'(t)$ thỏa hệ

$$\begin{aligned} C_1'(t) + \exp\left(-\tfrac{kt}{m}\right) C_2'(t) &= 0 \\ -\tfrac{k}{m} \exp\left(-\tfrac{kt}{m}\right) C_2'(t) &= -g \end{aligned}$$

Giải ra $C_1'(t), C_2'(t)$, rồi tích phân theo t, cuối cùng ta được

$$y = C_2 \exp\left(-\frac{kt}{m}\right) + \frac{m^2 g}{k^2} - \frac{mgt}{k} + C_1,$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tích phân phụ thuộc điều kiện đầu. Phần còn lại sinh viên tự làm.

2.8. Một vật nặng P rơi tự do không vận tốc đầu. Sức cản của không khí lệ với bình phương vận tốc, $R = k^2 P v^2$ (k là hằng số). Xác định vận tốc vủa vật tại thời điểm t và vận tốc giới hạn của nó.

2.9. Một viên đạn chuyển động trong mặt phẳng Oxy từ gốc O với vận tốc đầu V_0 lệch so với phương ngang góc α. Giả sử bỏ qua lực cản không khí.

a) Tìm vận tốc, quỹ đạo chuyển động của viên đạn.

b) Xác định α để viên đạn bắn trúng mục tiêu $M(v_0^2/2g, V_0^2/4g)$.

H.D. a) Lực tác dụng lên viên đạn là trọng lực $\mathbf{P}$. Phương trình vi phân chuyển động (định luật thứ hai của Newton)

$$m\mathbf{w} = \mathbf{P}.$$

Chiếu xuống các trục tọa độ:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= -g \end{aligned}$$

Tích phân hệ phương trình trên, ta được vận tốc của viên đạn (dùng điều kiện đầu, vận tốc):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V_0 \cos\alpha \\ \dot{y} &= -gt + V_0 \sin\alpha \end{aligned}$$

Tích phân lần nữa (dùng điều kiện đầu, vị trí) ta được phương trình chuyển động của viên đạn:

$$\begin{aligned} x &= V_0 t \cos\alpha \\ y &= -\tfrac{1}{2} g t^2 + V_0 t \sin\alpha \end{aligned}$$

Khử t trong hai phương trình trên ta được phương trình quỹ đạo của viên đạn:

$$y = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + x \tan\alpha.$$

b) Để viên đạn bắn trúng điểm M ta phải có

$$\frac{V_0^2}{4g} = -\frac{1}{2}(1+\tan^2\alpha)\frac{V_0^2}{4g} + \frac{V_0^2}{2g}\tan\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{2}\tan^2\alpha - 2\tan\alpha + \frac{3}{2} = 0.$$

Nghiệm: $\tan\alpha = 1$, $\tan\alpha = 3$.

Bài tập về các định lý tổng quát

2.10. Chứng tỏ rằng, nếu một hệ di chuyển từ trạng thái nghỉ đến trạng thái khác trong khoảng thời gian nào đó, thì trung bình của lực ngoài toàn phần trong khoảng thời gian này phải bằng không. Áp dụng:

Một đồng hồ cát khối lượng m đặt trên mặt sàn cố định. Áp lực do đồng hồ lên mặt sàn là số đo trọng lượng biểu kiến của đồng hồ. Cát ở trạng thái nghỉ trong khoang trên, lúc $t = 0$, bắt đầu chảy xuống khoang dưới. Cát đến trạng thái nghỉ ở khoang dưới sau khoảng thời gian τ. Tìm trung bình theo thời gian trọng lượng biểu kiến của đồng hồ trong khoảng thời gian $[0, \tau]$.

Trọng lượng biểu kiến của đồng hồ không phải là hằng số! Hãy chứng minh, khi cát đang chảy, trọng lượng biểu kiến của đồng hồ lớn hơn trọng lượng thực (trọng lượng tĩnh).

2.11. Một tia nước chảy từ một vòi phun với vận tốc $v = 10\ m/s$ và trực giao với tường cứng. Đường kính vòi $d = 4\ cm$. Bỏ qua sự nén được của nước. Hãy xác định áp lực của tia nước lên tường. Coi các phần tử nước sau khi va chạm có vận tốc hướng dọc theo tường.

H.D. Cơ hệ: khối nước, ban đầu được giới hạn bởi $a - b$, sau khoảng thời gian Δt giới hạn bởi $a' - b'$ (hình 2.16).

Lực ngoài tác dụng: trọng lực $\mathbf{P}$, phản lực $\mathbf{R}$ của tường tác dụng lên khối nước.

Chọn trục x nằm ngang và áp dụng định lý biến thiên động lượng theo phương x.

$$P_{2x} - P_{1x} = -R\Delta t. \qquad (a)$$

Khối nước ban đầu và khối nước lúc sau có phần chung (2). Nếu giả thiết chuyển động của khối nước là dừng thì

$$P_{2x} - P_{1x} = -P_{1x}^{(1)} = -mv, \qquad (b)$$

trong đó $P_{1x}^{(1)}$ là động lượng lúc đầu của phần (1) còn m là khối lượng của nó. Kết quả này nhận được là do các phần (3) có vận tốc vuông góc với trục x.

Thay (b) vào (a) ta suy ra

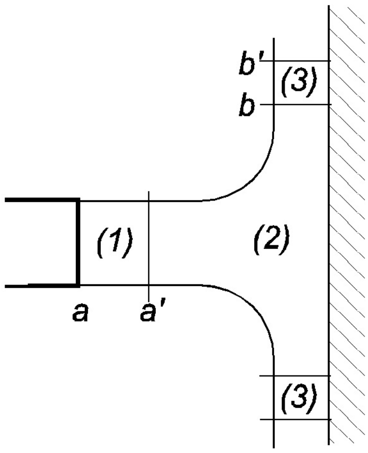
$$R = \frac{mv}{\Delta t}. \qquad (c)$$

Nếu nước có mật độ khối là ρ thì khối lượng của phần (1) là

$$m = \rho \frac{\pi d^2}{4} v \Delta t$$

và như vậy ($\rho = 1$),

$$R = \rho \frac{\pi d^2 v^2}{4} = 125,6\ N.$$



Hình 2.16: Bài tập 2.11

2.12. Hai vật A và B có khối lượng lần lượt là m_1 và m_2 được nối với nhau bởi sợi dây không giãn không trọng lượng vòng qua ròng rọc. Vật A trượt trên mặt KL và vật B trượt trên mặt EK của lăng trụ $DEKL$ có khối lượng m_3 và nằm trên mặt nhẵn nằm ngang. Xác định dịch chuyển s của lăng trụ khi vật A trượt xuống một đoạn l. Biết ban đầu hệ đứng yên.
H.D. Hệ quy chiếu: trục Ox nằm ngang có chiều từ trái qua phải.

Cơ hệ: gồm A, B, sợi dây và lăng trụ. Chú ý, ở đây ta không kể dây và ròng rọc vì chúng không có khối lượng nên chỉ có tác dụng ràng buộc (liên kết) các vật trong hệ (xem hình 2.17).

Lực ngoài tác dụng: các trọng lực $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_A$, $\mathbf{P}_B$, và phản lực $\mathbf{N}$ của mặt sàn tác dụng lên lăng trụ.

Để áp dụng định lý biến thiên động lượng trên phương Ox, trước hết, ta tìm liên hệ giữa các thành phần vận tốc theo phương x của A, B và lăng trụ. Nếu gọi v là vận tốc của lăng trụ đối với O, v' là thành phần vận tốc theo phương x của B đối với lăng trụ. Thì thành phần vận tốc theo phương x của A đối với lăng trụ (vận tốc tương đối) sẽ là $v' \cos\alpha$ (do dây không giãn). Từ công thức cộng vận tốc, ta có thành phần vận tốc theo phương x của A, B đối với O (vận tốc tuyệt đối) lần lượt là $v'\cos\alpha + v$, $v' + v$.

Do ban đầu hệ đứng yên nên động lượng bằng không, $P_{1x} = 0$. Động lượng lúc sau (khi A đã trượt xuống một khoảng l dọc theo cạnh KL của lăng trụ):

$$P_{2x} = m_1(v'\cos\alpha + v) + m_2(v' + v) + mv = (m_1\cos\alpha + m_2)v' + (m_1 + m_2 + m)v.$$

Vì dây không trọng lượng nên mômen động lượng của nó bằng không.

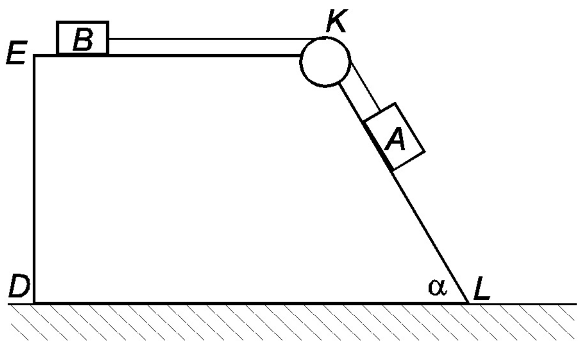
Như vậy, theo định lý biến thiên động lượng trên phương Ox,

$$(m_1\cos\alpha + m_2)v' + (m_1 + m_2 + m)v = 0 \Rightarrow v = -\frac{(m_1\cos\alpha + m_2)v'}{m_1 + m_2 + m}.$$

Vế phải của phương trình trên bằng không do tất cả các lực ngoài đều trực giao với Ox. Lấy tích phân hai vế từ 0 đến thời điểm đang xét, ta được:

$$s = -\frac{(m_1\cos\alpha + m_2)l}{m_1 + m_2 + m}.$$

Dấu trừ trong phương trình chỉ thị lăng trụ di chuyển ngược hướng di chuyển của B.



Hình 2.17: Bài tập 2.12

2.13. Một chiếc thuyền khối lượng M đứng yên trên mặt nước yên tĩnh và một người đàn ông khối lượng m ở mũi thuyền. Người này đứng dậy đi xuống đuôi thuyền rồi ngồi xuống. Nếu nước cản chuyển động với lực tỉ lệ với vận tốc của thuyền, chứng tỏ rằng thuyền sẽ đến và dừng ở vị trí ban đầu của nó. [Kết quả này độc lập với hằng số cản và chi thiết chuyển động của người.]
H.D. Gọi x là chuyển dịch của xuồng tại thời điểm t, và $v(= \dot{x})$ là vận tốc

của nó. Cho ξ là chuyển dịch của người đối với xuồng tại thời điểm t, đo theo hướng x âm (xem hình 2.18). Thì vận tốc thực của người (theo hướng x dương) là $v - \dot{\xi}$.

Động lượng của hệ theo hướng x dương là

$$P = Mv + m(v - \dot{\xi}) = (M + m)v - m\dot{\xi}.$$

Lực tác dụng trên phương ngang chỉ có lực cản của nước R. Vì sức cản là tuyến tính, R có dạng

$$R = -(M + m)Kv,$$

trong đó K là hằng; thừa số $M + m$ được đưa vào trong biểu diễn lực cản chỉ với mục đích tiện lợi.

Định lý biến thiên động lượng cho $\dot{P} = R$, suy ra

$$\dot{v} + Kv = \left(\frac{m}{M + m}\right)\ddot{\xi}.$$

Tích phân phương trình này đối với t, ta được

$$\dot{x} + Kx = \left(\frac{m}{M + m}\right)\dot{\xi} + C,$$

trong đó C là hằng số tích phân. Vì toàn hệ bắt đầu chuyển động từ trạng thái nghỉ với $x = 0$, nên $C = 0$ và ta được

$$\dot{x} + Kx = \left(\frac{m}{M + m}\right)\dot{\xi}.$$

Đây là phương trình chuyển động (phương trình vi phân tuyến tính cấp 1) mà x phải thỏa. Hàm $\xi(t)$ (chuyển động của người) giả sử là đã biết. Giải ra ta được

$$x = \frac{me^{-Kt}}{M + m}\int_0^t \dot{\xi}(t')e^{Kt'}dt' + De^{-Kt}.$$

Hằng số tích phân $D = 0$ do điều kiện đầu $t = 0$, $x = 0$. Vậy, dịch chuyển x của xuồng tại thời điểm t là

$$x = \frac{me^{-Kt}}{M + m}\int_0^t \dot{\xi}(t')e^{Kt'}dt'.$$

Bây giờ ta muốn chứng tỏ cuối cùng xuồng sẽ đạt trạng thái nghỉ tại vị trí gốc của nó. Giả sử người ngồi xuống ở đuôi xuồng sau khoảng thời gian

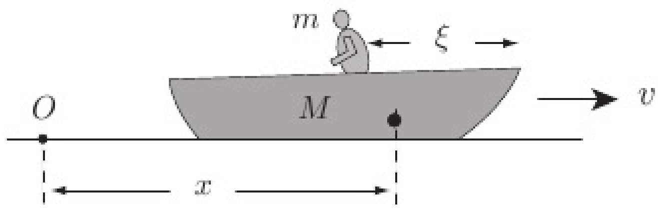
τ. Thì khi $t \geq \tau$, $\dot{\xi} = 0$ và tích phân có thể hạn chế trong khoảng $0 \leq t' \leq \tau$. Nghiệm x khi $t > \tau$ có thể viết là

$$x = \frac{me^{-Kt}}{M+m} \int_0^\tau \dot{\xi}(t')e^{Kt'}dt' = x_0 e^{-Kt},$$

trong đó

$$x_0 = \frac{m}{M+m} \int_0^\tau \dot{\xi}(t')e^{Kt'}dt'$$

là hằng số. Từ đây, khi $t \to \infty$, $x \to 0$.



Hình 2.18: Bài tập 2.13

2.14. Một tấm tròn đồng chất nặng Q bán kính r có thể quay không ma sát quanh trục thẳng đứng Oz trực giao với mặt phẳng đĩa. Một người trọng lượng P đi theo mép tấm tròn với vận tốc tương đối u không đổi. Ban đầu hệ đứng yên, hỏi tấm tròn quay quanh trục với vận tốc góc ω bằng bao nhiêu?
H.D. Cơ hệ: tấm tròn và người.

Lực ngoài tác dụng: $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ là trọng lực của người và tấm tròn, $\mathbf{R}_A$, $\mathbf{R}_B$ phản lực liên kết tại các ổ trục (xem hình 2.19).

Ta có $\sum m_z(\mathbf{F}_k^{(e)}) = \mathbf{0}$ nên mômen động lượng của hệ được bảo toàn theo phương z. Vì ban đầu hệ đứng yên nên $L_z = 0$ tại mọi thời điểm.

Tại thời điểm bất kỳ, giả định vận tốc của người và vectơ vận tốc góc của tấm tròn như hình vẽ. Lúc đó vận tốc tuyệt đối của người $v = r\omega + u$. Mômen động lượng của hệ đối với trục z:

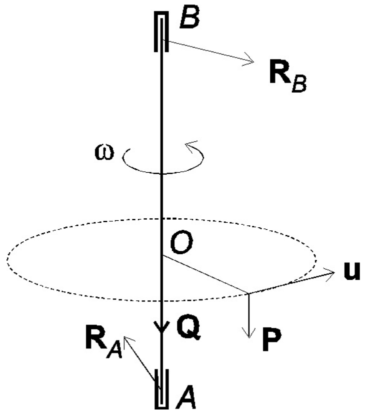
$$L_z = \underbrace{J_z\omega}_{\text{tấm tròn}} + \underbrace{\frac{P}{g}r(r\omega + u)}_{\text{người}} = \frac{r^2}{2g}(Q + 2P)\omega + \frac{P}{g}ru,$$

trong đó ta đã dùng công thức tính mômen quán tính của tấm tròn đối với trục z, $J_z = Qr^2/2g$.

Từ $L_z = 0$ ta suy ra

$$\omega = -\frac{2Pu}{r(Q+2P)}.$$

Chú ý, dấu trừ trong biểu thức ω chứng tỏ vận tốc góc có chiều ngược với chiều giả thiết.



Hình 2.19: Bài tập 2.14

2.15. Trục hình trụ trọng lượng P bán kính R quay được xung quanh trục nằm ngang nhờ quả cân A có trọng lượng Q treo vào sợi dây quấn quanh hình trụ (xem hình 2.20). Bỏ qua khối lượng của dây và ma sát ở ổ trục. Hãy xác định gia tốc góc trong chuyển động quay của hình trụ khi vật A có chuyển động thẳng đứng.

H.D. Cơ hệ: hình trụ, sợi dây và quả cân A.

Lực ngoài: trọng lực $\mathbf{P}$ và phản lực $\mathbf{N}$ tác dụng lên hình trụ, trọng lực $\mathbf{Q}$ tác dụng lên quả cân A.

Hệ tọa độ: Gốc O "tâm" của hình tru, trục Ox hướng xuống dưới, trục Oy nằm ngang hướng từ phải qua trái, và như vậy trục Oz vuông góc và hướng vào trong mặt phẳng hình vẽ. *Chọn hệ tọa độ như thế này thì hình trụ sẽ quay theo chiều thuận (ngược chiều kim đồng hồ).*

Mômen động lượng của hệ đối với trục z:

$$L_z = \underbrace{J_z\omega}_{\text{hình trụ}} + \underbrace{\frac{Q}{g}v_A R}_{\text{quả cân } A} = \frac{R^2\omega(P+Q)}{g}.$$

Ở đây ta đã dùng công thức tính mômen quán tính của hình trụ $J_z = PR^2/g$, và liên hệ giữa vận tốc quả cân A với vận tốc góc của hình trụ, $v_A = \omega R$ (do dây không giãn). Vì dây không trọng lượng nên mômen động lượng của nó bằng không.

Mômen của lực ngoài đối với trục z (hai lực $\mathbf{P}, \mathbf{N}$ có đường tác dụng cặt trục z nên mômen của chúng bằng không):

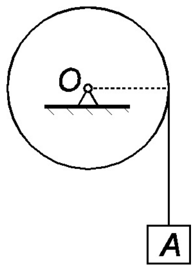
$$M_z(\mathbf{Q}) = RQ.$$

Áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng (dạng vi phân) ta được:

$$\frac{R^2\epsilon(P+Q)}{g} = RQ.$$

Suy ra gia tốc góc của hình trụ:

$$\epsilon = \frac{gQ}{R(P+Q)}.$$



Hình 2.20: Bài tập 2.15

2.16. Hai vật A và B nặng P_1 và P_2 được nối với nhau bằng sợi dây mềm không giãn không trọng lượng và vắt qua ròng rọc O bán kính r trọng lượng Q. Cho $P_1 > P_2$, khối lượng ròng rọc phân bố đều trên vành. Xác định gia tốc vật A.

H.D. Cơ hệ: ròng rọc, sợi dây và hai vật A, B.

Lực ngoài tác dụng: $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{Q}$ và phản lực $\mathbf{R}$ (hình 2.21).

Hệ tọa độ: $Oxyz$ với Ox nằm ngang hướng từ trái qua phải, Oy thẳng đứng hướng lên và Oz vuông góc với mặt phẳng hình vẽ hướng ra ngoài (trang giấy).

Để ý rằng, nếu vật A (B) có vận tốc v thì ròng rọc có $\omega = v/r$.

Mômen động lượng của hệ đối với trục z vuông góc với mặt phẳng hình vẽ

$$L_z = \underbrace{J_z\omega}_{\text{ròng rọc}} + \underbrace{\frac{P_1}{g}vr}_{\text{vật } A} + \underbrace{\frac{P_2}{g}vr}_{\text{vật } B} = \frac{rv(Q+P_1+P_2)}{g}.$$

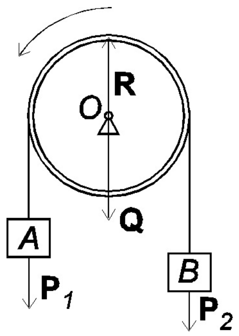
Ở đây ta đã dùng công thức $J_z = Qr^2/2$ tính mômen quán tính của ròng rọc. Vì dây không trọng lượng nên mômen động lượng của nó bằng không.

Áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng đối với trục z, ta có

$$\dot{L}_z = (P_1 - P_2)r \Leftrightarrow \frac{r(Q + P_1 + P_2)}{g} w = (P_1 - P_2)r \quad (w = \dot{v}),$$

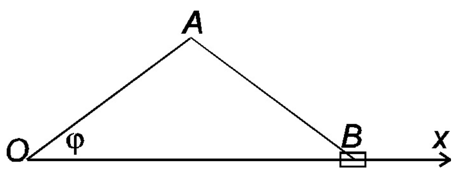
suy ra

$$w = \frac{(P_1 - P_2)g}{Q + P_1 + P_2}.$$



Hình 2.21: Bài tập 2.16

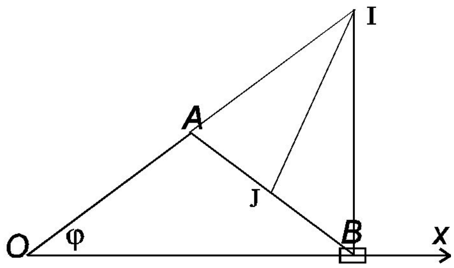
2.17. Cho tay quay OA chiều dài r trong cơ cấu thanh truyền quay với vận tốc góc ω_0. Thanh truyền OB cũng có chiều dài r. Tay quay và thanh truyền là đồng chất và có khối lượng riêng là ρ (trên đơn vị dài). Tính động năng của cơ hệ.



Hình 2.22: Bài tập 2.17

H.D. Thanh OA thực hiện chuyển động quay quanh O với vận tốc góc ω_0 nên động năng bằng

$$\frac{1}{2} J_1 \omega_0^2 = \frac{1}{6} \rho r^3 \omega_0^2.$$



Hình 2.23: Tâm quay tức thời, bài tập 2.16

Ở đây, ta đã dùng công thức $J_1 = \frac{1}{3}Mr^2$ với $M = \rho r$.

Thanh AB chuyển động song phẳng. Chuyển động tức thời của nó là chuyển động quay quanh tâm quay tức thời I (hình 2.23) với vận tốc góc ω_1. Ta thấy A là trung điểm cạnh huyền của tam giác vuông ΔOBI vuông tại B, nên $IA = OA = r$. Vì $v(A) = OA\omega_0 = r\omega_0$ (trong chuyển động của thanh OA), $v(A) = IA\omega_1 = r\omega_1$ (trong chuyển động của thanh AB) nên $\omega_1 = \omega_0$. Để tính động năng của thanh AB ta cần tính mômen quán tính J_2 của nó đối với trục đi qua I. Trước hết, xác định IJ với J là khối tâm (trung điểm) của AB. Áp dụng công thức côsin cho tam giác ΔIAJ, ta có:

$$IJ^2 = IA^2 + AJ^2 - 2AI \cdot AJ \cos \angle IAJ = r^2 \left(\frac{5}{4} - \cos 2\varphi \right).$$

Do đó theo công thức Huygens

$$J_2 = \frac{1}{12}\rho r^3 + \rho r^3 \left(\frac{5}{4} - \cos 2\varphi \right) = \rho r^3 \left(\frac{4}{3} - \cos 2\varphi \right).$$

Động năng của thanh AB bằng

$$\frac{1}{2}\rho r^3 \left(\frac{4}{3} - \cos 2\varphi \right) \omega_0^2.$$

Tóm lại, động năng của hệ bằng

$$\frac{1}{6}\rho r^3\omega_0^2 + \frac{1}{2}\rho r^3 \left(\frac{4}{3} - \cos 2\varphi \right) \omega_0^2 = \rho r^3 \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi \right) \omega_0^2.$$

2.18. Một dây không giãn, không trọng lượng được quấn vào đầu đĩa tròn đồng chất khối lượng m bán kính r, còn đầu kia buộc vào điểm cố định A.

Khi dây lơi ra, hình trụ rơi xuống không vận tốc đầu. Xác định vận tốc v của tâm đĩa tròn khi nó rơi xuống một đoạn h. Xác định gia tốc tâm C và sức căng dây.
H.D. Cơ hệ: đĩa và dây.

Lực ngoài tác dụng: $\mathbf{P}$ trọng lực đặt lên đĩa.

Hệ tọa độ được chọn có gốc đặt tại A, Ax thẳng đứng hướng xuống dưới, Ay nằm ngang hướng từ trái qua phải, Az vuông góc với mặt phẳng hình vẽ (đầu bài) hướng từ ngoài vào trong (trang giấp). Với cách chọn hệ tọa độ này thì đĩa quay theo chiều thuận.

Để tính mômen động lượng của hệ ta dùng hệ tọa độ König $Cx'y'z'$ (hình tịnh tiến của $Axyz$ theo vectơ $\overrightarrow{AC}$). Để ý rằng, đĩa thực hiện chuyển động song phẳng, do dây không giãn, có chuyển động tức thời là chuyển động quay quanh trục đi qua "điểm tiếp xúc" của dĩa với trục Ax với vận tốc góc ω, $v_C = r\omega$. Nếu xét chuyển động của điểm này đối với hệ König (xem như đứng yên), thì nó chuyển động quay quanh C với cùng vận tốc góc. Như vậy,

$$L_z = mrv_C + J_C\omega = \frac{3}{2}mr^2\omega,$$

trong đó J_C là mômen quán tính của đĩa đối với trục đi qua C và cùng hướng với Az. Ở đây ta đã dùng công thức $J_C = mr^2/2$. Vì dây không trọng lượng nên mômen động lượng của nó bằng không.

Mômen của lực ngoài (đặt tại C): mgr.

Áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng:

$$\frac{3}{2}mr^2\dot{\omega} = mgr \Rightarrow \epsilon = \dot{\omega} = \frac{2g}{3r}.$$

Vì C chuyển động thẳng đứng nên gia tốc của C: $w_C = \dot{v}_C = 2g/3$.

Để tìm lực căng ta xét hệ chỉ gồm đĩa. Khi đó, lực ngoài tác dụng lên hệ gồm $\mathbf{P}$ và lực căng dây $\mathbf{T}$. Áp dụng định lý chuyển động khối tâm, ta có:

$$mw_C = mg - T \Rightarrow T = mg - \frac{2mg}{3} = \frac{mg}{3}.$$

Cách giải khác

Phần đầu của bài tập này có thể giải bằng cách dùng định lý biến thiên động năng. Ở đây ta cũng dùng hệ tọa độ König khi tính động năng. Động năng của hệ:

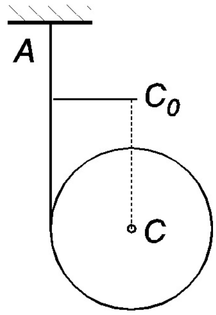
$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2 = \frac{3}{4}mr^2\omega^2.$$

Công suất của lực ngoài:

$$W = mgv_C = mgr\omega.$$

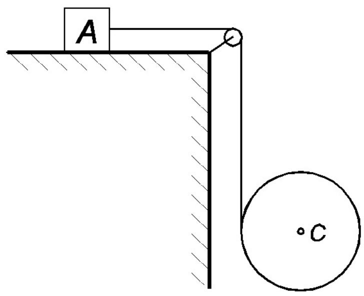
Áp dụng định lý biến thiên động năng:

$$\frac{3}{2}mr^2\omega\dot{\omega} = mgr\omega \Rightarrow \epsilon = \dot{\omega} = \frac{2g}{3r}.$$



Hình 2.24: Bài tập 2.18

2.19. Một hình trụ trọng lượng P_1 có cuộn xung quanh bằng một sợi dây. Dây vắt qua ròng rọc cố định O rồi nối với vật A nặng P_2. Vật A trượt trên mặt phẳng nằm ngang có hệ số ma sát f. Bỏ qua ma sát ở ổ trục O, tìm gia tốc của vật A và của tâm C hình trụ.



Hình 2.25: Bài tập 2.19

Chương 3

CƠ HỌC GIẢI TÍCH

3.1 Các khái niệm cơ bản

Cơ hệ gồm N chất điểm

$$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), \ldots, M_N(x_N, y_N, z_N)$$

khối lượng $m_1, m_2, \ldots, m_N$. Vị trí của hệ được xác định nếu biết $3N$ tọa độ $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots; x_N, y_N, z_N$. Một vị trí của hệ được gọi là cấu hình của hệ. Trong cơ học ta nghiên cứu hệ chất điểm tự do và không tự do. Hệ chất điểm không tự do khi tọa độ (vị trí), thời gian, đạo hàm của tọa độ theo thời gian (vận tốc) bị hạn chế bởi các phương trình hoặc bất phương trình, gọi là phương trình hoặc bất phương trình liên kết. Ở đây ta chỉ xét ràng buộc là phương trình, còn gọi là liên kết buộc.

Nếu phương trình liên kết có chứa thời gian ở dạng hiển thì liên kết gọi là *không dừng*, trường hợp ngược lại gọi là *liên kết dừng* (seleronom).

Nếu phương trình liên kết là hệ thức hữu hạn giữa tọa độ và thời gian, hay ở dạng vi phân nhưng có thể tích phân được để đưa về dạng hữu hạn thì gọi là *liên kết hình học* hay *liên kết hôlônôm*. Nếu phương trình ràng buộc chứa các đạo hàm của tọa độ và không thể tích phân được để đưa về dạng hữu hạn thì gọi là *liên kết động học* hay *liên kết không hôlônôm*.

Giả sử hệ chịu r ràng buộc độc lập (hạn chế xét trường hợp hệ chỉ chịu liên kết hình học)

$$f_\alpha(t; x_k, y_k, z_k) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, r). \tag{3.1}$$

- Nếu cấu hình của hệ được xác định bởi các giá trị của một bộ các biến độc lập $q_1, q_2, \ldots, q_d$, thì $\{q_1, q_2, \ldots, q_d\}$ được gọi là một tập các *tọa độ suy rộng* của hệ. Số tọa độ suy rộng gọi là *bậc tự do* của hệ. Trường hợp hệ chịu r liên kết hình học thì số tọa độ suy rộng $d = 3N - r$.

- Đạo hàm theo thời gian của các tọa độ suy rộng gọi là *vận tốc suy rộng* của hệ
$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_d.$$

- Ở một cấu hình cho trước của hệ x_k, y_k, z_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$, giả sử các chất điểm thực hiện chuyển dịch $\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k$ đến cấu hình $x_k + \Delta x_k, y_k + \Delta y_k, z_k + \Delta z_k$ thỏa ràng buộc (3.1), thì
$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\Delta t + \sum_k \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k}\Delta x_k + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_k}\Delta y_k + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_k}\Delta z_k\right) = 0. \qquad (3.2)$$
Ta gọi các chuyển dịch $\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k$ thỏa (3.2) là *chuyển dịch khả dĩ* (chuyển dịch xảy ra dưới tác dụng của lực cho trước - chuyển dịch thực - là một trong số các chuyển dịch khả dĩ).

- Hiệu của hai chuyển dịch khả dĩ bất kỳ gọi là *chuyển dịch ảo*, ký hiệu $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$, chúng thỏa điều kiện
$$\sum_k \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k}\delta x_k + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_k}\delta y_k + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_k}\delta z_k\right) = 0. \qquad (3.3)$$

Chú thích 1. Vị trí của các chất điểm tại thời điểm t được gọi là *cấu hình* của cơ hệ tại thời điểm đó. Không gian các vị trí có thể của cơ hệ được gọi là *không gian cấu hình*. Theo cách mô tả dùng tọa độ suy rộng thì cơ hệ được xem như một điểm $(q_1, \ldots, q_d)$ trong một đa tạp d-chiều. Như vậy quỹ đạo của cơ hệ là một đường cong trong đa tạp này •

Liên kết lý tưởng

Các liên kết đặt trên các chất điểm M_i có thể thay thế bằng các *phản lực liên kết* $\mathbf{R}_{i\alpha}$. Các liên kết đặt lệ hệ được gọi là *liên kết lý tưởng* nếu tổng công của các phản lực liên kết trên các độ dời ảo tương ứng bằng không tại mọi thời điểm t
$$\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{\alpha=1}^{r}\mathbf{R}_{i\alpha}\right)\cdot\delta\mathbf{r}_i = 0. \qquad (3.4)$$

3.2 Phương trình Lagrange

Các phương trình Lagrange được rút ra từ nguyên lý công ảo, còn gọi là nguyên lý chuyển dịch ảo.

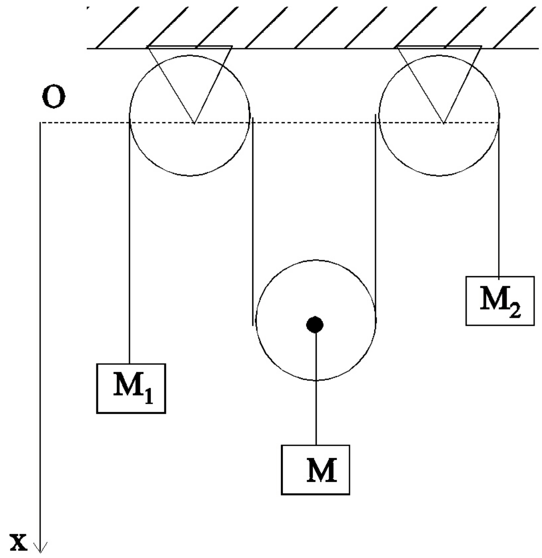
3.2.1 Phương trình tổng quát động lực học

Định lý 3.1 (Nguyên lý công ảo)**.** *Trong trường hợp liên kết đặt lên hệ là lý tưởng, tổng công phân tố của các lực chủ động và lực quán tính tác dụng lên cơ hệ trên chuyển dịch ảo bất kỳ bằng không tại mọi thời điểm*

$$\sum_k [(F^a_{xk} - m_k \ddot{x}_k)\delta x_k + (F^a_{yk} - m_k \ddot{y}_k)\delta y_k + (F^a_{zk} - m_k \ddot{z}_k)\delta z_k] = 0. \qquad (3.5)$$

Phương trình (3.5) gọi là *phương trình tổng quát động lực học.*

Thí dụ 3.1. Sợi dây không giãn cùng với ròng rọc di động C vắt qua hai ròng rọc A và B với các trục cố định. Phần dây không nằm trên các ròng rọc có phương thẳng đứng. Treo vật M với trọng lượng P vào ròng rọc C, còn hai đầy dây treo các vật M_1, M_2 với trọng lượng P_1, P_2. Xác định gia tốc $\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$. Không kể ma sát, khối lượng các ròng rọc và sợi dây.



Hình 3.1: Thí dụ 3.1

Giải. Gọi x, x_1, x_2 lần lượt là tọa độ của M, M_1, M_2 theo phương thẳng đứng hướng từ trên xuống (xem hình 3.1). Phương trình liên kết

$$2x + x_1 + x_2 = const.$$

Lấy biến phân và đạo hàm cấp hai theo thời gian phương trình liên kết

$$\begin{aligned} 2\delta x + \delta x_1 + \delta x_2 &= 0, \\ 2\ddot{x} + \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Do liên kết là lý tưởng và lực chủ động tác dụng gồm các trọng lực P, P_1, P_2 nên phương tổng quát động lực học

$$\left(P_1 - \frac{P_1}{g}\ddot{x}_1\right)\delta x_1 + \left(P_2 - \frac{P_2}{g}\ddot{x}_2\right)\delta x_2 + \left(P - \frac{P}{g}\ddot{x}\right)\delta x_1 = 0.$$

Thay

$$\begin{aligned} \delta x &= -\frac{1}{2}(\delta x_1 + \delta x_2), \\ \ddot{x} &= -\frac{1}{2}(\ddot{x}_1 + \ddot{2}_2) \end{aligned}$$

vào phương trình tổng quát ta được

$$[2(2P_1 - P)g - (P + 4P_1)\ddot{x}_1 - P\ddot{x}_2]\delta x_1 + [2(2P_2 - P)g - P\ddot{x}_1 - (P + 4P_2)\ddot{x}_2]\delta x_2 = 0.$$

Vì các độ dời ảo $\delta x_1, \delta x_2$ độc lập và bất kỳ nên

$$\begin{aligned} (P + 4P_1)\ddot{x}_1 + P\ddot{x}_2 &= 2(2P_1 - P)g, \\ P\ddot{x}_1 + (P + 4P_2)\ddot{x}_2 &= 2(2P_2 - P)g. \end{aligned}$$

Giải ra ta được

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= g\frac{4P_1P_2 + P(P_1 - 3P_2)}{4P_1P_2 + P(P_1 + P_2)}, \\ \ddot{x}_2 &= g\frac{4P_1P_2 + P(P_2 - 3P_1)}{4P_1P_2 + P(P_1 + P_2)}, \\ \Rightarrow \ddot{x} &= -g\frac{4P_1P_2 - P(P_1 + P_2)}{4P_1P_2 + P(P_1 + P_2)}. \end{aligned}$$

◇

3.2.2 Phương trình Lagrange loại hai

Đồng nhất thức Lagrange

Giữa các vectơ định vị $\mathbf{r}_k$ ($k = 1, \ldots, N$) liên hệ với các tọa độ suy rộng q_s ($s = 1, \ldots, d$)

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(t, q_s) \quad k = 1, \ldots, N;\ s = 1, \ldots, d. \tag{3.6}$$

Các biến $t, q_s, \dot{q}_s$ được gọi là các *biến Lagrange*. Khi đó, biến phân của $\mathbf{r}_k$

$$\delta\mathbf{r}_k = \sum_{s=1}^{d} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_s}\delta q_s. \tag{3.7}$$

Bây giờ ta thiết lập một số đồng nhất thức cần dùng. Lấy đạo hàm hai vế theo thời gian

$$\frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{v}_k = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} + \sum_{s=1}^{d} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_s}\dot{q}_s. \tag{3.8}$$

Từ đẳng thức (3.8), lấy đạo hàm theo $\dot{q}_s$, ta được

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_s}} \tag{3.9}$$

Đàng khác, lấy đạo hàm riêng (3.8) theo q_r

$$\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial q_r} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial t \partial q_r} + \sum_{s=1}^{d} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_s \partial q_r}\dot{q}_s \tag{3.10}$$

và đạo hàm toàn phần $\partial \mathbf{r}_k / \partial q_r$ theo t

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_r} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial t \partial q_r} + \sum_{s}^{d} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_s \partial q_r}\dot{q}_s. \tag{3.11}$$

So sánh (3.10) và (3.11) ta được

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial q_r} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_r}} \tag{3.12}$$

Các đẳng thức (3.9) và (3.12) được gọi là các đồng nhất thức Lagrange.

Thiết lập phương trình Lagrange loại II

Để thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ gồm N chất điểm chịu liên kết Hôlônôm lý tưởng, ta xuất phát từ phương trình tổng quát động lực học (3.5) được viết dưới dạng

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k^a \cdot \delta \mathbf{r}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\mathbf{v}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k. \tag{3.13}$$

- Biến đổi vế trái (3.13), dùng (3.7)

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k^a \cdot \delta \mathbf{r}_k = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k^a \cdot \left(\sum_{s=1}^{d} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_s}\delta q_s \right) = \sum_{s=1}^{d} \left(\sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k^a \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_s} \right) \delta q_s.$$

Đặt

$$\begin{aligned} Q_s &= \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k^a \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_s} \\ &= \sum_{k=1}^{N} \left(F_{xk}^a \frac{\partial x_k}{\partial q_s} + F_{yk}^a \frac{\partial y_k}{\partial q_s} + F_{zk}^a \frac{\partial z_k}{\partial q_s} \right) \qquad s = 1, \dots, d. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Các Q_s được gọi là *lực suy rộng* tác dụng lên cơ hệ. Vậy,

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k^a \cdot \delta \mathbf{r}_k = \sum_{s=1}^{d} Q_s \delta q_s. \tag{3.15}$$

- Biến đổi vế phải (3.13), dùng (3.7)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\mathbf{v}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k &= \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\mathbf{v}}_k \cdot \left(\sum_{s=1}^{d} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_s} \delta q_s \right) \\ &= \sum_{s=1}^{d} \left(\sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\mathbf{v}}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_s} \right) \delta q_s. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Số hạng trong dấu ngoặc, có thể viết lại

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\mathbf{v}}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_s} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{v}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_s} \right) - \sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{v}_k \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_s}. \tag{3.17}$$

Dùng các đồng nhất thức Lagrange

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\mathbf{v}}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_s} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{v}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot{q}_s} \right) - \sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{v}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial q_s} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k v_k^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_s} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k v_k^2 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} \end{aligned} \tag{3.18}$$

trong đó

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k v_k^2 \tag{3.19}$$

là động năng của hệ.

Tóm lại,

$$\sum_{s=1}^{d}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}-Q_s\right)\delta q_s=0.$$

Vì các δq_s là độc lập và bất kỳ nên

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s \quad (s=1,2,\ldots,d) \tag{3.20}$$

Phương trình (3.20) được gọi là *phương trình Lagrange loại II.*

Biểu thức động năng theo tọa độ suy rộng

Từ công thức động năng (3.19), thay (3.8) vào ta được

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}m_k\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}+\sum_{s=1}^{d}\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_s}\dot{q}_s\right)^2.$$

Bình phương biểu thức trong dấu ngoặc và thay đổi thứ tự lấy tổng

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{d}\left(\sum_{k=1}^{N}m_k\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_r}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_s}\right)\dot{q}_r\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{d}\left(\sum_{k=1}^{N}m_k\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_s}\right)\dot{q}_s \\ &+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}m_k\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}\right)^2. \end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{aligned} a_{rs}=asr &= \sum_{k=1}^{N}m_k\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_r}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_s}, \\ b_s &= \sum_{k=1}^{N}m_k\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_s}, \\ c &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}m_k\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}\right)^2. \end{aligned}$$

Ta thu được

$$T=\frac{1}{2}\sum_{r,s}^{d}a_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{d}b_s\dot{q}_s+c=T_2+T_1+T_0, \tag{3.21}$$

trong đó a_{rs}, b_s, c là các hàm của tọa độ suy rộng và thời gian t. Như vậy, trong trường hợp tổng quát động năng của cơ hệ là hàm bậc hai của vận tốc suy rộng. Nếu cơ hệ chịu liên kết dừng thì

$$c = 0, \quad b_s = 0 \ (s = 1, \dots, d), \quad a_{rs} = a_{rs}(q)$$

và động năng có dạng toàn phương xác định dương

$$T = \frac{1}{2}\sum_{r,s}^{d} a_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s. \tag{3.22}$$

3.2.3 Trường hợp hệ bảo toàn

Nếu tất cả các lực chủ động đều có *thế* (hệ được gọi là *hệ bảo toàn* hay *hệ động lực*), nghĩa là tồn tại hàm $U = U(x_k, y_k, z_k)$ sao cho

$$F_{kx} = \frac{\partial U}{\partial x_k},\ F_{ky} = \frac{\partial U}{\partial y_k},\ F_{kz} = \frac{\partial U}{\partial z_k} \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$
$$\Rightarrow Q_s = \frac{\partial U}{\partial q_s} \quad (s = 1, 2, \dots, d).$$

Khi đó phương trình Lagrange có thể viết lại

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, d), \tag{3.23}$$

trong đó $L = T + U$ là hàm Lagrange. Ký hiệu $V = -U$ là thế năng của hệ thì $L = T - V$.

Trường hợp hệ bảo toàn đồng thời hàm lực và động năng không phụ thuộc hiển vào thời gian thì năng lượng toàn phần của hệ được bảo toàn

$$T + V = \text{const.} \tag{3.24}$$

Tọa độ cyclic là tọa độ suy rộng q_c không có mặt trong hàm Lagrange, nghĩa là

$$\frac{\partial L}{\partial q_c} = 0.$$

Khi đó ta có một tích phân đầu

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_c} = \text{const.}$$

3.2.4 Thủ tục thiết lập phương trình Lagrange loại hai

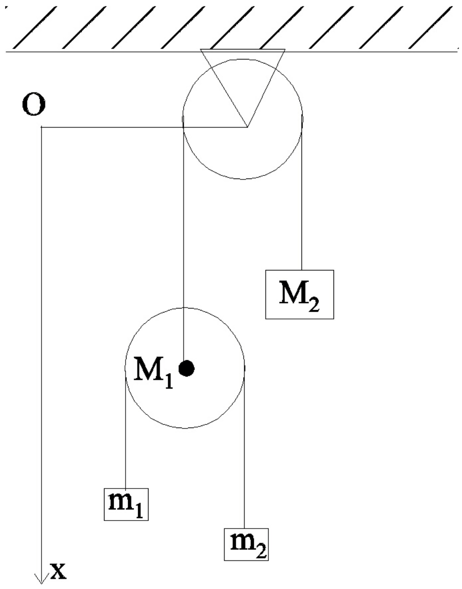
1. Xác định bậc tự do và chọn các tọa độ suy rộng.
2. Tính động năng của hệ T, biểu diễn động năng theo các tọa độ và vận tốc suy rộng.
3. Tính tổng công phân tố của lực chủ động, biểu diễn nó theo các tọa độ suy rộng, từ đó suy ra các lực suy rộng dựa vào hệ thức (d).
4. Tính các đạo hàm $\partial T/\partial \dot{q}_s$, $d(\partial T/\partial \dot{q}_s)/dt$, $\partial T/\partial q_s$.
5. Thay vào phương trình Lagrange loại hai.

Thí dụ 3.2. Một vật khối lượng M_2 được treo trên một đầu dây không giãn vắt qua ròng rọc cố định, đầu kia của dây treo ròng rọc di động khối lượng M_1. Vắt qua ròng rọc này có sợi dây không giãn treo hai vật với khối lượng m_1 và m_2.

a) Viết phương trình Lagrange của cơ hệ.

b) Tìm gia tốc của khối lượng M_2.

Bỏ qua ma sát ở các ròng rọc.



Hình 3.2: Thí dụ 3.2

Giải. a) *Bước 1:* Liên kết hôlônôm lý tưởng. Gọi X_1, X_2, x_1, x_2 lần lượt là tọa độ của vật có khối lượng M_1, M_2, m_1, m_2. Ta có

$$X_1 + X_2 = a = const., \quad x_1 + x_2 = b = const.$$

Bước 2: Bậc tự do bằng 2, tọa độ suy rộng X_1, x_1.
Đạo hàm các liên kết theo thời gian

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 + \dot{X}_2 &= 0 \Rightarrow \dot{X}_2 = -\dot{X}_1, \\ \dot{x}_1 + \dot{x}_2 &= 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = -\dot{x}_1. \end{aligned}$$

Vận tốc của m_1 và m_2

$$\begin{aligned} \frac{d(X_1 + x_1)}{dt} &= \dot{X}_1 + \dot{x}_1, \\ \frac{d(X_1 + x_2)}{dt} &= \dot{X}_1 + \dot{x}_2 = \dot{X}_1 - \dot{x}_1. \end{aligned}$$

Bước 3: Động năng của cơ hệ

$$T = \frac{1}{2}M_1\dot{X}_1^2 + \frac{1}{2}M_2\dot{X}_1^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{X}_1 + \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{X}_1 - \dot{x}_1)^2.$$

Bước 4: Thế năng của cơ hệ, lấy mặt phẳng nằm ngang qua tâm của ròng rọc cố định làm mốc.

$$\begin{aligned} V &= -M_1gX_1 - M_2gX_2 - m_1g(X_1 + x_1) - m_2g(X_2 + x_2) \\ &= -M_1gX_1 - M_2g(a - X_1) - m_1g(X_1 + x_1) - m_2g(X_1 + b - x_1). \end{aligned}$$

Hàm Lagrange

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2}M_1\dot{X}_1^2 + \frac{1}{2}M_2\dot{X}_1^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{X}_1 + \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{X}_1 - \dot{x}_1)^2 \\ &\quad + M_1gX_1 + M_2g(a - X_1) + m_1g(X_1 + x_1) + m_2g(X_1 + b - x_1). \end{aligned}$$

Bước 5:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial X_1} &= (M_1 - M_2 + m_1 + m_2)g, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_1} &= (M_1 + M_2 + m_1 + m_2)\dot{X}_1 + (m_1 - m_2)\dot{x}_1, \\ \frac{\partial L}{\partial x_1} &= (m_1 - m_2)g, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= (m_1 - m_2)\dot{X}_1 + (m_1 + m_2)\dot{x}_1. \end{aligned}$$

Bước 6: Phương trình Lagrange

$$\begin{aligned} (M_1 + M_2 + m_1 + m_2)\ddot{X}_1 + (m_1 - m_2)\ddot{x}_1 &= (M_1 - m_2 + m_1 + m_2)g, \\ (m_1 - m_2)\ddot{X}_1 + (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 &= (m_1 - m_2)g. \end{aligned}$$

b) Gia tốc của khối lượng M_2. Giải hệ đối với với hai ẩn $\ddot{X}_1$ và $\ddot{x}_1$

$$\begin{aligned}\ddot{X}_1 &= \frac{(M_1 - M_2)(m_1 + m_2) + 4m_1m_2}{(M_1 + M_2)(m_1 + m_2) + 4m_1m_2} g,\\ \ddot{x}_1 &= \frac{2M_2(m_1 - m_2)}{(M_1 + M_2)(m_1 + m_2) + 4m_1m_2} g.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\ddot{X}_2 = -\ddot{X}_1 = -\frac{(M_1 - M_2)(m_1 + m_2) + 4m_1m_2}{(M_1 + M_2)(m_1 + m_2) + 4m_1m_2} g.$$

◇

3.3 Nguyên lý Hamilton

3.3.1 Nhập môn phép tính biến phân

Với nghiệm của bài toán động lực ta thường quan tâm đến vị trí của cơ hệ hay chất điểm tại một thời điểm cho trước. Ta cũng quan tâm đến quỹ đạo mà chúng thực hiện, xem coi nó là cực đại hay cực tiểu. Nghiên cứu toàn bộ vấn đề này có thể được thực hiện bằng kỹ thuật của "phép tính biến phân".

Thí dụ, xét chuyển động của chất điểm từ điểm I (x_1, y_1) đến điểm II (x_2, y_2) dọc theo quỹ đạo A. Quỹ đạo này có thể là quỹ đạo ngắn nhất A_0 là đường thẳng nối hai điểm. Ta có thể tìm quỹ đạo ngắn nhất này bằng phương pháp của phép tính biến phân sau.

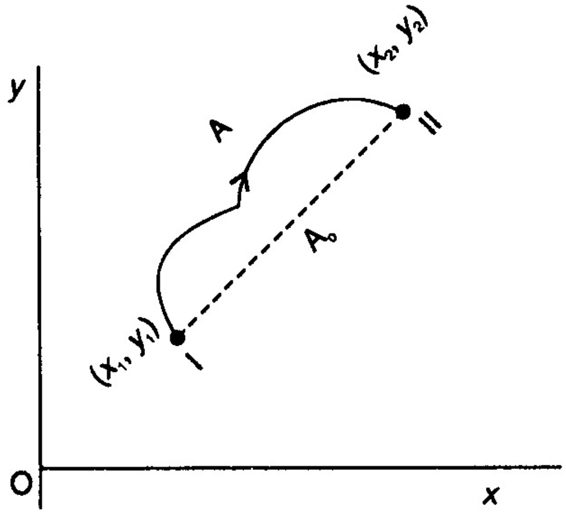
Nếu ds là vi phân độ dài cung vô cùng bé của quỹ đạo chất điểm thì độ dài toàn phần của quỹ đạo là

$$\begin{aligned}S &= \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx\\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx \qquad (3.25)\end{aligned}$$

trong đó $f(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$.

Phương trình (3.25) bây giờ được gọi là *tích phân tác động* (action integral) trong phép tính biến phân và ở đây, vì, S là cực tiểu hay ngắn nhất, ta phải có

$$\delta S = 0$$



Hình 3.3: Chuyển động của chất điểm từ (x_1, y_1) đến (x_2, y_2).

hay

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx. \tag{3.26}$$

Đây là công thức điển hình của bài toán của phép tính biến phân. Ở đây ta nên chú ý rằng biến phân δq của đại lượng $q(x)$ được định nghĩa như là sự biến thiên $\alpha\eta(x)$ làm thay đổi dạng của nó

$$\delta q(x) = \alpha\eta(x) \Rightarrow \tilde{q}(x) = q(x) + \alpha\eta(x) \tag{3.27}$$

trong đó α là tham số bé tùy ý, $\eta(x)$ là hàm khả vi bất kỳ của biến số.

Vì x là biến độc lập nên $\delta x = 0$. Từ công thức vi phân toàn phần ta có thể viết

$$\begin{aligned}
\delta \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' \right) dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d}{dx}\delta y \right) dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y \right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right)\delta y \right] dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y \right) dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx + \left[\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y \right]_{x_1}^{x_2}.
\end{aligned}$$

Vì biến phân của $y(x)$ tại x_1 và x_2 bằng không (quỹ đạo phải qua điểm (x_1, y_1) và (x_2, y_2)) nên

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx. \tag{3.28}$$

Vậy, cuối cùng ta có

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0. \tag{3.29}$$

Nhưng do δy là biến thiên tùy ý của $y(x)$ nên ta có

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \tag{3.30}$$

Đây là điều kiện cần được thỏa bởi $f(x, y, y')$ để tích phân S của phương trình (3.25) đạt cực trị.

Bây giờ trong trường hợp quỹ đạo cực trị $f(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \; \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Như vậy, từ phương trình (3.30),

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = const. \Rightarrow y = ax + b$$

trong đó a, b là hằng số. Đây là phương trình của một đường thẳng.

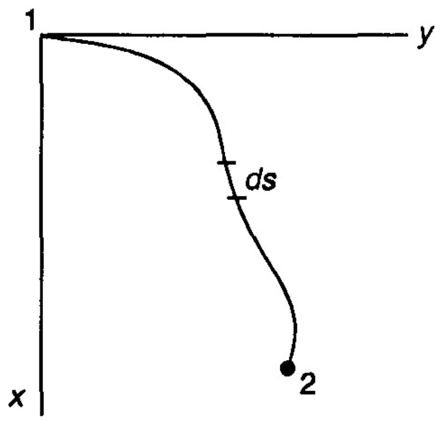
Một thí dụ khác, bài toán đường cong "brachistocrone" (tiếng Hy lạp, có nghĩa là "thời gian ngắn nhất"), tìm một đường cong dọc theo đó chất điểm rơi từ trạng thái nghỉ dưới ảnh hưởng của trọng trường từ vị trí cao nhất đến vị trí thấp nhất trong thời gian ngắn nhất.

Thời gian dành để di chuyển dọc trên đường cong với vận tốc v là

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{v}.$$

Theo định lý bảo toàn năng lượng

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgx \Rightarrow v = \sqrt{2gx}$$



Hình 3.4: Chuyển động của chất điểm từ 1 đến 2.

nên

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gx}} dx.$$

Nếu xem $f(x,y,y') = \sqrt{1+y'^2}/\sqrt{2gx}$ thì từ phương trình (3.30) do

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \; \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2gx}\sqrt{1+y'^2}}$$

ta có

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{\sqrt{2gx}\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}} = const.$$

Đặt

$$\frac{y'^2}{x(1+y'^2)} = C$$

ta suy ra sau một số tính toán đơn giản

$$y' = \sqrt{\frac{Cx}{1-Cx}}.$$

Bằng cách tích phân phương trình vi phân

$$y = \int \sqrt{\frac{Cx}{1-Cx}} dx.$$

Đổi biến, đặt $u = \sqrt{1 - Cx} \Rightarrow Cx = 1 - u^2$, $du = \dfrac{-Cdx}{2\sqrt{1 - Cx}}$

$$y = -\frac{2}{C}\int \sqrt{1 - u^2}du.$$

Đổi biến, đặt $u = \sin\alpha \Rightarrow du = \cos\alpha d\alpha$

$$y = -\frac{2}{C}\int \sqrt{1 - \sin^2\alpha}\cos\alpha d\alpha = -\frac{\alpha}{C} - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{C} + C_1.$$

Trở về biến cũ

$$\begin{aligned} y &= -\frac{\arcsin u}{C} - \frac{u\sqrt{1 - u^2}}{C} + C_1 \\ &= -\frac{\arcsin\sqrt{1 - Cx}}{C} - x\sqrt{1 - Cx} + C_1. \end{aligned}$$

Dùng điều kiện $y(0) = 0$ ta suy ra $C_1 = \pi/(2C)$. Hơn nữa, từ công thức $\arccos x + \arcsin x = \pi/2$ ta có thể viết

$$y = \frac{\arccos\sqrt{1 - Cx}}{C} - x\sqrt{1 - Cx}.$$

Hàm trên biểu diễn một cycloid ngược.

Cách khác: Nếu gọi φ là góc tạo bởi trục x và tiếp tuyến với đường cong thì $dy/dx = \tan\varphi$. Như vậy

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{Cx}{1 - Cx}} = \tan\varphi \quad &\Rightarrow \quad \frac{Cx}{1 - Cx} = \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} \\ &\Rightarrow \quad Cx\cos^2\varphi = \sin^2\varphi - Cx\sin^2\varphi \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{1}{C}\sin^2\varphi = \frac{1}{2C}(1 - \cos 2\varphi). \end{aligned}$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\varphi} = \frac{2}{C}\sin\varphi\cos\varphi \quad &\Rightarrow \quad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\varphi} \\ &\Rightarrow \quad \frac{dy}{d\varphi} = \tan\varphi\frac{2}{C}\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{C}(1 - \cos 2\varphi). \end{aligned}$$

Tích phân

$$y = \frac{1}{2C}(2\varphi - \sin 2\varphi) + C_2.$$

Từ điều kiện $y(0) = 0$ ta suy ra $C_2 = 0$. Vậy đường cong "brachistocrone" là

$$x = \frac{1}{2C}(1 - \cos 2\varphi), \quad y = \frac{1}{2C}(2\varphi - \sin 2\varphi).$$

3.3.2 Kỹ thuật biến phân cho trường hợp nhiều biến độc lập

Bây giờ ta xét hàm f là hàm của nhiều biến độc lập $y_j(x)$, nghĩa là $f = f(x, y_j, y'_j)$ $(j = 1, 2, \dots, d)$.

Trong trường hợp này, ta có

$$
\begin{aligned}
\delta \int_1^2 f(x, y_j, y'_j) dx &= 0 \\
\int_1^2 \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial y_j} \delta y_j + \frac{\partial f}{\partial y'_j} \delta y'_j \right) dx &= 0 \\
\int_1^2 \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial y_j} \delta y_j + \frac{\partial f}{\partial y'_j} \frac{d}{dx} \delta y_j \right) dx &= 0 \\
\int_1^2 \sum_j \left[\frac{\partial f}{\partial y_j} \delta y_j + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_j} \delta y_j \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_j} \right) \delta y_j \right] dx &= 0 \\
\int_1^2 \sum_j \left[\frac{\partial f}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_j} \right) \right] \delta y_j dx + \sum_j \left[\frac{\partial f}{\partial y'_j} \delta y_j \right]_1^2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Do tại các điểm cuối δy_j bằng không nên

$$\int_1^2 \sum_j \left[\frac{\partial f}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_j} \right) \right] \delta y_j dx = 0.$$

Cũng do các biến phân δy_j là tùy ý nên

$$\frac{\partial f}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_j} \right) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, d. \tag{3.31}$$

Phương trình (3.31) được gọi là *phương trình Euler-Lagrange* cho các biến độc lập y_j.

3.3.3 Phát biểu nguyên lý Hamilton

Đối với hệ động lực, ta gọi tích phân trong khoảng thời gian từ t_1 đến t_2

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \tag{3.32}$$

trong đó $L = L(q_s, \dot{q}_s) = T(q_s, \dot{q}_s) - V(q_s)$, là *tác dụng Hamilton*.

Nguyên lý Hamilton phát biểu rằng, *quỹ đạo thực của hệ động lực từ thời điểm t_1 đến thời điểm t_2 làm tác dụng Hamilton S đạt cực trị, nghĩa là*

$$\delta S = 0. \tag{3.33}$$

3.3.4 Chứng minh nguyên lý Hamilton từ phương trình Lagrange

Ta có

$$\begin{aligned}
\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_s \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \right) dt \\
&= \sum_s \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s dt + \left[\frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s dt \right\} \\
&= \sum_s \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_s} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) \right] \delta q_s dt \right\}.
\end{aligned}$$

Ở đây ta dùng $(\delta q_s)_{t=t_1} = (\delta q_s)_{t=t_2} = 0$ $(s = 1, \ldots, d)$.

Từ phương trình Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_s} \quad s = 1, \ldots, d$$

trong đó $L = L(q_s, \dot{q}_s)$ là Lagrangian của cơ hệ chịu ràng buộc hôlônôm, bảo toàn, ta có

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0.$$

Đây là nguyên lý Hamilton.

3.3.5 Chứng minh phương trình Lagrange từ nguyên lý Hamilton

Từ nguyên lý Hamilton

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

ta có

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \sum_s \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \right) dt &= 0 \\
\sum_s \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s dt \right) &= 0 \\
\sum_s \left[\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \frac{d}{dt} (\delta q_s) dt \right] &= 0 \\
\sum_s \left[\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s dt \right] &= 0 \\
\sum_s \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s dt \right\} &= 0.
\end{aligned}$$

Vì $(\delta q_s)_{t=t_1} = (\delta q_s)_{t=t_2} = 0$ $(s = 1, \ldots, d)$ nên

$$\begin{aligned}
\sum_s \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) \right] \delta q_s dt \right\} &= 0 \\
\int_{t_1}^{t_2} \sum_s \left[\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) \right] \delta q_s dt &= 0.
\end{aligned}$$

Do các δq_s là tùy ý nên

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_s} \quad s = 1, \ldots, d.$$

Đây là phương trình Lagrange loại II.

Thí dụ 3.3. Dùng nguyên lý Hamilton tìm phương trình chuyển động của chất điểm khối lượng m di chuyển trên mặt phẳng trong trường lực bảo toàn.
Giải. Gọi $P(x, y)$ là vị trí của chất điểm trên mặt phẳng xy dưới tác dụng của lực bảo toàn

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Hàm Lagrange $L = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V$. Theo nguyên lý Hamilton, ta có

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0.$$

Vì vậy,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (\dot{x}\delta\dot{x} + \dot{y}\delta\dot{y} - \delta V)dt &= 0 \\ \int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{x}\delta\dot{x} + \dot{y}\delta\dot{y} - \frac{\partial V}{\partial x}\delta x - \frac{\partial V}{\partial y}\delta y \right) dt &= 0. \end{aligned}$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}\delta\dot{x}dt &= \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}\frac{d}{dt}(\delta x)dt = [\dot{x}\delta x]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{x}\delta x dt \\ &= -\int_{t_1}^{t_2} \ddot{x}\delta x dt \quad \text{vì } \delta x = 0 \text{ khi } t = t_1,\ t = t_2. \end{aligned}$$

Tương tự,

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{y}\delta\dot{y}dt = -\int_{t_1}^{t_2} \ddot{y}\delta y dt.$$

Cuối cùng ta có

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \delta x + \left(\ddot{y} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \delta y \right] dt = 0$$

Vì $\delta x, \delta y$ là tùy ý và độc lập nên

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x, \quad \ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = F_y.$$

Đây là phương trình chuyển động của điểm.
$\diamond$

Bài tập

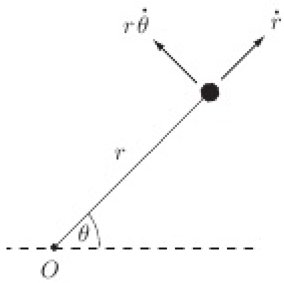
3.1. Một hạt khối lượng m di chuyển dưới tác dụng của lực hấp dẫn do khối lượng M cố định đặt tại gốc. Lấy tọa độ cực r, θ làm tọa độ suy rộng, viết phương trình Lagrange loại hai cho chuyển động của hạt. Tìm một tích phân đầu và giải thích ý nghĩa cơ học của nó.
H.D. Hệ là hạt chỉ chuyển động trong mặt phẳng qua gốc nên có 2 bậc tự do [*Chuyển động của hạt dưới tác dụng của lực xuyên tâm là chuyển động phẳng. Đây là ràng buộc của hạt*]. Tọa độ suy rộng (dùng tọa độ cực có gốc đặt tại gốc).

Động năng của hạt là (xem hình 3.5)

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

Thế năng của hạt (đối với vô cùng) là

$$V = -\frac{GMm}{r}.$$



Hình 3.5: Bài tập 3.1

Hàm Lagrange $L = T - V$:

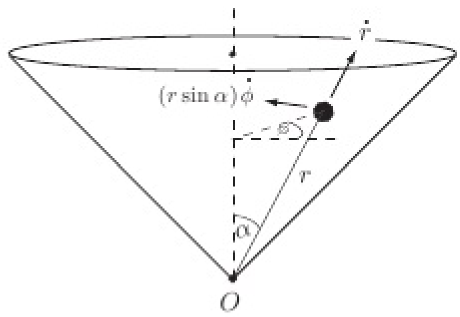
$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{GMm}{r}.$$

Tính các đạo hàm rồi thay vào hệ phương trình Lagrange, ta được:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - m\left(r\dot{\theta}^2 - \frac{MG}{r^2}\right) &= 0, \\ m(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) &= 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0. \end{aligned}$$

Tích phân đầu: $r^2\dot{\theta}$ =const.
Chú ý, ta có thể nhận ra chuyển động có một tích phân đầu từ nhận xét $\partial L/\partial\theta$ (hàm Lagrange không phụ thuộc θ, nghĩa là θ là tọa độ cyclic). Tích phân đầu này chính là mômen động lượng của hạt $mr^2\dot{\theta}$ được bảo toàn.

3.2. Một hạt P khối lượng m trượt trên mặt trong trơn của hình nón tròn xoay có góc ở đỉnh bằng 2α. Trục đối xứng của hình nón thẳng đứng qua đỉnh O hướng xuống. Chọn các tọa độ suy rộng: r, khoảng cách OP, và φ, góc phương vị đối với mặt phẳng cố định đi qua trục hình nón. Viết hệ phương



Hình 3.6: Bài tập 3.2

trình Lagrange. Chứng tỏ rằng φ là tọa độ cyclic và tìm một tích phân đầu. Giải thích ý nghĩa cơ học của tích phân đầu này.
H.D. Hệ là hạt. Vì vectơ bán kính của hạt:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r,$$

trong đó $\mathbf{e}_r = (\sin\alpha\cos\varphi, \sin\alpha\sin\varphi, \cos\alpha)$, nên hệ có 2 bậc tự do. Tọa độ suy rộng: r, θ. Vận tốc của hạt:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r.$$

Để ý rằng,

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi}\sin\alpha(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) = \dot{\varphi}\sin\alpha\mathbf{e}_\varphi.$$

Như vậy, động năng của hạt:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha).$$

Thế năng của hạt (đối với O):

$$V = mgr\cos\alpha.$$

Hàm Lagrange:

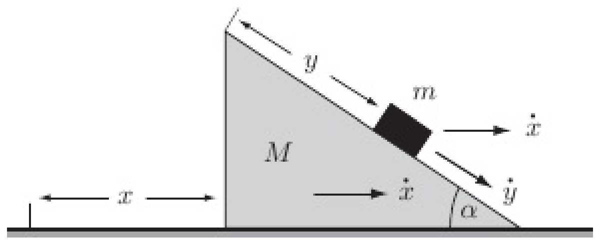
$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha) - mgr\cos\alpha.$$

Hệ phương trình Lagrange (sv nên tính toán tường minh)

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha + g\cos\alpha &= 0, \\ 2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} &= 0 \quad (\sin\alpha > 0). \end{aligned}$$

Do hàm Lagrange không phụ thuộc φ nên φ là tọa độ cyclic. Tích phân đầu: $r^2\dot{\varphi} = \text{const}$. Sv tự giải thích ý nghĩa vật lý.

3.3. Xét vật khối lượng m trượt trên một mặt bên trơn nghiêng góc α của nêm khối lượng M, nêm này lại trượt trên mặt phẳng trơn nằm ngang như hình 3.7.



Hình 3.7: Bài tập 3.3

Toàn bộ chuyển động là phẳng. Viết phương trình Lagrange loại hai cho hệ này và suy ra (i) gia tốc của nêm, và (ii) gia tốc tương đối của vật (đối với nêm).
H.D. Hệ hai bậc tự do. Chọn tọa độ suy rộng: x, chuyển dịch của nêm đối với điểm cố định trên sàn; y, chuyển dịch của vật đối với điểm cố định trên nêm.

Động năng và thế năng của hệ:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha), \\ V &= -mgy\sin\alpha. \end{aligned}$$

Hàm Lagrange:

$$L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha) + mgy\sin\alpha.$$

Tính các đạo hàm

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + (m\cos\alpha)\dot{y}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\ddot{x} + (m\cos\alpha)\ddot{y}; \\ &\frac{\partial L}{\partial y} = mg\sin\alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + (m\cos\alpha)\dot{x}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y} + (m\cos\alpha)\ddot{x}. \end{aligned}$$

Hệ phương trình Lagrange loại hai:

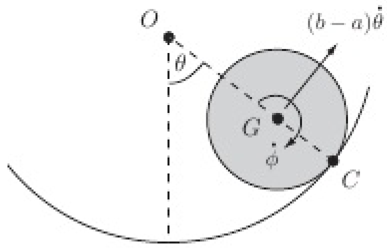
$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + (m\cos\alpha)\ddot{y} &= 0, \\ m\ddot{y} + (m\cos\alpha)\ddot{x} - mg\sin\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Giải ra ta được

$$\ddot{x} = -\frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}, \quad \ddot{y} = -\frac{(M+m)g\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha}.$$

3.4. Hình 3.8 vẽ một hình trụ tâm G bán kính a lăn không trượt trên mặt trong của một mặt trụ cố định tâm O bán kính $b > a$. Viết phương trình Lagrange loại hai, suy ra chu kỳ dao động bé của hình trụ quanh vị trí cân bằng.

H.D. Nếu không có điều kiện "lăn không trượt" thì hệ hai bậc tự do với các



Hình 3.8: Bài tập 3.4

tọa độ suy rộng: θ, góc giữa OG và trục thẳng đứng hướng xuống; φ, góc quay của hình trụ (đối với vị trí tham chiếu nào đó). Điều kiện lăn không trượt cho

$$(b-a)\dot{\theta} = a\dot{\varphi} \Rightarrow (b-a)\theta = a\varphi. \qquad (a)$$

Ở đây ta đã chọn vị trí tham chiếu thích hợp để cho $\varphi = 0$ khi $\theta = 0$. Vậy hệ một bậc tự do. Chọn tọa độ suy rộng là θ.

Động năng của hệ:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m((b-a)\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{3}{4}m(b-a)^2\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

trong đó ta đã dùng phương trình liên kết (a) và công thức tính mômen quán tính của hình trụ $J = ma^2/2$.

Thế năng:

$$V = -mg(b-a)\cos\theta.$$

Hàm Lagrange

$$L = T - V = \frac{3}{4}m(b-a)^2\dot{\theta}^2 + mg(b-a)\cos\theta.$$

Tính các đạo hàm:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg(b-a)\sin\theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3}{2}m(b-a)^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3}{2}m(b-a)^2\ddot{\theta}.$$

Phương trình Lagrange loại hai:

$$\frac{3}{2}m(b-a)^2\ddot{\theta} + mg(b-a)\sin\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2g}{3(b-a)}\sin\theta = 0.$$

(chú ý, phương trình này trùng với phương trình chính xác cho dao động con lắc đơn có chiều dài $l = 3(b-a)/2$).

Với giả thiết dao động bé ta xấp xỉ $\sin\theta \approx \theta$ trong phương trình Lagrange, ta được

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{3(b-a)}\theta = 0.$$

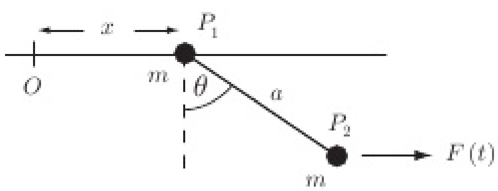
Chu kỳ của dao động theo công thức của con lắc đơn

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{3(b-a)}{2g}}.$$

3.5. Cho hệ như hình 3.9. Đường ray trơn và lực cho trước $F(t)$ tác động lên vật P_2. Bỏ qua trọng lực. Viết hệ phương trình Lagrange loại hai cho hệ.

Trường hợp tính đến trọng lực thì sao?

H.D. Hệ hai bậc tự do. Chọn các tọa độ suy rộng: x, θ như trên hình 3.9.



Hình 3.9: Bài tập 3.5

Điểm đặc biệt ở thí dụ này là lực F tác dụng lên P_2 được cho phụ thuộc thời gian (không bảo toàn) nên ta cần tính các lực suy rộng! Chuyển dịch ảo của P_2 theo phương ngang:

$$\delta x + a\cos\theta\delta\theta.$$

nên công phân tố của lực chủ động (chỉ có lực F) là

$$F(t)(\delta x + a\cos\theta\delta\theta) = Q_x\delta x + Q_\theta\delta\theta,$$

suy ra

$$Q_x = F(t), \quad Q_\theta = (a\cos\theta)F(t).$$

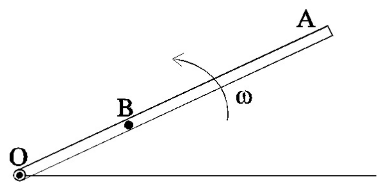
Động năng của hệ:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x} + a\cos\theta\dot{\theta})^2 + (a\sin\theta\dot{\theta})^2] \\ &= m\dot{x}^2 + (ma\cos\theta)\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2. \end{aligned}$$

Hệ phương trình Lagrange loại hai:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[2m\dot{x} + (ma\cos\theta)\dot{\theta}] &= F(t), \\ \frac{d}{dt}[(ma\cos\theta)\dot{x} + ma^2\dot{\theta}] - [-(ma\sin\theta)\dot{x}\dot{\theta}] &= (a\cos\theta)F(t). \end{aligned}$$

3.6. Tìm quy luật chuyển động của viên bi B chuyển động dọc trong ống OA đang quay đều trong mặt phẳng nằm ngang với vận tốc góc ω. Tại thời



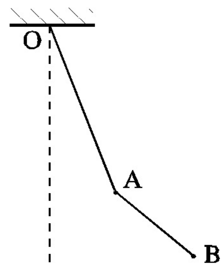
Hình 3.10: Bài tập 3.6

điểm ban đầu viên bi cách O một đoạn bằng A và có vận tốc dọc theo ống bằng không.

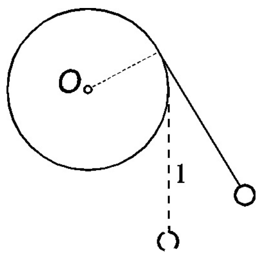
3.7. Viết phương trình Lagrange loại hai cho chuyển động của con lắc kép phẳng (xem hình 3.11). Giả sử khối lượng của A và B bằng nhau và bằng m.

3.8. Viết phương trình Lagrange loại hai cho chuyển động của con lắc gồm chất điểm khối lượng m treo trên dây quấn vào hình trụ cố định bán kính r (xem hình 3.12). Độ dài của phần dây buông thõng tại vị trí cân bằng là l. Bỏ qua khối lượng của dây.

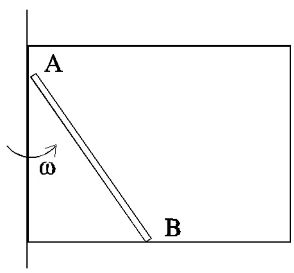
3.9. Các đầu mút của thanh đồng chất AB, có khối lượng m, dài $2a$ trượt không ma sát theo các thanh nằm ngang và thẳng đứng của một khung quay quanh thanh thẳng đứng (xem hình 3.13). Viết phương trình Lagrange loại hai cho chuyển động của thanh khi khung quay với vận tốc góc không đổi ω.



Hình 3.11: Bài tập 3.7



Hình 3.12: Bài tập 3.8



Hình 3.13: Bài tập 3.9

Chương 4

Hệ Hamilton

Chương này trình bày về hệ Hamilton,

$$\dot{p} = -\nabla_q H(p,q), \quad \dot{q} = \nabla_p H(p,q). \tag{4.1}$$

Ở đây, p và q là các vectơ trong $\mathbb{R}^d$, và $H(p,q)$ là hàm vô hướng đủ khả vi. Nó được gọi là "Hamilton" hay "năng lượng toàn phần".

4.1 Phương trình Hamilton

Giả sử vị trí của hệ cơ học với d bậc tự do được mô tả bởi $q = (q_1, \ldots, q_d)^T$ như là tọa độ suy rộng (có thể là tọa độ Descartes, góc, độ dài cung v.v.). Xét hàm Lagrange

$$L = T - V, \tag{4.2}$$

trong đó $T = T(q, \dot{q})$ là động năng của hệ và $V = V(q)$ là thế năng. Chuyển động của hệ được mô tả bởi phương trình Lagrange (loại 2)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q}, \tag{4.3}$$

mà chính là phương trình Lagrange-Euler của bài toán biến phân

$$S(q) = \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t))dt \to \min.$$

Hamilton đã đơn giản hóa cấu trúc của phương trình lagrange và biến chúng thành dạng có tính đối xứng, bởi

⋆ đưa vào biến Poisson, *xung suy rộng* (conjugate momenta)

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(q, \dot{q}) \quad \text{với} \quad k = 1, \ldots, d, \tag{4.4}$$

⋆ và xét hàm Hamilton

$$H := p^T \dot{q} - L(q, \dot{q}) \tag{4.5}$$

như là hàm của p và q, nghĩa là, lấy $H = H(p, q)$ nhận được bằng cách biểu diễn $\dot{q}$ như là hàm của p và q qua (4.4). Ở đây đòi hỏi rằng (4.4) xác định, với mọi q, một song ánh khả vi liên tục $\dot{q} \leftrightarrow p$. Điều kiện cần và đủ để tồn tại song ánh $\dot{q} \leftrightarrow p$ là Jacobian của hệ (4.4) không đồng nhất bằng không

$$\left| \frac{\partial(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}, \ldots, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_d})}{\partial(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_d)} \right| \neq 0.$$

Ánh xạ này được gọi là *biến đổi Legendre.*

Định lý 4.1. *Phương trình Lagrange (4.3) tương đượng với phương trình Hamilton*

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}(p, q), \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}(p, q), \quad k = 1, \ldots, d. \tag{4.6}$$

Chứng minh. Định nghĩa (4.4) và (4.5) cho xung lượng p và cho hàm Hamilton H ngụ ý rằng

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} &= \dot{q}^T + p^T \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} = \dot{q}^T, \\ \frac{\partial H}{\partial q} &= p^T \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}. \end{aligned}$$

Vì vậy, phương trình Lagrange (4.3) tương đương với (4.6). ■

Trường hợp động năng là dạng toàn phương. Nếu $T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}$, trong đó $M(q)$ là ma trận đối xứng xác định dương, ta có $p = M(q)\dot{q}$. Thay biến $\dot{q}$ bởi $M(q)^{-1}p$ vào định nghĩa (4.5), ta được

$$\begin{aligned} H(p, q) &= p^T M(q)^{-1} p - L(q, M(q)^{-1} p) \\ &= p^T M(q)^{-1} p - \frac{1}{2} p^T M(q)^{-1} p + V(q) \\ &= \frac{1}{2} p^T M(q)^{-1} p + V(q) \end{aligned}$$

và hàm Hamilton là $H = T + V$, chính là *năng lượng toàn phần.*

4.2 Bảo toàn năng lượng và tích phân đầu

Định nghĩa 4.1. Hàm không hằng $I(y)$ là một tích phân đầu của $\dot{y} = f(y)$ nếu

$$I'(y)f(y) = 0 \quad \text{với mọi } y. \tag{4.7}$$

Điều này tương đương với tính chất rằng *mọi* nghiệm $y(t)$ của $\dot{y} = f(t)$ thỏa $I(y(t)) = const.$

Thí dụ 4.1 (Sự bảo toàn năng lượng toàn phần)**.** Với hệ Hamilton (4.2) hàm Hamilton $H(p, q)$ là một tích phân đầu, vì

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q}\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) + \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} = 0.$$

◇

Thí dụ 4.2 (Sự bảo toàn động lượng và mô men động lượng)**.** Ta xét hệ gồm N chất điểm tương tác từng cặp bằng lực có thể phụ thuộc vào khoảng cách của các chất điểm. Đây là hệ Hamilton với năng lượng toàn phần

$$H(p, q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{m_i} p_i^T p_i + \sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{i-1} V_{ij}(\|q_i - q_j\|).$$

Ở đây $q_i, p_i \in \mathbb{R}^3$ biểu diễn vị trí và động lượng của chất điểm thứ i có khối lượng m_i, và $V_{ij}(r)(i > j)$ là thế năng tương tác giữa chất điểm thứ i và thứ j. Phương trình chuyển động Hamilton là

$$\dot{q}_i = \frac{1}{m_i} p_i, \quad \dot{p}_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \nu_{ij}(q_i - q_j)$$

trong đó, với $i > j$, ta có $\nu_{ij} = \nu_{ji} = -V'_{ij}(r_{ij})/r_{ij}$ với $r_{ij} = \|q_i - q_j\|$. Sự bảo toàn của động lượng và mô men động lượng,

$$P = \sum_{i=1}^{N} p_i, \quad L = \sum_{i=1}^{N} q_i \times p_i,$$

là một hệ quả của quan hệ đối xứng $\nu_{ij} = \nu_{ji}$,

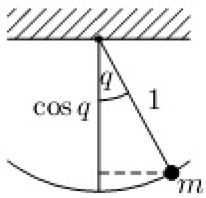
$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= \sum_{i=1}^{N} \dot{p}_i = \sum_{i,j=1, i\neq j}^{N} \nu_{ij}(q_i - q_j) = 0,\\
\frac{dL}{dt} &= \sum_{i=1}^{N} (\dot{q}_i \times p_i + q_i \times \dot{p}_i) = \sum_{i,j=1, i\neq j}^{N} \nu_{ij} q_i \times (q_i - q_j) = 0.
\end{aligned}$$

◇

Thí dụ 4.3 (Con lắc toán học)**.** Con lắc toán học (khối lượng $m = 1$, dây không khối lượng chiều dài $\ell = 1$, gia tốc trọng trường $g = 1$) là hệ một bậc tự do có hàm Hamilton

$$H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 - \cos q,$$

để cho phương trình chuyển động Hamilton (4.2) thành



Hình 4.1: Con lắc toán học.

$$\dot{p} = -\sin q, \quad \dot{q} = p. \tag{4.8}$$

Hình 3 bên dưới chỉ ra một vài đường cong mức (level curve) của $H(p, q)$. Bởi thí dụ 4.1, các đường cong nghiệm của bài toán (4.8) nằm trên các đường mức này.

◇

Thí dụ 4.4 (Bài toán hai vật thể hay bài toán Kepler)**.** Để tính chuyển động của hai vật thể (hành tinh và mặt trời) hấp dẫn lẫn nhau, ta chọn một trong hai vật (mặt trời) như là tâm của hệ tọa độ; thì chuyển động sẽ thực hiện trong mặt phẳng và ta có thể dùng tọa độ $q = (q_1, q_2)$ cho vị trí của vật thể thứ hai. Các định luật Newton, với sự chuẩn hóa thích hợp, cho các phương trình vi phân sau

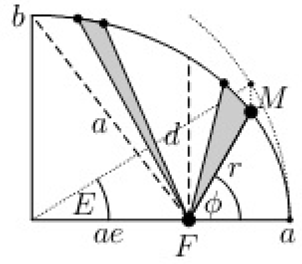
$$\ddot{q}_1 = -\frac{q_1}{(q_1^2 + q_2^2)^{3/2}}, \quad \ddot{q}_2 = -\frac{q_2}{(q_1^2 + q_2^2)^{3/2}}. \tag{4.9}$$

Chúng tương đương với hệ Hamilton có hàm Hamilton

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}, \quad p_i = \dot{q}_i. \tag{4.10}$$

Hành tinh chuyển động theo quỹ đạo elip với mặt trời là một tiêu điểm (định luật thứ nhất của Kepler). Với các giá trị đầu

$$q_1(0) = 1 - e, \quad q_2(0) = 0, \quad \dot{q}_1(0) = 0, \quad \dot{q}_2(0) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tag{4.11}$$



Hình 4.2: Bài toán Kepler.

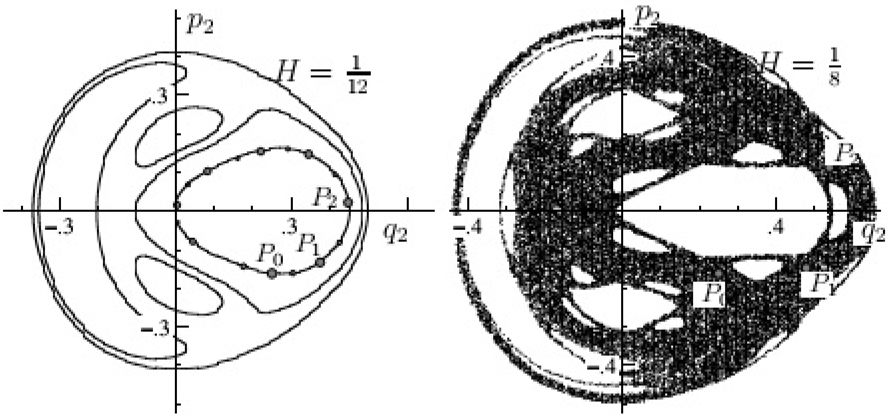
nghiệm là một elip có tâm sai e $(0 \leq e < 1)$, $a = 1$, $b = \sqrt{1-e^2}$, $d = 1 - e^2$, và chu kỳ 2π. Năng lượng toàn phần là $H_0 = -\frac{1}{2}$, và mô men động lượng là $L_0 = \sqrt{1-e^2}$.
◇

Thí dụ 4.5 (Bài toán He1non-Heiles)**.** Đa thức Hamilton theo hai bậc tự do[1]

$$H(p,q) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3}q_2^3 \tag{4.12}$$

là một phương trình vi phân Hamilton có thể có nghiệm hỗn độn (chaotic solution). Hình 4.3 chỉ ra dáng điệu chính quy của các nghiệm khi giá trị của hàm Hamilton là nhỏ, và một dáng điệu hỗn độn với Hamilton lớn.

[1]M. He1non & C. Heiles, *The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments*, Astron. J. 69(1964) 73-79.



Hình 4.3: Lát cắt Poincaré cho $q_1 = 0, p_1 > 0$ của mô hình He1non-Heiles với $H = \frac{1}{12}$ (6 quỹ đạo, hình trái) và $H = \frac{1}{8}$ (1 quỹ đạo, hình phải).

Tài liệu tham khảo

[1] Đặng Đình Áng, Trịnh Anh Ngọc, Ngô Thành Phong, Nhập môn cơ học, NXB ĐHQG-TP.HCM, 2003.

[2] Ngô Thành Phong, Cơ học lý thuyết, NXB ĐHQG-TP.HCM, 2007.

Mục lục