Thuviendientu.org

Bách Khoa Online: hutonline.net

Bách Khoa Online: hutonline.net

BACHKHOA FORUM

Tìm kiếm & download ebook: bookilook.com

Bookilook

Tìm kiếm & download ebook: bookilook.com

Thuviendientu.org

Bách Khoa Online: hutonline.net

Chương 2

LÝ THUYẾT VỀ HỆ LỰC

Trong tĩnh học có hai bài toán cơ bản: thu gọn hệ lực và xác định điều kiện cân bằng của hệ lực. Chương này giới thiệu nội dung của hai bài toán cơ bản nói trên.

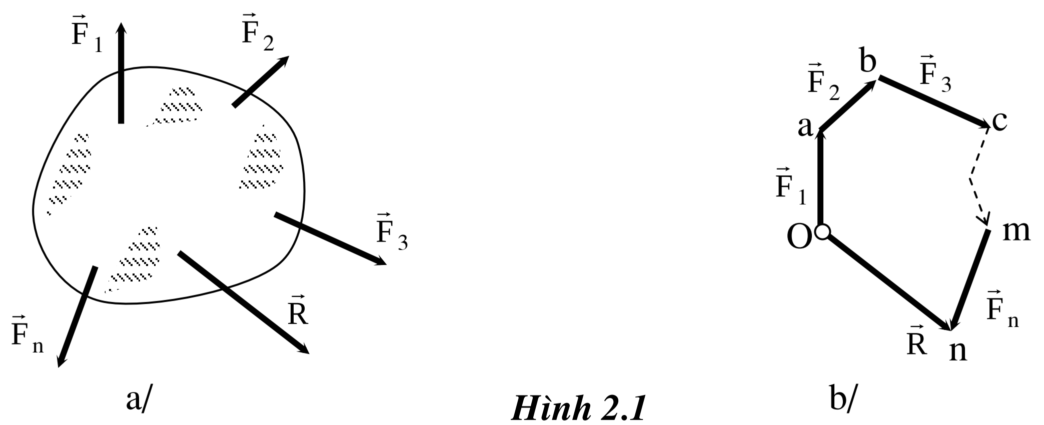
2.1 ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CƠ BẢN CỦA HỆ LỰC

Hệ lực có hai đặc trưng hình học cơ bản là véc tơ chính và mô men chính.

2.1.1. Véc tơ chính

Xét hệ lực ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$,.. $\vec{F}_n$) tác dụng lên vật rắn (hình 2.1a).

Véc tơ chính của hệ lực là véc tơ tổng hình học các véc tơ biểu diễn các lực trong hệ (hình 2.1b)



Hình 2.1

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad (2\text{-}1)$$

Hình chiếu véc tơ $\vec{R}$ lên các trục toạ độ oxyz được xác định qua hình chiếu các lực trong hệ:

$$\vec{R}_x = x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^{n} X_i;$$

Tìm kiếm & download ebook: bookilook.com

Thuviendientu.org

Bách Khoa Online: hutonline.net

$$\vec{R}_y = y_1 + y_2 + ... + y_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i;$$

$$\vec{R}_z = z_1 + z_2 + ... + z_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i.$$

Từ đó có thể xác định độ lớn, phương, chiều véc tơ chính theo các biểu thức sau:

$$\vec{R} = \sqrt{R^2{}_x + R^2{}_y + R^2{}_z};$$

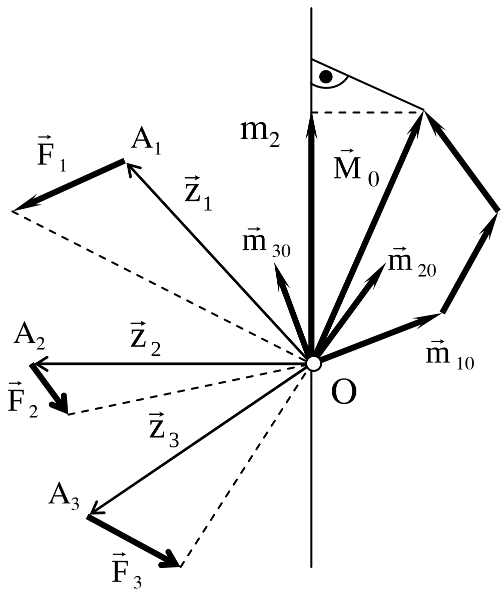
$$\cos(R,X) = \frac{R_x}{R}; \qquad \cos(R,Y) = \frac{R_y}{R}; \qquad \cos(R,Z) = \frac{R_z}{R}.$$

Véc tơ chính là một véc tơ tự do.

2.1.2. Mô men chính của hệ lực

Véc tơ mô men chính của hệ lực đối với tâm O là véc tơ tổng của các véc tơ mô men các lực trong hệ lấy đối với tâm O (hình 2.2). Nếu ký hiệu mô men chính là $\vec{M}_o$ ta có

$$\vec{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_o(\vec{F}_i) \qquad (2\text{-}2)$$



Hình 2.2

Hình chiếu của véc tơ mô men chính $\vec{M}_o$ trên các trục toạ độ oxyz được xác định qua mô men các lực trong hệ lấy đối với các trục đó:

Tìm kiếm & download ebook: bookilook.com

Thuviendientu.org

Bách Khoa Online: hutonline.net

$$M_x = m_x(\vec{F}_1) + m_x(\vec{F}_2) + ... + m_x(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^{n} m_x(\vec{F}_i);$$

$$M_y = m_y(\vec{F}_1) + m_y(\vec{F}_2) + ... + m_y(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^{n} m_y(\vec{F}_i);$$

$$M_z = m_z(\vec{F}_1) + m_z(\vec{F}_2) + ... + m_z(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^{n} m_z(\vec{F}_i).$$

Giá trị và phương chiều véc tơ mô men chính được xác định theo các biểu thức sau:

$$M_o = \sqrt{M^2{}_x + M^2{}_y + M^2{}_z}$$

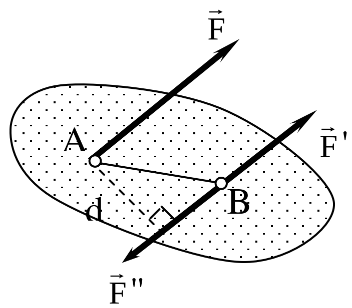
$$\cos(M_o,x) = \frac{M_x}{M_o}; \qquad \cos(M_o,y) = \frac{M_y}{M_o}; \qquad \cos(M_o,z) = \frac{M_z}{M_o}.$$

Khác với véc tơ chính $\vec{R}$ véc tơ mô men chính $\vec{M}_o$ là véc tơ buộc nó phụ thuộc vào tâm O. Nói cách khác véc tơ chính là một đại lượng bất biến còn véc tơ mô men chính là đại lượng biến đổi theo tâm thu gọn O.

2.2. THU GỌN HỆ LỰC

Thu gọn hệ lực là đưa hệ lực về dạng đơn giản hơn. Để thực hiện thu gọn hệ lực trước hết dựa vào định lý rời lực song song trình bày dưới đây.

2.2.1. Định lý 2.1 : Tác dụng của lực lên vật rắn sẽ không thay đổi nếu ta rời song song nó tới một điểm đặt khác trên vật và thêm vào đó một ngẫu lực phụ



Hình 2.3

Tìm kiếm & download ebook: bookilook.com

Thuviendientu.org

Bách Khoa Online: hutonline.net

có mô men bằng mô men của lực đã cho lấy đối với điểm cần rời đến.

Chứng minh: Xét vật rắn chịu tác dụng lực $\vec{F}$ đặt tại A. Tại điểm B trên vật đặt thêm một cặp lực cân bằng $(\vec{F}', \vec{F}'')$ trong đó $\vec{F}' = \vec{F}$ còn $\vec{F}'' = -\vec{F}$. (xem hình 2.3).

Theo tiên đề 2 có: $\vec{F} \sim (\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$.

Hệ ba lực $(\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$ có hai lực $(\vec{F}, \vec{F}'')$ tạo thành một ngẫu lực có mô men $\vec{m} = \vec{m}_B(F)$ (theo định nghĩa mô men của ngẫu lực).

Ta đã chứng minh được $\vec{F} \sim \vec{F}'$ + ngẫu lực $(\vec{F}, \vec{F}'')$

2.2.2 Thu gọn hệ lực bất kỳ về một tâm

a. **Định lý 2.2**: Hệ lực bất kỳ luôn luôn tương đương với một lực bằng véc tơ chính đặt tại điểm O chọn tuỳ ý và một ngẫu lực có mô men bằng mô men chính của hệ lực đối với tâm O đó.

Chứng minh: Cho hệ lực bất kỳ $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ tác dụng lên vật rắn. Chọn điểm O tuỳ ý trên vật, áp dụng định lý rời lực song song đưa các lực của hệ về đặt tại O. Kết quả cho ta hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)_o$ đặt tại O và một hệ các ngẫu lực phụ có mô men là $\vec{m}_1 = \vec{m}_o(\vec{F}_1)$, $\vec{m}_2 = \vec{m}_o(\vec{F}_2)$, ... $\vec{m}_n = \vec{m}_o(\vec{F}_n)$ (hình 2.4).

Hợp từng đôi lực nhờ tiên đề 3 có thể đưa hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ... \vec{F}_n)_o$ về tương đương với một lực $\vec{R}$.

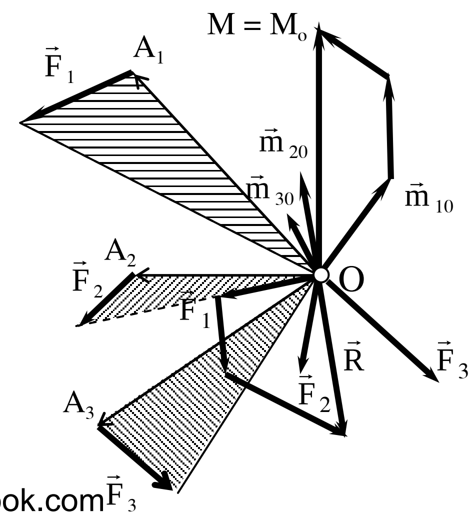
Cụ thể có:

$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim \vec{R}_1$ trong đó $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

$(\vec{R}_1, \vec{F}_3) \sim \vec{R}_2$ trong đó $\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$

....

$(\vec{R}_{(n-1)}, \vec{F}_n) \sim \vec{R}$



Tìm kiếm & download ebook: bookilook.com

Hình 2.4

Thuviendientu.org

Bách Khoa Online: hutonline.net

trong đó $\vec{R} = \vec{R}_{(n-2)} + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$

Hợp lực $\vec{R}$ của các lực đặt tại O là véc tơ chính $\vec{R}_0$ của hệ lực.

Các ngẫu lực phụ cũng có thể thay thế bằng một ngẫu lực tổng hợp theo cách lần lượt hợp từng đôi ngẫu lực như đã trình bày ở chương 1. Ngẫu lực tổng hợp của hệ ngẫu lực phụ có mô men $\vec{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_o(\vec{F}_i)$. Đây là mô men chính của hệ lực đã cho đối với tâm O

Theo định lý 2.2, trong trường hợp tổng quát khi thu gọn hệ lực về tâm O bất kỳ ta được một véc tơ chính và một mô men chính. Véc tơ chính bằng tổng hình học các lực trong hệ và là một đại lượng không đổi còn mô men chính bằng tổng mô men các lực trong hệ lấy đối với tâm thu gọn và là đại lượng biến đổi theo tâm thu gọn.

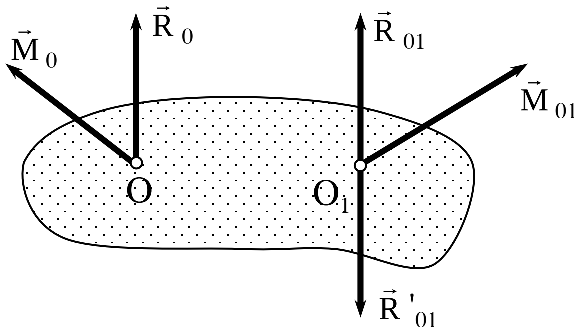
Để xác định quy luật biến đổi của mô men chính đối với các tâm thu gọn khác nhau ta thực hiện thu gọn hệ lực về hai tâm O và O_1 bất kỳ (hình 2.4a).

Thực hiện thu gọn hệ về tâm O ta được $\vec{R}_0$ và $\vec{M}_o$.

Trên vật ta lấy một tâm O_1 khác O sau đó rời lực $\vec{R}_o$ về O_1 ta được

$\vec{R}_o \sim \vec{R}_{o1}$ + ngẫu lực $(\vec{R}_o, \vec{R}'_{o1})$.

Suy ra $(\vec{R}_o, \vec{M}_o) \sim \vec{R}_{o1}$ + ngẫu lực $(\vec{R}_o, \vec{R}'_{o1}) + \vec{M}_o$



Hình 2.4a

Nếu thu gọn hệ về O_1 ta được $\vec{M}_{o1}$ và $\vec{R}_{o1}$.

Điều tất nhiên phải có là :

$(\vec{R}_o, \vec{M}_o) \sim (\vec{R}_{o1}, \vec{M}_{o1})$.

Thay kết quả chứng minh ở trên ta có:

Tìm kiếm & download ebook: bookilook.com

Thuviendientu.org

Bách Khoa Online: hutonline.net

$(\vec{R}_o, \vec{M}_o) \sim R_{o1} + (\vec{R}_o, \vec{R}'_{o1}) + M_o \sim (\vec{R}_o + M_{o1})$

hay $\vec{M}_{01} \sim \vec{M}_o + (\vec{R}_o, \vec{R}'_{01})$ (2.3)

Ngẫu lực $(\vec{R}_o, \vec{R}_{01})$ có mô men $\vec{M}' = m_{o1.}(R_o)$

<u>Kết luận</u>: Khi thay đổi tâm thu gọn véc tơ mô men chính thay đổi một đại lượng M' bằng mô men của véc tơ chính đặt ở tâm trước lấy đối với tâm sau.

2.2.3. Các dạng chuẩn của hệ lực

Kết quả thu gọn hệ lực về một tâm có thể xẩy ra 6 trường hợp sau

2.2.3.1. Véc tơ chính và mô men chính đều bằng không

$\vec{R} = 0$; $\vec{M}_o = 0$

Hệ lực khảo sát cân bằng.

2.2.3.2. Véc tơ chính bằng không còn mô men chính khác không

$\vec{R} = 0$; $\vec{M}_o \neq 0$

Hệ lực tương đương với một ngẫu lực có mô men bằng mô men chính.

2.2.3.3. Véc tơ chính khác không còn mô men chính bằng không

$\vec{R} \neq 0$; $\vec{M}_o = 0$

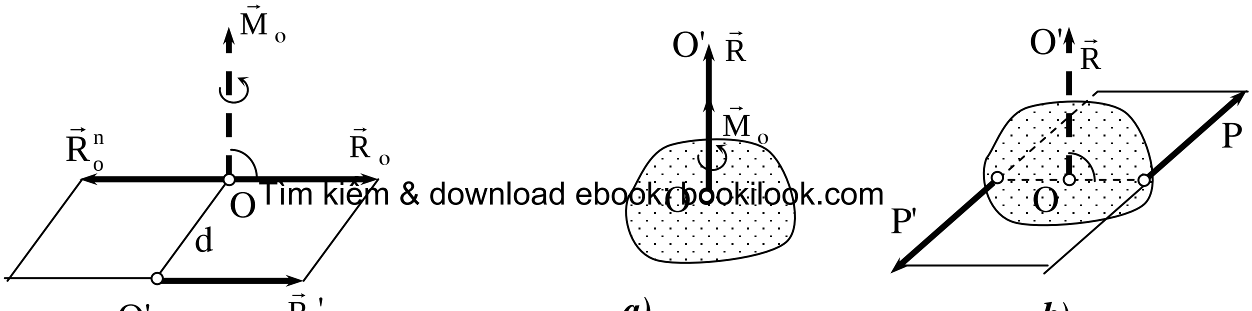
Hệ có một hợp lực bằng véc tơ chính.

2.2.3.4. Véc tơ chính và mô men chính đều khác không nhưng vuông góc với nhau (hình 2.5)

$\vec{R} \neq 0$; $\vec{M}_o \neq 0$ và $\vec{R} \perp \vec{M}_o$

Trong trường hợp này thay thế mô men chính $\vec{M}_o$ bằng ngẫu lực $(\vec{R}', \vec{R}'')$ với điều kiện:

$\vec{R}' = \vec{R}$; $\vec{R}'' = -\vec{R}$ và $\vec{M}_o = \vec{m}_o(\vec{R}')$



Tìm kiếm & download ebook: bookilook.com

Thuviendientu.org

Bách Khoa Online: hutonline.net

Ta có ($\vec{R}$, $\vec{M}_o$) ~ ($\vec{R}$, $\vec{R}'$, $\vec{R}''$).

Theo tiên đề 1 $\vec{R}_o$ và $\vec{R}''$ cân bằng do đó có thể bớt đi và cuối cùng hệ còn lại một lực bằng véc tơ chính nhưng đặt tại O_1. Nói khác đi hệ có một hợp lực đặt tại O_1.

2.2.3.5. Hai véc tơ chính và mô men chính khác không nhưng song song với nhau (hình 2.6).

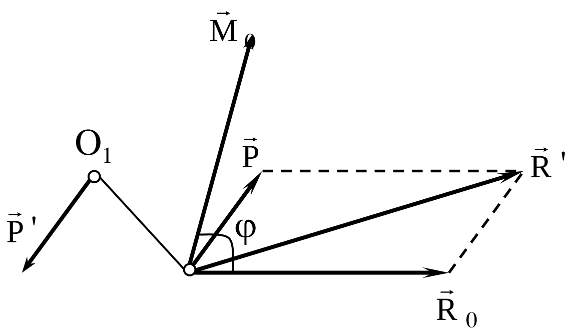
$\vec{R}_o \neq 0$; $\vec{M}_o \neq 0$ và $\vec{R}_o // \vec{M}_o$

Trong trường hợp này nếu thay $\vec{M}_o$ bằng một ngẫu lực ($\vec{P}$ $\vec{P}'$) mặt phẳng của ngẫu này vuông góc với véc tơ chính $\vec{R}$.

Hệ được gọi là hệ vít động lực. Nếu véc tơ $\vec{R}$ song song cùng chiều với véc tơ $\vec{M}_o$ hệ gọi là hệ vít động lực thuận (phải) và ngược lại gọi là hệ vít động lực nghịch (trái). Hình 2.6 biểu diễn vít động lực thuận

2.2.3.6. Hai véc tơ chính và mô men chính khác không và hợp lực với nhau một góc φ bất kỳ (hình 2.7)

Trường hợp này nếu thay thế véc tơ $\vec{M}_o$ bằng một ngẫu lực ($\vec{P}$ $\vec{P}'$) trong đó cólực $\vec{P}$ đặt tại O còn lực $\vec{P}'$ đặt tại O_1 sao cho $m_o(P) = \vec{M}_o$. Rõ ràng mặt phẳng tác dụng của ngẫu lực ($\vec{P}$ $\vec{P}'$) không vuông góc với $\vec{R}_o$. Mặt khác tại O có thể hợp hai lực $\vec{P}$ và $\vec{R}_o$ thành một lực $\vec{R}'$. Như



Hình 2.7

Tìm kiếm & download ebook: bookilook.com

Thuviendientu.org

vậy đã đưa hệ về tương đương với hai lực $\vec{P}'$, $\vec{R}'$ hai lực này chéo nhau.

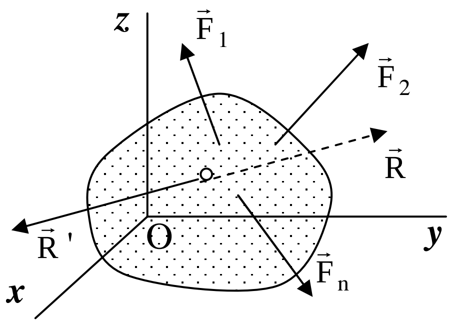
2.2.4. Định lý Va ri nhông

Định lý: Khi hệ lực có hợp lực $\vec{R}$ thì mô men của $\vec{R}$ đối với một tâm hay một trục nào đó bằng tổng mô men của các lực trong hệ lấy đối với tâm hay trục đó.

$$\vec{m}_o(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{n}\vec{m}_o(\vec{F}_i)$$

$$\vec{m}_z(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{n}\vec{m}_z(\vec{F}_i) \qquad (2.4)$$

Chứng minh: Cho hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ tác dụng lên vật rắn. Gọi $\vec{R}$ là hợp lực của hệ (hình 2.8).



Hình 2.8

Tại điểm C trên đường tác dụng của hợp lực $\vec{R}$ đặt thêm lực $\vec{R}' = -\vec{R}$. Hệ lực đã cho cùng với $\vec{R}'$ tạo thành một hệ lực cân bằng:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ... \vec{F}_n, +\vec{R}') \sim 0$$

Khi thu gọn hệ lực này về một tâm O bất kỳ ta được một véc tơ chính và một mô men chính. Các véc tơ này bằng không vì hệ cân bằng, ta có:

$$\vec{M}_o = \sum_{i=1}^{n}\vec{m}_o(\vec{F}_i) + \vec{m}_o(\vec{R}') = 0$$

Thay $\vec{R}' = -\vec{R}$ ta có:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{m}_o(\vec{F}_i) - \vec{m}_o(\vec{R}) = 0$$

Hay $m_o(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{n}\vec{m}_o(\vec{F}_i)$

Chiếu phương trình trên lên trục oz sẽ được:

Tìm kiếm & download ebook: bookilook.com

Thuviendientu.org

$$m_z(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{n} m_z(\vec{F}_i)$$

Định lý đã được chứng minh

2.2.5. Kết quả thu gọn các hệ lực đặc biệt

2.2.5.1. Hệ lực đồng quy

Hệ lực đồng quy là hệ lực có đường tác dụng của các lực giao nhau tại một điểm. Trong trường hợp hệ lực đồng quy nếu chọn tâm thu gọn là điểm đồng quy kết quả thu gọn sẽ cho véc tơ chính đúng bằng hợp lực còn mô men chính sẽ bằng không.

$R_0 \neq 0, \quad M_o = 0$ với O là điểm đồng quy.

2.2.5.2. Hệ ngẫu lực

Nếu hệ chỉ bao gồm các ngẫu lực, khi thu gọn hệ sẽ được một ngẫu lực tổng hợp có mô men đúng bằng mô men chính của hệ.

$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$; m_i là mô men của ngẫu lực thứ i và n là số ngẫu lực của hệ.

2.2.5.3. Hệ lực phẳng

Hệ lực phẳng là hệ có các lực cùng nằm trong một mặt phẳng.

Nếu chọn tâm thu gọn nằm trong mặt phẳng của hệ thì kết quả thu gọn vẫn cho ta một mô men chính $\vec{M}_o$ và véc tơ chính $\vec{R}_o$. Véc tơ chính $\vec{R}$ nằm trong mặt phẳng của hệ còn mô men chính $\vec{M}_o$ vuông góc với mặt phẳng của hệ. Theo kết quả thu gọn ở dạng chuẩn ta thấy: hệ lực phẳng khi có véc tơ chính $\vec{R}$ và mô men chính $\vec{M}_o$ khác không bao giờ cũng có một hợp lực nằm trong mặt phẳng của hệ.

2.2.5.4. Hệ lực song song

Hệ lực song song là hệ lực có đường tác dụng song song với nhau.

Kết quả thu gọn về một tâm bất kỳ cho ta một véc tơ chính $\vec{R}$ và một mô men chính $\vec{M}_o$. Véc tơ chính có đặc điểm song song với các lực của hệ.

Tìm kiếm & download ebook: bookilook.com

Thuviendientu.org

Bách Khoa Online: hutonline.net

2.3. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG VÀ PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰNG CỦA HỆ LỰC

2.3.1. Điều kiện cân bằng và phương trình cân bằng của hệ lực bất kỳ trong không gian

2.3.1.1. Điều kiện cân bằng

Điều kiện cân bằng của hệ lực bất kỳ trong không gian là véc tơ chính và mô men chính của nó khi thu gọn về một tâm bất kỳ đều bằng không.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_1 = 0$$

$$\vec{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_o(\vec{F}_1) = 0 \qquad (2\text{-}5)$$

2.3.1.2. Phương trình cân bằng

Nếu gọi R_x, R_y, R_z và M_x, M_y, M_z là hình chiếu của các véc tơ chính và mô men chính lên các trục toạ độ oxyz thì điều kiện (2-5) có thể biểu diễn bằng các phương trình đại số gọi là phương trình cân bằng của hệ lực bất kỳ trong không gian. Ta có:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0, \quad R_z = \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$$

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_x(\vec{F}_i) = 0, \quad M_y = \sum_{i=1}^{n} m_y(\vec{F}_i) = 0, \quad M_z = \sum_{i=1}^{n} m_z(\vec{F}_i) = 0. \qquad (2\text{-}6)$$

Trong các phương trình trên X_i, Y_i, Z_i là thành phần hình chiếu của lực F_i; $m_x(\vec{F}_i)$, $m_y(\vec{F}_i)$, $m_z(\vec{F}_i)$ là mô men của các lực $\vec{F}_i$ đối với các trục của hệ tọa độ oxyz. Ba phương trình đầu gọi là ba phương trình hình chiếu còn 3 phương trình sau gọi là 3 phương trình mô men.

2.3.2. Phương trình cân bằng của các hệ lực đặc biệt

2.3.2.1 Hệ lực đồng quy

Nếu chọn tâm thu gọn là điểm đồng quy O thì mô men chính $\vec{M}_o$ sẽ bằng không do đó 3 phương trình mô men luôn luôn tự nghiệm. Vậy phương trình cân bằng của hệ lực đồng quy chỉ còn:

Tìm kiếm & download ebook: bookilook.com

Thuviendientu.org

Bách Khoa Online: hutonline.net

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \qquad (2\text{-}7)$$

$$R_z = \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$$

2.3.2.2. Hệ ngẫu lực

Khi thu gọn hệ ngẫu lực về một tâm ta thấy ngay véc tơ chính $\vec{R}_0 = 0$ điều đó có nghĩa các phương trình hình chiếu luôn luôn tự nghiệm. Phương trình cân bằng của hệ ngẫu lực chỉ còn lại ba phương trình mô men sau:

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_x(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_{ix} = 0,$$

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_y(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_{iy} = 0, \qquad (2\text{-}8)$$

$$M_z = \sum_{i=1}^{n} m_z(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_{iz} = 0.$$

Ở đây m_{ix}, m_{iy}, m_{iz} là hình chiếu lên các trục hệ tọa độ oxyz của véc tơ mô men $\vec{m}_i$ của ngẫu lực thứ i.

2.3.2.3. Hệ lực song song

Chọn hệ toạ độ oxyz sao cho oz song song với các lực. Khi đó các hình chiếu R_x, R_y của véc tơ chính và M_z của mô men chính luôn luôn bằng không.

Vì vậy phương trình cân bằng của hệ lực song song chỉ còn lại ba phương trình sau:

$$R_z = \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0;$$

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_x(\vec{F}_i) = 0; \qquad (2\text{-}9)$$

Tìm kiếm & download ebook: bookilook.com

Thuviendientu.org

Bách Khoa Online: hutonline.net

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_y(\vec{F}_i) = 0$$

Trong đó phương trình đầu là phương trình hình chiếu còn hai phương trình cuối là phương trình mô men.

2.3.2.4. Hệ lực phẳng

Cần lưu ý rằng trong hệ lực phẳng véc tơ chính $\vec{R}$ và mô men chính $\vec{M}$ luôn luôn vuông góc với nhau, nghĩa là hệ lực phẳng luôn luôn có hợp lực $\vec{R}$ nằm trong mặt phẳng của hệ đã cho. Để đảm bảo điều kiện hợp lực của hệ bằng không tức là điều kiện cân bằng của hệ ta có thể viết phương trình cân bằng dưới 3 dạng khác nhau.

1. Dạng hai phương trình hình chiếu một phương trình mô men:

Để hệ lực cân bằng cũng như các trường hợp khác phải có R = 0 và M_o = 0. Nếu chọn hệ toạ độ oxy là mặt phẳng chứa các lực của hệ ta thấy ngay các phương trình $R_z = \sum_{i=1}^{n} z_i = 0$; $M_x = \sum_{i=1}^{n} m_x(F_i) = 0$ và $M_y = \sum_{i=1}^{n} m_y(F_i) = 0$ là luôn luôn tự nghiệm vì vậy phương trình cân bằng chỉ còn :

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} X_i = 0;$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0; \qquad (2\text{-}10)$$

$$M_z = \sum_{i=1}^{n} m_z(F_i).$$

Hai phương trình đầu là phương trình hình chiếu còn phương trình thứ ba là phương trình mô men. Cần chú ý vì các lực cùng nằm trong mặt phẳng oxy do đó $M_z = \sum_{i=1}^{n} m_z(F_i)$ chính là tổng mô men đại số của các lực đối với tâm O.

$$M_z = \sum_{i=1}^{n} \pm m_z(F_i)$$

Tìm kiếm & download ebook: bookilook.com

Thuviendientu.org

2. Dạng một phương trình hình chiếu và hai phương trình mô men

Điều kiện hợp lực $\vec{R}$ của hệ bằng không có thể biểu diễn bằng ba phương trình sau đây:

$$R_z = \sum_{i=1}^{n} X_i = 0;$$

$$M_A = \sum_{i=1}^{n} \pm m_A(F_i) = 0; \qquad (2\text{-}11)$$

$$M_B = \sum_{i=1}^{n} \pm m_B(F_i) = 0$$

Với điều kiện trục x không vuông góc với AB.

Thạt vậy từ phương trình (1) cho thấy hợp lực $\vec{R}$ của hệ lực bằng không hoặc vuông góc với trục x.

Theo định lý Va ri nhông ,từ phương trình (2) ta thấy hợp lực $\vec{R}$ hoặc bằng không hoặc đị qua A.

Từ phương trình (3) ta cũng thấy hợp lực $\vec{R}$ của hệ bằng không hoặc đi qua B.

Kết hợp cả ba phương trình ta thấy hợp lực của hệ hoặc bằng không hoặc phải đi qua hai điểm A,B và vuông góc với trục x (không vuông góc với AB). Điều kiện hợp lực vừa qua A, B và vừa vuông góc với trục x là không thực hiện được vì trái với giả thiết.

Như vậy nếu hệ thoả mãn phương trình (2-11) thì hợp lực của nó sẽ bằng không nghĩa là hệ lực cân bằng.

3. Dạng ba phương trình mô men đối với 3 điểm

Ngoài hai dạng phương trình cân bằng trên hệ lực phẳng còn có phương trình cân bằng theo dạng sau:

$$M_A = \sum_{i=1}^{n} \pm m_A(\vec{F}_i) = 0$$

Thuviendientu.org

Bách Khoa Online: hutonline.net

$$M_B = \sum_{i=1}^{n} \pm m_B(\vec{F}_i) = 0 \qquad (2\text{-}12)$$

$$M_C = \sum_{i=1}^{n} \pm m_o(\vec{F}_i) = 0$$

Với điều kiện A, B, C không thẳng hàng.

Thật vậy, nếu hệ lực phẳng thoả mãn phương trình $M_A = \sum \pm m_A(\vec{F}) = 0$ thì theo định lý Va ri nhông hợp lực của hệ sẽ bằng không hoặc đi qua A. Cũng lý luận tương tự ta thấy để thoả mãn $M_B = 0$ và $M_c = 0$ thì hợp lực phải bằng không hoặc phải đi qua B, đi qua C.

Vì chọn 3 điểm A, B, C không thẳng hàng nên điều kiện để hợp lực qua 3 điểm là không thực hiện được. Chỉ có thể hợp lực bằng không, có nghĩa là nếu thoả mãn hệ ba phương trình (2-12) hệ lực phẳng cho sẽ cân bằng.

2.4. BÀI TOÁN CÂN BẰNG CỦA VẬT RẮN

Vật rắn cân bằng khi hệ lực tác dụng lên nó bao gồm các lực đã cho và phản lực liên kết cân bằng.

Khi giải bài toán cân bằng của vật rắn có thể áp dụng phương pháp giải tích hoặc phương pháp hình học nhưng phổ biến và có hiệu quả nhất là phương pháp giải tích.

Giải bài toán cân bằng của vật thường tiến hành theo các bước sau:

1. Chọn vật khảo sát: vật khảo sát phải là vật rắn mà sự cân bằng của nó cần thiết cho yêu cầu xác định của bài toán. Nếu như bài toán tìm phản lực liên kết thì vật khảo sát phải là vật chịu tác dụng của phản lực liên kết cần tìm, nếu là bài toán tìm điều kiện cân bằng của vật thì vật khảo sát phải chính là vật đó.

2. Giải phóng vật khảo sát khỏi liên kết và xem đó là vật tự do dưới tác dụng của các lực đã cho và phản lực liên kết.

3. Thiết lập điều kiện cân bằng cuả vật bởi các phương trình cân bằng của hệ lực tác dụng lên vật khảo sát bao gồm các lực cho và phản lực liên kết.

Tìm kiếm & download ebook: bookilook.com

Thuviendientu.org

Bách Khoa Online: hutonline.net

4. Giải hệ phương trình cân bằng để xác định trị số và phương chiều của các phản lực liên kết hoặc thiết lập mối quan hệ giữa các lực để đảm bảo điều kiện cân bằng cho vật khảo sát .

5. Nhận xét các kết quả thu được.

Cần chú ý rằng chiều của các phản lực thường chưa được xác định vì thế lúc đầu phải tự chọn chiều. Dựa vào kết quả giải hệ phương trình cân bằng ta có thể xác định chiều của các phản lực chọn đúng hay sai. Nếu các phản lực liên kết cho trị số dương thì chiều chọn là đúng và nếu trị số âm thì chiều phải đảo lại . Mặt khác cũng cần lưu ý rằng bài toán có trường hợp giải được (bài toán tĩnh định) khi số ẩn số cần xác định nhỏ hơn hoặc bằng số phương trình cân bằng. Có trường hợp không giải được (bài toán siêu tĩnh) khi ẩn số cần tìm lớn hơn số phương trình cân bằng.

Thí du 2.1. Cột điện OA chôn thẳng đứng trên mặt đất và được giữ bởi hai sợi dây AB và AD hợp với cột điện một góc $\alpha = 30^0$ (xem hình 2-8a) Góc giữa mặt phẳng AOD và mặt phẳng AOB là $\varphi = 60^0$. Tại đầu A của cột điện có hai nhánh dây điện mắc song song với trục ox và oy. Các nhánh dây này có lực kéo là P_1 và P_2 như hình vẽ. Cho biết $P_1 = P_2 = P = 100$kN.

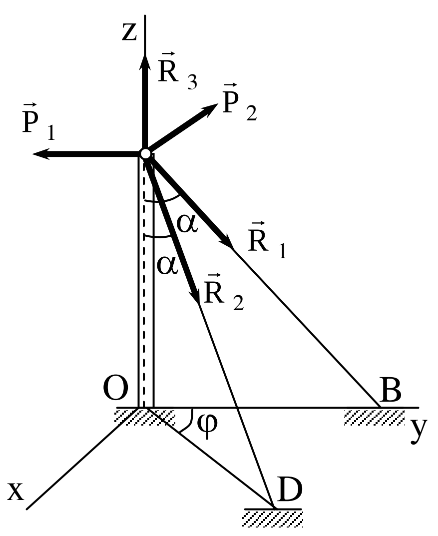
Xác định lực tác dụng dọc trong cột điện và trong các dây căng AD, AB.

Bài giải:

Chọn vật khảo sát là đầu A của cột điện.

Liên kết đặt lên đầu A là hai sợi dây AB, AD và phần cột điện còn lại.

Gọi phản lực liên kết trong dây AB là R_1, trong dây AD là $\vec{R}_2$ và lực dọc cột là $\vec{R}_3$ với chiều chọn như hình vẽ 2-8. Khi giải phóng điểm A khỏi liên kết điểm A sẽ chịu tác dụng của các lực P_1, P_2 và các phản lực R_1R_2



Hình 2.8a

Tìm kiếm & download ebook: bookilook.com

Thuviendientu.org

$\vec{R}_3$. Điều kiện để đầu A cân bằng là hệ 5 lực tác dụng lên nó cân bằng. Ta có:

$(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3) \sim 0$. Hệ lực này đồng quy tại A do đó phương trình cân bằng thiết lập theo phương trình (2.7)

Để tránh nhầm lẫn ta lập bảng (2-1) hình chiếu các lực lên 3 trục của hệ tọa độ oxyz như sau:

Bảng 2-1

F_1	P_1	P_2	R_1	R_2	R_3
x_1	0	-P	0	$R_2\sin\alpha\sin\varphi$	0
y_1	-P	0	$R_1\sin\alpha$	$R_2\sin\alpha\cos\varphi$	0
z_1	0	0	$-R_1\cos\alpha$	$-R_2\cos\alpha$	R_3

Phương trình cân bằng viết được:

$\sum Xi = -P + R_2\sin\alpha\sin\varphi = 0;$ (a)

$\sum Yi = -P + R_1\sin\alpha + R_2\sin\alpha\cos\varphi = 0$ (b)

$\sum Zi = -R_1\cos\alpha - R_2\cos\alpha + R_3 = 0$ (c)

Hệ 3 phương trình trên chứa 3 ẩn số R_1, R_2, R_3 nên bài toán là tĩnh định.

Giải hệ phương trình trên được:

$$R_1 = P\frac{1-\cot g\varphi}{\sin\alpha};\ R_2 = \frac{P}{\sin\alpha\sin\varphi};\ R_3 = P\,\mathrm{cotg}\alpha(1-\mathrm{cotg}\varphi + \frac{1}{\sin\varphi});$$

Thay các trị số của α,φ và P ta nhận được:

$R_1 = 85$kN; $R_2 = 231$ kN; $R_3 = 273$kN.

Kết quả đều dương nên chiều các phản lực chọn là đúng.

<u>**Thí dụ 2.2**</u>: Một xe 3 bánh ABC đặt trên một mặt đường nhẵn nằm ngang. Tam giác ABC cân có đáy AB = 1m, đường cao OC = 1,5m, trọng lượng của xe là P KN đặt tại trọng tâm G trên đoạn OC cách O là 0,5m. Tìm phản lực của mặt đường lên các bánh xe (xem hình 2-9)

Tìm kiếm & download ebook: bookilook.com

Thuviendientu.org

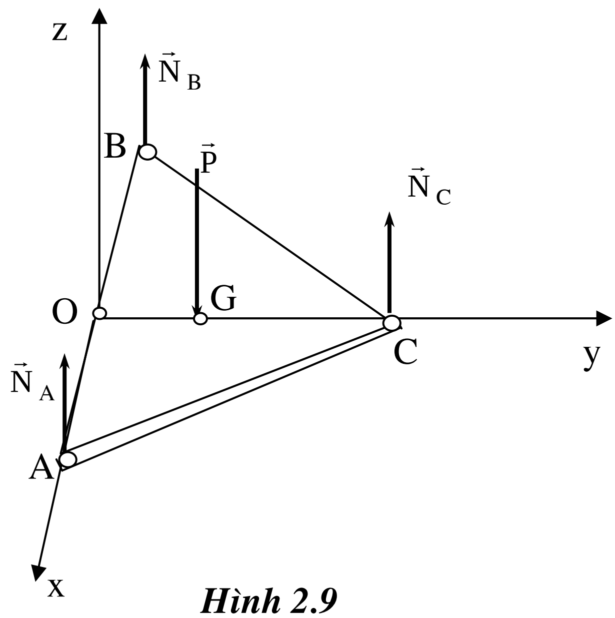
Bách Khoa Online: hutonline.net

Bài giải:

Khảo sát sự cân bằng của xe. Giải phóng xe khỏi mặt đường và thay bằng các phản lực của mặt đất lên các bánh xe là $\vec{N}_A$, $\vec{N}_B$, $\vec{N}_C$.

Vì xe đặt trên mặt nhẵn nên các phản lực này có phương vuông góc với mặt đường.

Xe ở trạng thái cân bằng dưới tác dụng của 4 lực $\vec{P}$, $\vec{N}_A$, $\vec{N}_B$, $\vec{N}_C$. Hệ 4 lực này là hệ lực song song.



Hình 2.9

Nếu chọn hệ toạ độ oxyz như hình vẽ phương trình cân bằng của hệ lực trên theo (2-9) có dạng:

$$\sum Z_i = N_A + N_B + N_C - P = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\sum m_x(F_i) = -P.0,5 + N_C.1,5 = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$\sum m_y(F_i) = -N_A.0,5 + N_B.0,5 = 0 \qquad \text{(c)}$$

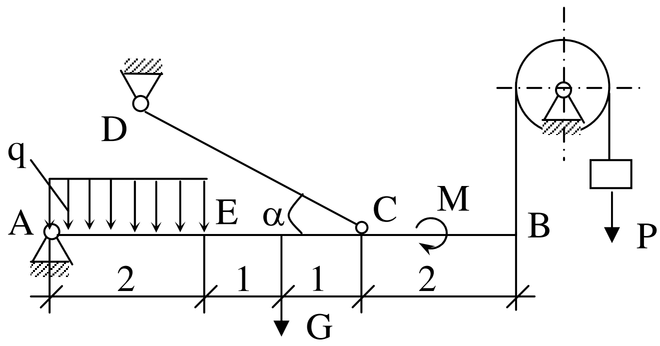
Hệ ba phương trình trên chứa 3 ẩn số N_A, N_B, N_C nên bài toán là tĩnh định.

Giải phương trình trên xác định được:

$N_A = N_B = N_C = P/3$ kN

Kết quả cho các giá trị dương nên chiều phản lực hướng lên là đúng.

Thí du 2.3: Xà AB được giữ nằm ngang nhờ liên kết như hình vẽ (2.10). Tại A có khớp bản lề cố định. Tại C được treo bởi dây CD đặt xiên một góc α so với xà. Tại B có dây kéo thẳng đứng nhờ trọng



Hình 2.10

Tìm kiếm & download ebook: bookilook.com

Thuviendientu.org

Bách Khoa Online: hutonline.net

vật P buộc ở đầu dây vắt qua ròng rọc.

Xà có trọng lượng G đặt tại giữa, chịu một ngẫu lực nằm trong mặt phẳng hình vẽ và có mô men M. Đoạn dầm AE chịu lực phân bố đều có cường độ q.

Xác định phản lực tại A, trong sợi dây CD cho biết G = 10kN, P = 5kN, M = 8 kNm; q = 0,5 kN/m; $\alpha = 30^0$. Các kích thước cho trên hình vẽ.

Bài giải:

Chọn vật khảo sát là xà AB. Giải phóng liên kết đặt lên xà ta có:

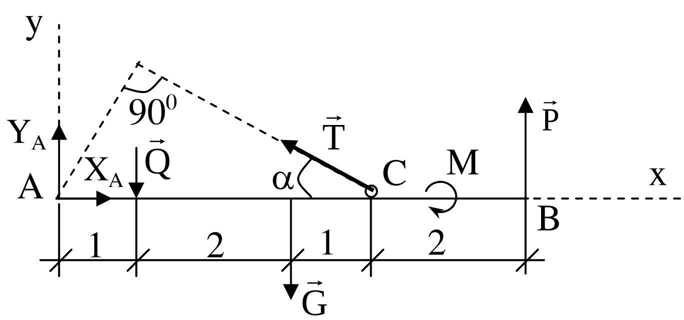
Liên kết tại A được thay thế bằng phản lực $\vec{R}_A$ nằm trong mặt phẳng hình vẽ. Liên kết tại C được thay thế bằng lực căng $\vec{T}$ hướng dọc theo dây. Liên kết tại B thay bằng lực căng đúng bằng $\vec{P}$ nhưng có chiều hướng lên trên. Chiều của $\vec{R}_A$ và $\vec{T}$ chọn như hình vẽ. Như vậy xà AB ở trạng thái cân bằng dưới tác dụng của các lực ($\vec{G}$, $\vec{M}$, $\vec{R}_A$, $\vec{T}$, $\vec{P}$), các lực này nằm trong mặt phẳng thẳng đứng tức là mặt phẳng hình vẽ (hệ lực phẳng). Chọn hệ toạ độ Axy như hình vẽ và lập phương trình cân bằng dạng (2-10) được:

$\sum X_i = X_A - T\cos 30^0;$ (a)

$\sum Y_i = Y_A - Q - G + T\cos 60^0 + P = 0;$ (b)

$\sum m_A(\vec{F}_i) = - Q.1 - G.3 + T.4\sin 30^0 - M + 6P = 0.$ (c)

Trong các phương trình trên Q = 2q là tổng hợp lực phân bố đều đặt tại điểm giữa AE.



Hình 2.11

Ba phương trình trên chứa 3 ẩn số X_A, Y_A, và T do đó bài toán là tĩnh định.

Giải hệ phương trình trên ta được:

$$T = \frac{Q.1 + G.3 + M - p.6}{4.\sin 30^0} = \frac{1.1 + 10.3 + 8 - 5.6}{4.0,5} = 4,5 \text{ kN};$$

Tìm kiếm & download ebook: bookilook.com

Thuviendientu.org

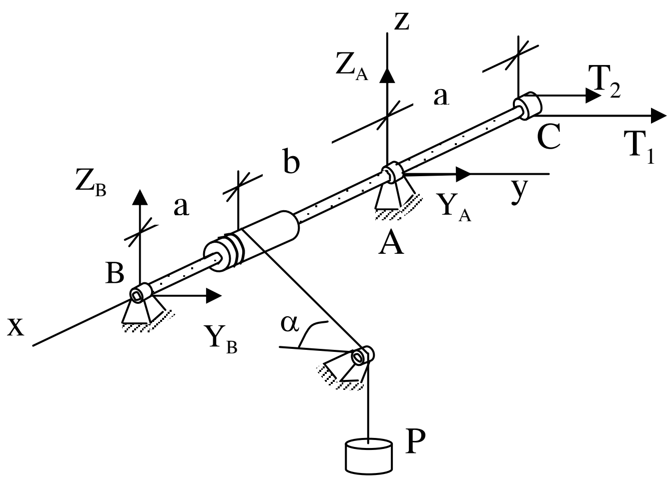
Bách Khoa Online: hutonline.net

$X_A = T\cos 30^0 = 4,5.0,866 = 3,90kN;$

$Y_A = Q + G - T\cos 60^0 - P = 1 + 10 - 4,5.0,5 - 5 = 3,75, kN$

Kết quả cho các trị số của T, X_A, Y_A đều dương do đó chiều chọn ban đầu là đúng.

<u>Thí du 2.4</u>: Trục truyền nằm ngang đặt trên hai gối đỡ bản lề cố định A và B (xem hình vẽ 2-12). Trục nhận chuyển động quay từ dây đai dẫn đến bánh đai C có bán kính $r_1 = 20$ cm và để nâng trọng vật P buộc vào đầu dây cáp vắt qua ròng rọc K và cuốn trên trống tời có bán kính $r_2 =$ 15cm. Cho biết hai nhánh dây đai có phương song song với trục oy và có lực căng T_1 và T_2 với $T_1 = 2T_2$; Trọng vật P= 180kN; a = 40cm; b = 60cm và $\alpha = 30^0$. Xác định phản lực tại hai gối đỡ A và B.



Hình 2.12

<u>Bài giải</u>:

Chọn vật khảo sát là trục BC.

Liên kết lên trục là các ổ đỡ A, B. Các lực tác dụng cho là $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ và $\vec{F}$. Lực $\vec{F}$ tác dụng dọc theo dây cáp có trị số bằng $\vec{P}$. Vì các ổ đỡ là khớp bản lề cố định nên phản lực liên kết tại A và B có hai thành phần theo trục oy và oz. Giải phóng liên kết đặt lên trục và thay bằng các phản lực liên kết khi đó trục AC chịu tác động của các lực: $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{F}$, $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$. Các lực này phân bố bất kỳ trong không gian. Phương trình cân bằng của hệ lực thiết lập theo (2- 6). Để tránh nhầm lẫn ta lập bảng hình chiếu và mô men của hệ lực đối với các trục toạ độ (bảng 2-2) .

Tìm kiếm & download ebook: bookilook.com

Thuviendientu.org

Bách Khoa Online: hutonline.net

Bảng 2-2

$\vec{F}_1$	$\vec{F}$	$\vec{T}_1$	$\vec{T}_2$	$\vec{R}_A$	$\vec{R}_B$
X_1	0	0	0	0	0
Y_1	Fcosα	Thép	T_2	Y_A	Y_B
Z_1	-Fsinα	45	0	Z_A	Z_B
$m_x(F)$	$-F.r_2$	0	$-T_2r_1$	0	0
$m_y(F)$	Fsinα.b	T_1r_1	0	0	$-Z_B(a+b)$
$m_z(F)$	Fcosα.b	0	$-T_2a$	0	$Y_A(a+b)$
		$-T_1.a$			

Các phương trình cân bằng thiết lập được:

$\sum Yi = P\cos\alpha + T_1+T_2 + Y_A + Y_B = 0;$

$\sum Zi = F\sin\alpha + Z_A + Z_B = 0;$

$\sum Mx = F.r_2 + T_1r_1 - T_2r_1 = 0;$

$\sum My = F\sin\alpha.b - Z_B(a+b) = 0;$

$\sum Mz = F\cos\alpha.b - T_1a - T_2a + Y_B(a+b) = 0;$

Hệ 5 phương trình trên chứa 5 ẩn số là Y_A, Z_A, Y_B, Z_B và T_1 nên bài toán là tĩnh định.

Giải hệ phương trình trên tìm được:

$$T_2 = \frac{P.r_2}{r} = \frac{180.15}{20} = 135kN\ ;\ T_1 = 2T_2 = 270\ kN;$$

$$Z_B = \frac{b.P\sin\alpha}{a+b} = \frac{60.180.0,5}{40+60} = 54\ kN;$$

$$Y_B = \frac{a.3T_2 - Pb\cos\alpha}{a+b} = \frac{40.3.135 - 180.60.\frac{\sqrt{3}}{2}}{40+60} = 69\ kN$$

$$Y_A = -P\cos\alpha - 3T_2 - Y_B = -180.\frac{\sqrt{3}}{2} - 3.135 - 69 \approx -630KN$$

$$Z_A = P\sin\alpha - Z_B = 180.\ 0,5 - 54 = 36kN.$$

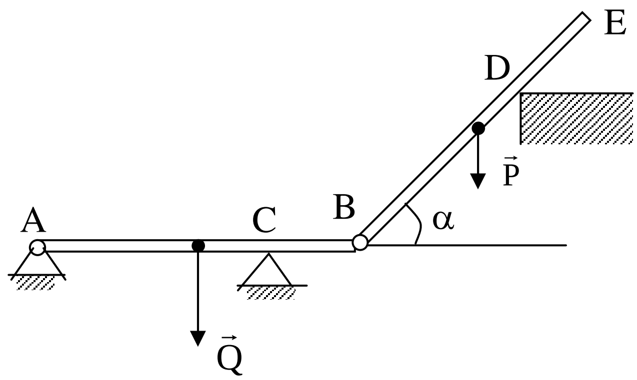
Tìm kiếm & download ebook: bookilook.com

Thuviendientu.org

Bách Khoa Online: hutonline.net

Trong các kết quả tìm được chỉ có giá trị Y_A mang dấu âm do đó chiều của nó ngược với chiều đã chọn.

<u>Thí du 2.5</u>: Cho hệ hai dầm AB và BE nối bằng khớp bản lề tại B (xem hình vẽ 2-13). Trọng lượng của dầm AB là Q đặt ở giữa AB. Trọng lượng của dầm BE là P đặt ở giữa BE. Tại đầu A có khớp bản lề cố định, còn tại các điểm C, D là các điểm tựa nhọn.



Hình 2.13

Xác định phản lực tại các gối đỡ A và các điểm tựa C,D. Cho P = 40kN, Q = 20kN; CB = $\frac{1}{3}$ AB; DE = $\frac{1}{3}$ BE; $\alpha = 45^0$.

<u>Bài giải</u>: Cần lưu ý rằng đây là bài toán cân bằng của hệ vật. Về nguyên tắc khi giải bài toán thuộc loại này phải tách riêng từng vật để xét. Trên hệ vật cần phân biệt hai loại vật chính và vật phụ. Vật chính là vật khi tách ra có thể đứng vững được. Vật phụ là vật khi tách ra không thể đứng vững được. Ta xét vật phụ trước sau đó xét vật chính sau. Cũng cần chú ý thêm khi tách vật tại các khớp nối sẽ được thay thế bằng các lực tác dụng tương hỗ, các lực này cùng phương cùng trị số nhưng ngược chiều.

Đối với bài toán trên, hệ gồm hai dầm trong đó AB là dầm chính còn BE là dầm phụ. Tách BE để xét. Tại khớp nối có phản lực liên kết R_B (lực tác dụng tương hỗ của dầm chính lên dầm BE). Phản lực R_B nằm trong mặt phẳng thẳng đứng (mặt phẳng hình vẽ) và có hai thành phần X_B và Y_B (xem hình 2-14). Giải phóng liên kết tại D thay vào đó bằng phản lực $\vec{N}_D$ ($\vec{N}_D$ vuông góc BE. Dầm BE chịu tác dụng của các lực $\vec{P}$, $\vec{N}_D$, $\vec{R}_B$. Hệ lực này cùng nằm trong mặt phẳng oxy do đó phương trình cân bằng viết được:

$\sum X_1 = X_B - N_D\sin\alpha = 0;$

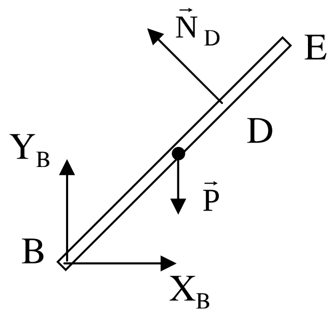
Tìm kiếm & download ebook: bookilook.com

Thuviendientu.org

Bách Khoa Online: hutonline.net

$\sum Y_{10} = Y_B - P + N_D\cos\alpha = 0;$

$\sum m_B(F_1) = N_D\frac{2}{3}.a - P.\ \frac{a}{2}\cos\alpha = 0.$



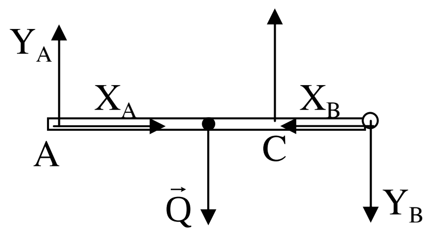
Hình 2.14

Gải hệ phương trình trên tìm được:

$N_D = \frac{3}{4}P\cos\alpha = \frac{3}{4}.40.\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 21,2$ kN;

$X_B = \frac{3}{8}P\sin 2\alpha = \frac{3}{8}.40.1 = 15$kN;

$Y_B = P(1 - \frac{3}{4}\cos^2\alpha) = 40(1 - \frac{3}{4}\frac{2}{4}) = 25$kN.



Hình 2.15

Giá trị các phản lực đều dương điều này chứng tỏ chiều của chúng như đã chọn là đúng.

Tiếp theo xét đến dầm chính AB. Giải phóng các liên kết dầm sẽ ở trạng thái cân bằng dưới tác dụng của hệ lực: $\vec{Q}$, - $\vec{R}_B$, $\vec{R}_A$, $\vec{N}_C$. Các lực này cùng nằm trong mặt phẳng oxy. (xem hình 2.15)

Phương trình cân bằng của hệ lực viết được:

$\sum X_1 = X_A - X'_B = 0;$

$\sum m_A(F) = -\ Y'_B.b + N_C\frac{2}{3}b - Q.\ \frac{b}{2} = 0;$

$\sum m_C(F) = -\ Y_A.\frac{2b}{3} + Q\ \frac{b}{6} - Y'_B.\ \frac{b}{3} = 0;$

Trong đó $X'_B = X_B$, $Y'_B = Y_B$ nhưng có chiều ngược lại.

Giải hệ 3 phương trình trên tìm được:

$X_A = X_B = 15$kN;

$Y_A = \frac{1}{4}Q - \frac{1}{2}Y_B = -7,5$kN;

$Y_C = \frac{3}{4}Q + \frac{3}{2}Y_B = 52,5$kN.

Kết quả cho giá trị của Y_A mang dấu âm có nghĩa chiều Y_A chọn là sai phải đảo lại.

Tìm kiếm & download ebook: bookilook.com