Chương 4

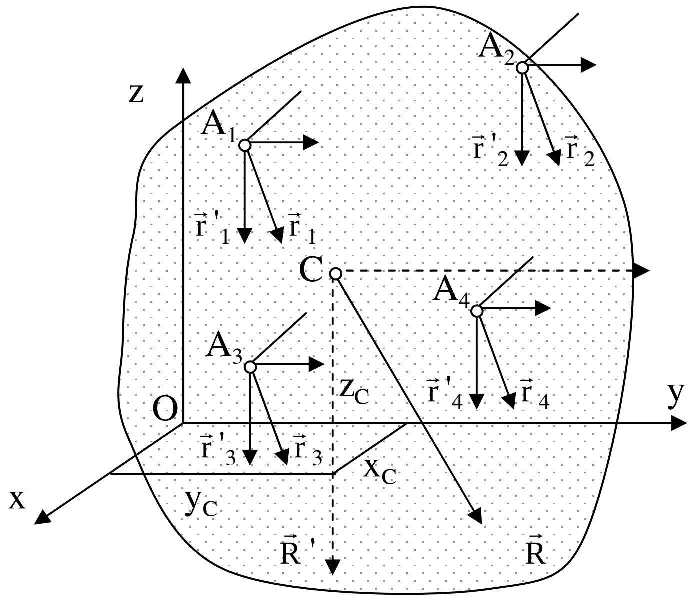
TRỌNG TÂM CỦA VẬT RẮN

4.1. TÂM CỦA HỆ LỰC SONG SONG

Hệ lực song song ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n$) luôn có hợp lực $\vec{R}$ song song với các lực đã cho. Theo lý thuyết về hệ lực, hợp lực $\vec{R}$ được xác định bởi biểu thức:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad (4\text{-}1)$$

Khi ta thay đổi phương của hệ lực phương của hợp lực cũng thay đổi theo. Chẳng hạn lúc đầu hệ lực có hợp lực là R song song với các lực đã cho , sau khi xoay hệ lực cho song song với trục oz ta sẽ được hợp lực R' có độ lớn bằng R nhưng có phương song song với trục oz. Mặc dù hợp lực thay đổi phương khi phương của hệ lực thay đổi nhưng đường tác dụng của chúng đều đi qua điểm C điểm này gọi là tâm của hệ lực song song đã cho.



Hình 4.1

Để xác định vị trí của tâm C ta vận dụng định lý Va-ri-nhông. Cho hợp lực $\vec{R}'$ như hình vẽ ta có:

$$M_y(R') = \sum_{i=1}^{n} m_y(F^n_i);$$

$$R.X_c = \sum_{i=1}^{n} F_i x_i;$$

$$\text{hay } X_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{R} \;;$$

Trong đó X_c là toạ độ của điểm C trên trục ox, x_i là toạ độ của điểm A_i trên trục ox.

Bằng cách xoay phương của hệ lực cho song song với trục ox và oy ta sẽ nhận được các kết quả tương tự với toạ độ của C trên hai trục oy và oz. Ta xác định hệ toạ độ của tâm C theo các biểu thức sau:

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{R};$$

$$Y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i y_i}{R}; \qquad (4\text{-}2)$$

$$Z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i z_i}{R}.$$

Như vậy có thể xác định hợp lực của hệ lực song song nhờ các biểu thức (4-1) và (4-2)

4.2. TRỌNG TÂM CỦA VẬT RẮN

Coi vật rắn là tập hợp của n phần tử có trọng lượng $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ ...$\vec{P}_n$. Các trọng lực P_i tạo thành một hệ lực song song. Tâm của hệ các trọng lượng phần tử này gọi là trọng tâm của vật.

Như vậy gọi C là trọng tâm của vật thì toạ độ của điểm C được xác định bằng các biểu thức sau:

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i x_i}{P};$$

$$Y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i y_i}{P}; \qquad (4\text{-}3)$$

$$Z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i z_i}{P}.$$

Trong đó $\vec{P}_i$ và $\vec{P}$ là trọng lượng của phần tử thứ i trong vật, và trọng lượng của cả vật, còn x_i, y_i, z_i là toạ độ của phần tử thứ i.

Như vậy trọng tâm của vật là một điểm C trên vật mà tổng hợp trọng lượng của cả vật đi qua khi ta xoay vật đó ở bất kỳ chiều nào trong không gian.

4.3. TRỌNG TÂM CỦA MỘT SỐ VẬT ĐỒNG CHẤT

4.3.1. Vật rắn là một khối đồng chất

Gọi trọng lượng riêng của vật là γ (trọng lượng của một đơn vị thể tích) thì $P_i = \gamma.v_i$ và $P = \gamma.v$. Trong đó v_i và v là thể tích của phần tử thứ i của vật và thể tích cả vật. Toạ độ trọng tâm của vật lúc này có thể xác định bởi các biểu thức:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i x_i}{v}; \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i y_i}{v}; \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i z_i}{v}.$$

4.3.2. Vật rắn là một tấm mỏng đồng chất

Gọi trọng lượng riêng của vật rắn là γ (trọng lượng của một đơn vị diện tích) ta sẽ có $P_i = \gamma.S_i$ và $P = \gamma.S$ ở đây S_i và S là diện tích của phần tử thứ i của vật và diện tích toàn vật. Toạ độ trọng tâm của vật trong hệ toạ độ oxy chứa vật xác định theo biểu thức sau:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i x_i}{S}; \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i y_i}{S};$$

4.3.3. Vật rắn là một dây hay thanh mảnh đồng chất

Gọi trọng lượng riêng của vật là γ (trọng lượng của một đơn vị chiều dài vật) ta có $P_i = \gamma.L_i$ và $P = \gamma.L$. Trong đó L_i và L là chiều dài của phần tử thứ i và chiều dài của cả vật. Toạ độ trọng tâm của vật lúc này có thể xác định bởi các biểu thức:

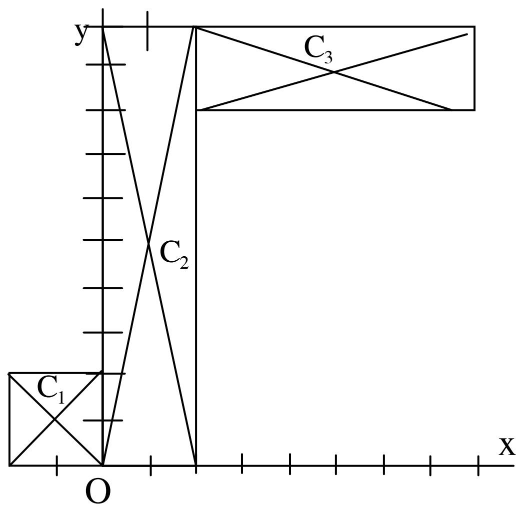
$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i x_i}{L}; \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i y_i}{L}; \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i z_i}{L}.$$

4.3.4. Vật rắn đồng chất có một tâm, một trục hay một mặt phẳng đối xứng

Ta có nhận xét rằng trên vật bao giờ cũng tìm được hai phần tử đối xứng có trọng lượng P_1, P_2 như nhau song song cùng chiều qua tâm đối xứng, trục đối xứng hay mặt phẳng đối xứng của vật và như vậy hợp lực của nó sẽ đi qua điểm đối xứng nằm trên trục đối xứng hay mặt phẳng đối xứng. Dễ dàng nhận thấy rằng hợp lực của các $\vec{P}_i$ (i = 1...n), nghĩa là trọng lượng của vật bao giờ cũng đi qua tâm đối xứng, trục đối xứng hay nằm trong mặt phẳng đối xứng nếu như xoay vật sao cho mặt phẳng đối xứng đó ở vị trí thẳng đứng. Nói cách khác trọng tâm của vật trong trường hợp có một tâm đối xứng, có một trục đối xứng hay có một mặt phẳng đối xứng bao giờ cũng nằm trên tâm đối xứng, trục đối xứng hay mặt phẳng đối xứng đó.

4.3.5. Trọng tâm của vật có thể phân chia thành những vật nhỏ đơn giản

Trong trường hợp này ta chia vật thành các phần có hình dạng đơn giản dễ xác định trọng tâm, sau đó coi mỗi vật đó như một phần tử nhỏ của cả vật, mỗi phần tử này có trọng lượng đặt tại trọng tâm. Xác định được trọng lượng và trọng tâm các phần nhỏ của vật ta sẽ xác định được trọng tâm của cả vật nhờ các biểu thức xác định toạ độ trọng tâm ở trên.



Hình 4.2

Sau đây ta vận dụng những kết quả trên để tìm trọng tâm của một số vật.

<u>**Thí du 4.1**</u>: Xác định trọng tâm của tấm tôn phẳng có hình dạng như hình vẽ (4-2).

Biết rằng tấm tôn là đồng chất và kích thước của các cạnh tính bằng cm đã cho trên

Bảng 4.1

	C_1	C_2	C_3
x_i	-1	1	5
y_i	1	5	9
S_i	4	20	12

hình.

Bài giải:

Trước hết chia vật thành 3 phần, mỗi phần là một hình chữ nhật như hình vẽ (4-2). Các hình này là các tấm phẳng và có tâm đối xứng là C_1, C_2 và C_3. Toạ độ trọng tâm và diện tích của nó có thể xác định như bảng 4.1.

Diện tích của cả vật là :

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 36\ (cm^2)$$

Áp dụng công thức (4.5) ta có:

$$x_c = \frac{x_1S_1 + x_2S_2 + x_3S_3}{S} = \frac{-4+20+60}{36} = 2\frac{1}{9}\,cm$$

$$y_c = \frac{y_1S_1 + y_2S_2 + y_3S_3}{S} = \frac{4+100+108}{36} = 5\frac{8}{9}\,cm$$

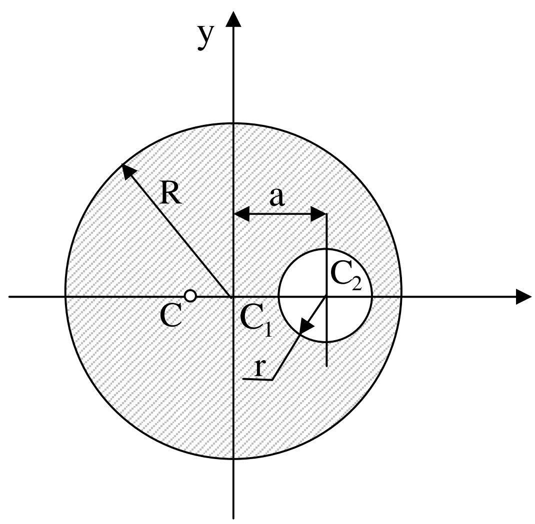
Trọng tâm C của vật hoàn toàn được xác định.

Thí du 4.2. Tìm toạ độ trọng tâm của tấm phẳng giới hạn bởi hai đường tròn bán kính R và r (xem hình vẽ 4.3). Cho biết khoảng cách giữa hai tâm là $c_1c_2 = a$.

Bài giải:

Chọn hệ toạ độ như hình vẽ. Phân tích thành hai phần mỗi phần là một tấm tròn nhưng ở đây tầm tròn có bán kính r phải coi như vật có tiết diện âm. Cụ thể ta có: Phần 1 là một tấm tròn có bán kính R có toạ độ trọng tâm là $x_1 = 0$ và $y_1 = 0$. Diện tích là $S_1 = \pi R^2$. Phần 2 là tấm tròn có bán kính r, toạ độ trọng tâm là $x_2 = a$, $y_2 = 0$ và diện tích là $S_2 = -\pi r^2$.Diện tích cả vật là :

$$S = S_1 + S_2 = \pi(R^2 - r^2)$$



Hình 4.3

Ta có thể tính được toạ độ trọng tâm của vật.

$$x_c = \frac{x_1S_1 + x_2S_2}{S} = -\frac{a.r^2}{R^2 - r^2};$$

$$y_c = \frac{y_1S_1 + y_2S_2}{S} = 0.$$

<u>Thí du 4-3</u>. Tìm trọng tâm của một cung tròn AB bán kính R, góc ở tâm là AÔB = 2 α (hình 4-4)

Nếu chọn hệ toạ độ như hình vẽ ta thấy trục ox là trục đối xứng do đó trọng tâm C của chúng nằm trên trục ox có nghĩa là y_c =0. Ở đây chỉ còn phải xác định x_c

Ta chia cung AB thành N phần nhỏ, mỗi phần có chiều dài Δl_k, có toạ độ $x_k = R\cos\varphi_k$.

Theo công thức (4.6) có:

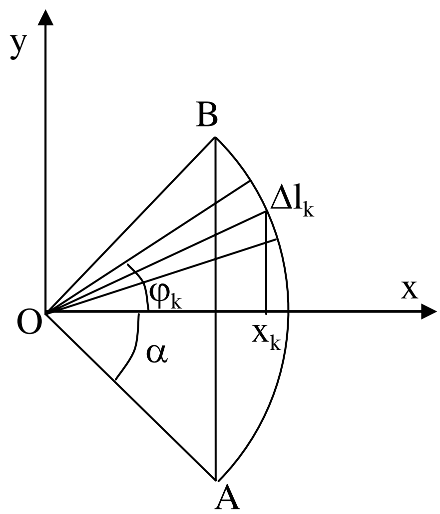
$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta l_k x_k}{L} = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{n} \Delta l_k R\cos\varphi_k$$

Thay $\Delta l_k \cos\varphi_k = \Delta Y_k$ ta có:

$$X_c = \frac{1}{L} R \sum_{i=1}^{n} \Delta Y_k = \frac{1}{L} R.AB$$

Thay L = R.2α và AB = 2R sinα ta được:

$$X_c = \frac{R.2\sin\alpha}{R.2\alpha} = R.\frac{\sin\alpha}{\alpha} \qquad (4\text{-}7)$$

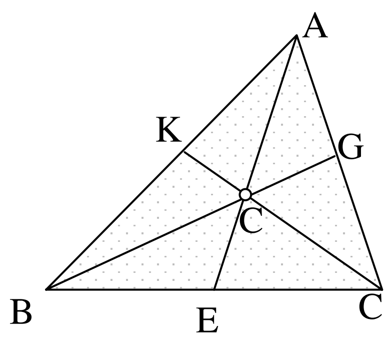


Hình 4.4

<u>Thí du 4-4</u>: Tìm trọng tâm của một tấm phẳng hình tam giác ABC đồng chất (hình 4-5).

<u>Bài giải</u>:

Chia tam giác thành các dải nhỏ song song với đáy BC. Mỗi dải nhỏ thứ i được coi như một



Hình 4.5

thanh mảnh và trọng tâm của nó đặt tại giữa dải. Như vậy trọng tâm của các dải sẽ nằm trên đường trung tuyến AE và trọng tâm của cả tam giác cũng nằm trên AE.

Chứng minh tương tự ta thấy trọng tâm của tam giác phải nằm trên trung tuyến BG và trung tuyến CK. Rõ ràng trọng tâm của tam giác chính là giao điểm của ba đường trung tuyến của tam giác đó.

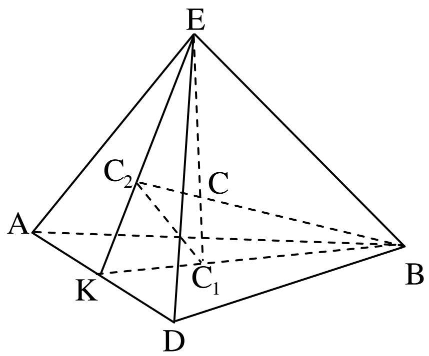
Trong hình học ta đã biết điểm đó được xác định theo biểu thức:

$$CE = \frac{1}{3}AE$$

Thí du 4-5 Tìm trọng tâm của vật đồng nhất hình tứ diện ABDE như hình vẽ (4-6) .

Bài giải:

Ta chia hình thành các phần nhỏ nhờ các mặt phẳng song song với đáy ABD. Mỗi tấm được coi như một tấm phẳng đồng chất hình tam giác trọng tâm của mỗi phần được xác định như ở thí dụ 4-4. Lớp sát đáy sẽ có trọng tâm là C_1với $C_{1k} = \frac{1}{3}BK$ (BK là trung tuyến của đáy ABD). Như vậy tất cả các trọng tâm của các phần sẽ nằm trên đường EC_1 và trọng tâm của cả vật cũng sẽ nằm trên EC_1.



Hình 4.6

Tương tự ta tìm thấy trọng tâm của vật nằm trên đường BC_2 với C_2 là trọng tâm tam giác EAD. Kết quả là trọng tâm C của hình vẽ nằm trên điểm C là giao điểm của EC_1 và BC_2.

Theo hình vẽ ta có ΔCC_1C_2 đồng dạng với Δ ECB mặt khác $C_1C_2 = \frac{1}{3}BE$ và $KC_1 = \frac{1}{3}KB$ từ đó suy ra:

$$\frac{CC_1}{CE} = \frac{C_1C_2}{BE} = \frac{1}{3}$$

Suy ra $CC_1 = \frac{1}{3}CE = \frac{1}{4}C_1E$