Phần 2

ĐỘNG HỌC

Động học nghiên cứu các qui luật chuyển động của vật thể đơn thuần về hình học, không đề cập đến khối lượng và lực. Những kết quả khảo sát trong động học sẽ làm cơ sở cho việc nghiên cứu toàn diện các qui luật chuyển động của vật thể trong phần động lực học.

Trong động học vật thể được đưa ra dưới hai mô hình: động điểm và vật rắn. Động điểm là điểm hình học chuyển động trong không gian, còn vật rắn là tập hợp nhiều động điểm mà khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ trong nó luôn luôn không đổi. Khi khảo sát các vật thực có kích thước không đáng kể, có thể coi như mô hình động điểm.

Chuyển động là sự thay đổi vị trí của vật trong không gian theo thời gian. Đơn vị đo độ dài là mét và ký hiệu *m,* đơn vị đo thời gian là giây viết tắt là *s.*

Tính chất của chuyển động phụ thuộc vào vật chọn làm mốc để so sánh ta gọi là hệ qui chiếu. Trong động học hệ qui chiếu được lựa chọn tuỳ ý sao cho việc khảo sát chuyển động của vật được thuận tiện . Để có thể tính toán người ta còn phải chọn hệ toạ độ gắn với hệ qui chiếu. Thông thường muốn hình vẽ được đơn giản ta dùng ngay hệ toạ độ làm hệ quy chiếu.

Tính thời gian thông thường phải so sánh với mốc thòi điểm t_0 chọn trước.

Về nội dung, động học phải tìm cách xác định vị trí của vật và mô tả chuyển động của vật theo thời gian so với hệ quy chiếu đã chọn.

Thông số xác định vị trí của vật so với hệ quy chiếu đã chọn là thông số định vị. Thông số định vị có thể là véc tơ, là toạ độ, là góc...

Qui luật chuyển động được biểu diễn qua các biểu thức liên hệ giữa các thông số định vị với thời gian và được gọi là phương trình chuyển động. Trong phương trình chuyển động thì thời gian được coi là đối số độc lập. Khi khử đối số thời gian trong phương trình chuyển động ta được biểu thức liên hệ giữa các thông số định vị và gọi là phương trình qũi đạo.

Để biểu thị tính chất của chuyển động ta đưa ra các đại lượng vận tốc và gia tốc. Vận tốc là đại lượng biểu thị hướng và tốc độ chuyển động của điểm hay vật.Gia tốc là đại lượng biểu thị sự thay đổi của vận tốc theo thời gian. Gia tốc cho biết tính chất chuyển động đều hay biến đổi. Vận tốc và gia tốc là các đại lượng phụ thuộc vào thời gian.

Căn cứ nội dung người ta chia động học thành hai phần: động học điểm và động học vật rắn. Khi khảo sát động học của vật rắn bao giờ cũng gồm hai phần: Động học của cả vật và động học của một điểm thuộc vật.

Chương 5

CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM

5.1. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM BẰNG VÉC TƠ

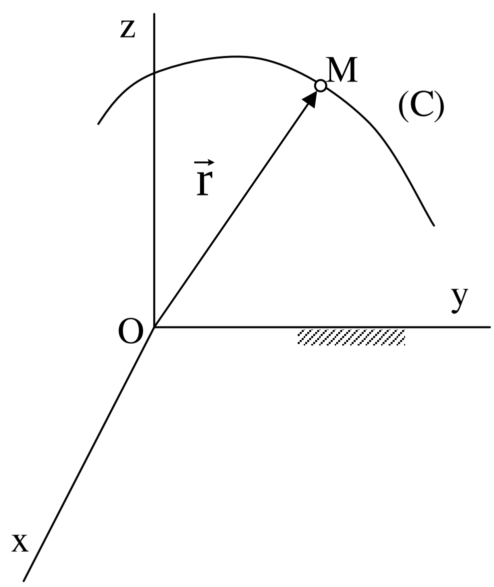
5.1.1. Thông số định vị và phương trình chuyển động

Xét động điểm M chuyển động trong hệ qui chiếu oxyz (hình 5-1).

Vị trí động điểm M được xác định nếu biết véc tơ $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Véc tơ $\vec{r}$ là thông số định vị của động điểm.

Khi động điểm chuyển động véc tơ $\vec{r}$ biến thiên liên tục theo thời gian *t* do đó ta viết được:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (5\text{-}1)$$



Hình 5.1

Nếu biết được qui luật biến thiên (5-1) ta hoàn toàn xác định được vị trí của động điểm ở bất kỳ thời điểm nào. Biểu thức (5-1) là phương trình chuyển động của động điểm M viết dưới dạng véc tơ.

Trong quá trình chuyển động, động điểm vạch ra một đường gọi là quĩ đạo chuyển động của động điểm. Phương trình của đường quĩ đạo cũng chính là phương trình chuyển động (5-1) nhưng viết dưới dạng thông số.

Nếu đường quĩ đạo là thẳng ta nói động điểm chuyển động thẳng, nếu đường quĩ đạo là cong ta nói chuyển động của điểm là chuyển động cong.

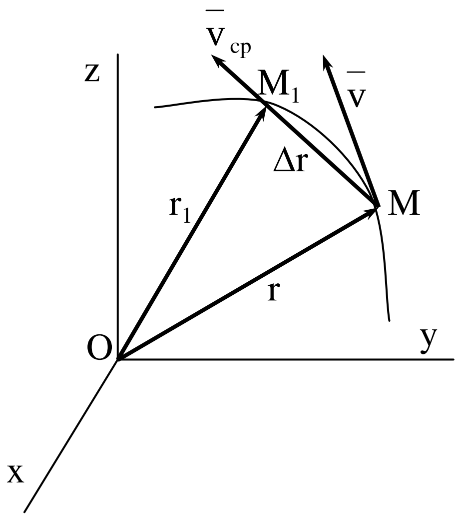
5.1.2. Vận tốc chuyển động của điểm

Giả thiết tại thời điểm *t* vị trí của động điểm xác định bởi véc tơ định vị $\vec{r}$. Tại thời điểm $t_1 = t + \Delta t$ động điểm đến vị trí M_1 xác định bởi $\vec{r}_1$, ta có $\overrightarrow{MM}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r} = \vec{\Delta r}$ (xem hình 5-2). Gọi tỷ số $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ là vận tốc trung bình của động điểm trong khoảng thời gian Δt và ký hiệu là $\vec{v}_{tb}$. Khi Δt càng nhỏ nghĩa là M_1 càng gần M thì $\vec{v}_{tb}$ càng gần đến một giới hạn, giới hạn đó gọi là vận tốc tức thời tại thời điểm t.

Nếu ký hiệu vận tốc tức thời của động điểm là $\vec{v}$ thì:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (5.3)$$

Vận tốc tức thời của động điểm bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của véc tơ định vị tại thời điểm đó.



Hình 5.2

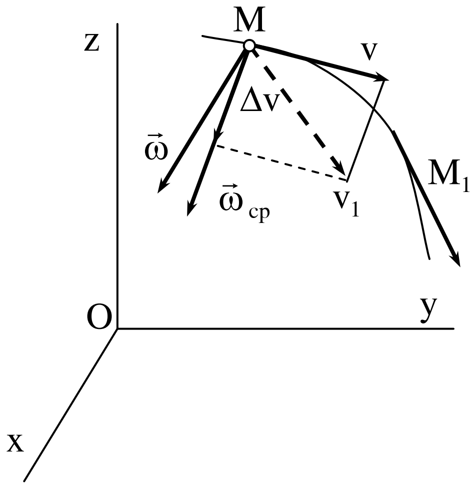
Về mặt hình học ta thấy véc tơ $\Delta\vec{r}$ nằm trên cát tuyến MM_1 và hướng từ M đến M_1 vì vậy khi tiến tới giới hạn véc tơ vận tốc $\vec{v}$ sẽ tiếp tuyến với quĩ đạo ở tại vị trí M đang xét và hướng theo chiều chuyển động của điểm.

Đơn vị để tính vận tốc là mét/giây viết tắt là m/s

5.1.3. Gia tốc chuyển động của điểm

Giả thiết tại thời điểm t điểm có vận tốc $\vec{v}$ và tại thời điểm t_1 điểm có vận tốc là $\vec{v}_1$. Tỷ số $\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{v}_1 - \vec{v}}{\Delta t}$ gọi là gia tốc trung bình của điểm trong thời gian Δt. Giới hạn tỷ số đó khi Δt tiến tới không gọi là gia tốc tức thời $\vec{w}$ của điểm. Ta có:

$$\vec{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (5\text{-}3)$$



Hình 5.3

Như vậy gia tốc tức thời của điểm là véc tơ đạo hàm bậc nhất theo thời gian của véc tơ vận tốc hay đạo hàm bậc hai theo thời gian của véc tơ định vị. Về mặt hình học véc tơ $\Delta\vec{v}$ bào giờ cũng hướng về phía lõm của đường cong (xem hình 5-3), do đó véc tơ gia tốc $\vec{w}$ bao giờ cũng hướng về phía lõm của đường cong. Đơn vị để đo gia tốc là mét/giây^2 viết tắt là m/s^2

5.1.4. Tính chất của chuyển động

Để xem xét chuyển động của điểm là thẳng hay cong ta căn cứ vào tích $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{c}$

Nếu $\vec{c} = 0$ thì $\vec{v}$ và $\vec{w}$ cùng phương, nghĩa là vận tốc $\vec{v}$ có phương không đổi. Chuyển động lúc đó là chuyển động thẳng.

Nếu $\vec{c} \neq 0$ thì $\vec{v}$ và $\vec{w}$ hợp với nhau một góc điều đó chứng tỏ véc tơ $\vec{v}$ thay đổi phương và chuyển động sẽ là chuyển động cong. Để xét chuyển động của điểm là đều hay biến đổi ta căn cứ vào tích vô hướng $\vec{v} \cdot \vec{w} = B$.

$$\text{Vì } v^2 = (\vec{v})^2 \text{ nên } \frac{d(\vec{v})^2}{dt} = \frac{d(v^2)}{dt} = 2\vec{v} \cdot \vec{w}$$

Cho nên nếu B = 0 thì chứng tỏ $\vec{v}$ là hằng số nghĩa là động điểm chuyển động đều.

Nếu $B \neq 0$ thì $\vec{v}$ là đại lượng biến đổi, chuyển động là biến đổi. Nếu $B > 0$ chuyển động nhanh dần và $B < 0$ chuyển động chậm dần.

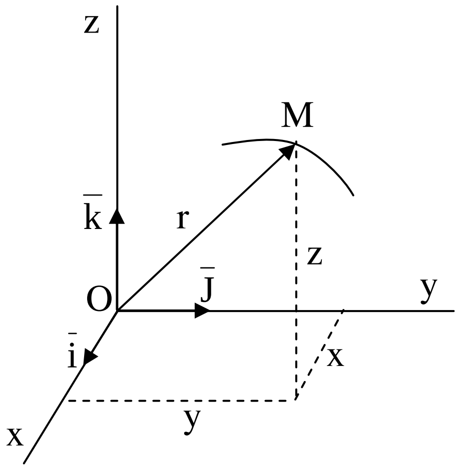
5.2. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM BẰNG TOẠ ĐỘ ĐỀ CÁC

5.2.1. Thông số định vị và phương trình chuyển động

Xét động điểm M chuyển động theo đường cong trong hệ trục toạ độ đề các oxyz (hình 5-4).

Ở đây các toạ độ x,y,z là các thông số định vị của điểm M.

Khi M chuyển động các toạ độ này thay đổi liên tục theo thời gian do đó ta có:



Hình 5.4

$$\begin{aligned} x &= x(t); \\ y &= y(t); \qquad (5\text{-}4) \\ z &= z(t). \end{aligned}$$

Các phương trình (5-4) là phương trình chuyển động của điểm và cũng là phương trình quĩ đạo của điểm viết dưới dạng thông số trong toạ độ Đề các.

5.2.2. Vận tốc chuyển động của điểm

Nếu gọi các véc tơ đơn vị trên ba trục toạ độ là $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ thì véc tơ định vị và véc tơ vận tốc có thể viết:

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Suy ra

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

(5.5)

Biểu thức trên chứng tỏ:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \qquad v_x = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \qquad (5.6)$$

Hình chiếu véc tơ vận tốc lên các trục toạ độ bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian các toạ độ tương ứng.

Dựa vào các biểu thức (5.6) dễ dàng xác định được véc tơ vận tốc cả về độ lớn và phương chiều.

$$v = \sqrt{v^2{}_x + v^2{}_y + v^2{}_z} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

$$\cos(ox,v) = \frac{v_x}{v}; \qquad \cos(oy,v) = \frac{v_y}{v}; \qquad \cos(oz,v) = \frac{v_z}{v}.$$

5.2.3. Gia tốc của điểm

Tương tự như đối với vận tốc, dựa vào biểu thức (5.3) ta có thể tìm thấy:

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x};$$

$$w_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}; \qquad (5.7)$$

$$w_x = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}.$$

Gia tốc chuyển động của điểm sẽ được xác định về độ lớn và phương chiều theo các biểu thức sau:

$$w = \sqrt{w^2{}_x + w^2{}_y + w^2{}_z} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

$$\cos(ox,w) = \frac{w_x}{w}; \qquad \cos(oy,w) = \frac{w_y}{w}; \qquad \cos(oz,w) = \frac{w_z}{w}.$$

Khi biết $\vec{v}$ và $\vec{w}$ ta có thể xem xét được tính chất chuyển động của điểm M.

5.3. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM BẰNG TOẠ ĐỘ TỰ NHIÊN

5.3.1. Thông số định vị và phương trình chuyển động

Giả thiết động điểm M chuyển động theo một đường cong AB trong hệ toạ độ oxyz. (xem hình vẽ 5.5). Trên quĩ đạo AB lấy điểm O làm gốc và chọn chiều dương cho đường cong. Thông thường ta chọn chiều dương của đường cong là chiều mà động điểm chuyển động. Rõ ràng nếu biết cung $\overline{OM}$ = s ta có thể biết vị trí của điểm M trên quĩ đạo. Nói khác đi cung $\overline{OM}$ = s là thông số định vị của động điểm, còn gọi là toạ độ cong. Khi điểm M chuyển động s sẽ biến đổi liên tục theo thời gian nghĩa là:

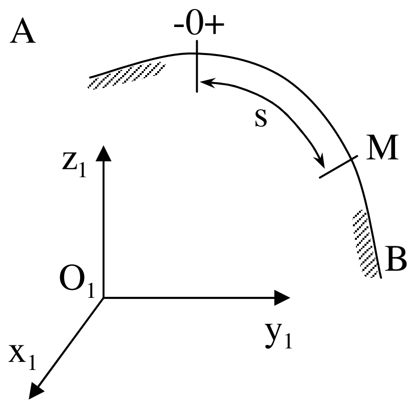
$$s = s(t) \qquad (5.8)$$

Biết được quy luật biến thiên (5.8) ta có thể xác định vị trí của điểm M ở bất kỳ thời điểm nào. Biểu thức (5.8) được gọi là phương trình chuyển động của điểm. Theo phương pháp này để xác định chuyển động của điểm phải biết:

- Quĩ đạo chuyển động $\overline{AB}$
- Chiều chuyển động trên quĩ đạo
- Quy luật chuyển động (5.8).

5.3.2. Vận tốc chuyển động của điểm

Giả thiết động điểm chuyển động trên đường cong AB. Tại thời điểm t động điểm ở vị trí M xác định bằng toạ độ cong s. Tại thời điểm $t_1 = t + \Delta t$ điểm ở vị trí M_1 xác định bằng toạ độ cong $s_1 = s + \Delta s$.



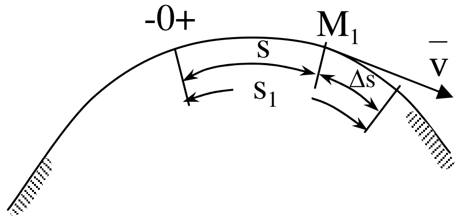
Hình 5.5

Tỷ số $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s}{\Delta t} = v_{tb}$ gọi là tốc độ trung bình.

Giới hạn của tỷ số này khi Δt tiến tới không gọi là tốc độ tức thời của điểm tại thời điểm t và ký hiệu là v.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \qquad (5.8)$$

Vận tốc có giá trị bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của quãng đường s, có phương tiếp



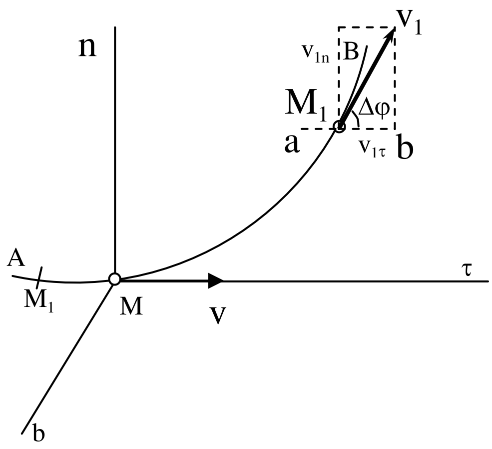
Hình 5.6

tuyến với quĩ đạo, hướng theo chiều của chuyển động. (xem hình 5.6).

5.3.3. Gia tốc tiếp tuyến và gia tốc pháp tuyến của điểm.

5.3.3.1. Hệ toạ độ tự nhiên

Giả thiết chất điểm chuyển động theo đường cong AB như hình (5.7).



Hình 5.7

Trên đường cong lấy hai điểm M_1M_1' lân cận hai bên điểm M. Vẽ mặt phẳng đi qua ba điểm đó. Khi hai điểm M_1M_1' tiến gần đến M thì mặt phẳng trên tiến gần đến giới hạn của nó là mặt phẳng (π) gọi là mặt phẳng mật tiếp. Trong mặt phẳng mật tiếp vẽ đường Mτ tiếp tuyến với quĩ đạo (trùng với véc tơ vận tốc ($\vec{v}$). Một trục khác vẫn nằm trong mặt phẳng mật tiếp và vuông góc với Mτ tại M ký hiệu là Mn gọi là pháp tuyến chính. Trục Mb vuông góc với hai trục kia gọi là trùng pháp tuyến. Ta chọn chiều của ba trục Mτnb tạo thành một tam diện thuận và gọi là hệ toạ độ tự nhiên.

5.3.2. Gia tốc tiếp tuyến và pháp tuyến của điểm

Như trên đã biết:

$$\vec{w} = \lim_{\Delta t \to 0} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}}{\Delta t}$$

Chiếu biểu thức này lên các trục toạ độ tự nhiên ta có:

$$w^t = \lim_{\Delta t \to 0} = \frac{v^t{}_1 - v^t}{\Delta t};$$

$$w^n = \lim_{\Delta ;t \to 0} = \frac{v^{n_1} - v^n}{\Delta t};$$

$$w^b = 0;$$

Trên hình (5.7) gọi cung $MM_1 = \Delta s$; góc hợp bởi $\vec{v}$ và Mτ là Δφ ta có:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = k = \frac{1}{\rho}$$

Tỷ số k gọi là độ cong còn ρ là bán kính cong của quỹ đạo tại M.

Mặt khác khi chiếu véc tơ $\vec{v}$ và $\vec{v}_1$ lên các trục ta được:

$v^t = v$ $\qquad$ $v^t_1 = v_1\cos\Delta\varphi;$

$v^n = 0$ $\qquad$ $v^n_1 = v_1\sin\Delta\varphi;$

Thay thế kết quả tìm được vào biểu thức của w^t và w^n sẽ được:

$$w^t = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v_1\cos\Delta\varphi - v}{\Delta t};$$

$$w^n = \lim_{\Delta t\to 0}(v_1\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta t});$$

Khi Δt tiến tới 0, điểm M_1 dần tới M và Δφ tiến tới 0, Δs tiến tới 0, v_1 tiến tới v; cosφ tiến tới 1. Thay các giá trị này vào biểu thức trên ta nhận được:

$$w^t = \lim\frac{v_1 - v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s};$$

$$w^n = \lim(v_1\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta t}.\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.\frac{\Delta s}{\Delta t}) = \frac{v^2}{\rho}.$$

Trong biểu thức (5.9) w^t và w^n là gia tốc tiếp tuyến và gia tốc pháp tuyến của điểm tại thời điểm t.

Gia tốc tiếp tuyến $\vec{w}^t$ có trị số bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của vận tốc hay bằng đạo hàm bậc hai theo thời gian của quãng đường đi s, có phương tiếp tuyến với quĩ đạo, cùng chiều với $\vec{v}$ khi $w^t > 0$ và ngược chiều với $\vec{v}$ khi $w^t < 0$. (hình 5.8).

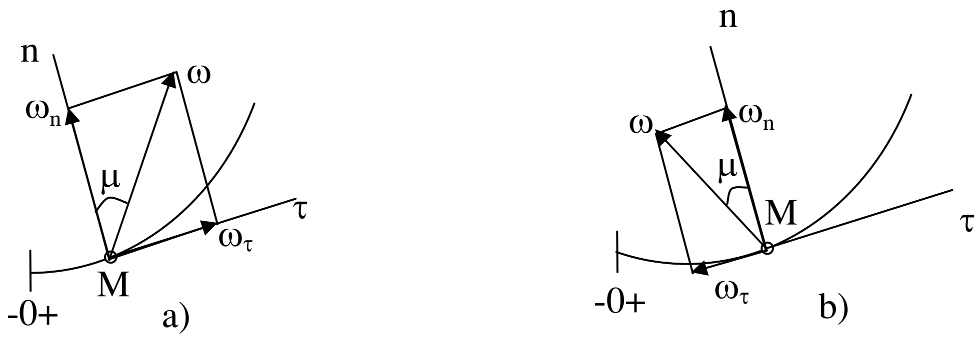
Gia tốc pháp tuyến $\vec{w}^n$ có giá trị bằng bình phương của vận tốc chia cho bán kính cong, luôn luôn hướng theo pháp tuyến Mn về phía lõm của đường cong.

Gia tốc toàn phần của điểm M có thể xác định theo biểu thức :

$$w = \sqrt{w^{r2} + w^{n2}} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} \qquad (5.10)$$

Phương của $\vec{w}$ luôn luôn hướng về phía lõm của đường cong và hợp với pháp tuyến một góc μ.

$$tg\mu = \frac{|w^t|}{w^n}\ ; \qquad (5.11)$$



Khi $w^t > 0$ Khi $w^t < 0$

Hình 5.8

5.3.4. Một số trường hợp chuyển động đặc biệt

5.3.4.1. Chuyển động thẳng

Trong trường hợp này $\rho = \infty$ và $w^n = \frac{v^2}{\rho} = 0$.

Khi đó chỉ còn: $\vec{w} = \vec{w}^t = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Gia tốc bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của vận tốc, cùng chiều với $\vec{v}$ khi $\vec{w} > 0$ và ngược chiều với $\vec{v}$ khi $\vec{w} < 0$. Cần chú ý khi chuyển động của điểm là thẳng ta mới có kết quả trên.

5.3.4.2. Chuyển động cong đều

Ta gọi chuyển động cong đều là chuyển động có trị số vận tốc không đổi v = const.

Khi đó $w^t = \frac{dv}{dt} = 0$ và $w = w^n = \frac{v^2}{\rho}$

Gia tốc toàn phần bằng gia tốc pháp tuyến cả về độ lớn và phương chiều. Trong chuyển động cong đều phương trình chuyển động có thể thiết lập như sau:

Ta có: $\frac{ds}{dt} = v$, $ds = vdt$.

Tích phân hai vế ta có: $\int_{S0}^{S} ds = \int_{t}^{t} vdt$,

Hay $s = s_0 + v.t$

5.3.4.3. Chuyển động thẳng biến đổi đều

Trong trường hợp này $w^t = w^n = 0$ do đó $w = 0$. Suy ra phương trình chuyển động $x = x_o + v.t$

5.3.4.4. Chuyển động cong biến đổi đều

Chuyển động cong biến đổi đều là chuyển động có $w^t = const$.

Ta có: $\frac{dv}{dt} = w^t$; $dv = w^t dt$

Lấy tích phân hai vế sẽ được: $\int_{v_o}^{v} dv = \int_{t}^{t} w^t.dt$, hay $v = v_o + w^t.t$

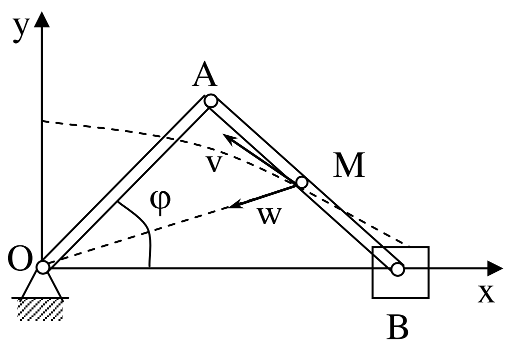
Phương trình chuyển động viết được:

$$\frac{ds}{dt} = v_o + w^t.t \quad \text{suy ra : } ds = v_o dt + w^t.t.dt;$$

Hay: $s = s_o + v_o t + \frac{w^t t^2}{2}$.

Sau đây là một số bài toán thí dụ.

<u>Thí du 5.1</u>: Xác định quỹ đạo, vận tốc và gia tốc của điểm M nằm giữa tay biên AB của cơ cấu biên tay quay OAB, (xem hình 5.9) cho biết OA = AB = 2a và thời điểm khảo sát tương ứng với góc φ của cơ cấu, với φ = ωt.



Hình 5.9

Bài giải:

Chọn hệ toạ độ oxy nằm trong mặt phẳng cơ cấu.

Gọi toạ độ của điểm M là x,y ta có:

x = 2acosφ + a cosφ = 3 acosφ;

y = a sinφ.

Đây chính là phương trình chuyển động của điểm trong toạ độ Đề các.

Để xác định quỹ đạo của điểm, từ phương trình trên rút ra:

$\cos\omega t = \frac{x}{3a}$; $\sin\omega t = \frac{y}{a}$;

suy ra $$\frac{x^2}{9a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Đây chính là phương trình Enlip nhận các trục đối xứng là ox và oy (xem hình vẽ 5.9).

Để tìm vận tốc ta áp dụng biểu thức (5.6) có:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -3a\sin\omega t;$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = a\omega\cos\omega t.$$

Cuối cùng xác định được vận tốc của điểm M như sau:

$$v_M = \sqrt{v^2{}_x + v^2{}_y} = \sqrt{9\sin^2\omega t + \cos^2\omega t}.a.$$

Phương chiều của $\vec{v}_M$ như hình vẽ. Từ kết quả trên ta thấy $v_{min} = a\omega$ và $v_{max} = 3a\omega$.

Theo biểu thức (5.7) xác định được gia tốc của điểm M:

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -3a\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 x;$$

$$w_y = -a\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 y;$$

Gia tốc toàn phần w = $\sqrt{\omega^4(x^2+y^2)} = \omega^2 r$.

Phương chiều của w được xác định nhờ các góc chỉ phương như sau:

$$\cos(w,ox) = \frac{w_x}{w} = -\frac{x}{r}; \quad \cos(w,oy) = \frac{w_y}{w} = -\frac{y}{r}.$$

Từ kết quả trên cho thấy phương chiều $\vec{w}$ luôn luôn hướng từ M về O.

<u>**Thí du 5.2**</u>. Điểm M chuyển động theo phương trình:

$x = a \sin\omega t$; $y = a \cos\omega t$; $z = ut$.

Trong đó a, ω và u là không đổi.

Xác định quỹ đạo, vận tốc và gia tốc của điểm M.

<u>Bài giải</u>:

Từ hai phương trình đầu suy ra:

$\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = a^2$ hay $x^2 + y^2 = a^2$ (a)

Kết hợp phương trình (a) với phương trình z = ut ta thấy điểm chuyển động trên mặt trụ bán kính a và trục là oz.

Từ z = ut suy ra t = z/u và thay vào biểu thức của x ta được:

$$x = a \sin\frac{\omega}{u}.z; \qquad y = \cos\frac{\omega}{u}.z;$$

Quỹ đạo của điểm M là một đường vít, có trục oz.

Gọi T_1 là chu kỳ của đường vít. T_1 xác định từ biểu thức:

$$\omega T = 2\pi \text{ hay } T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$$

Trong thời gian T_1 động điểm quay quanh trục oz được một vòng đồng thời cũng tiến theo dọc trục oz một đoạn $h = uT_1 = \dfrac{2u\pi}{\omega}$; h gọi là bước của vít.

Để xác định vận tốc và gia tốc ta áp dụng phương pháp toạ độ Đề các.

$v_x = a\omega \cos\omega t;$

$v_y = a\omega \sin\omega t;$

$v_z = u.$

Từ đó xác định vận tốc v của điểm.

$$v = \sqrt{v^2{}_x + v^2{}_y + v^2{}_z} = \sqrt{a^2\omega^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) + u^2}; = \sqrt{a^2\omega^2 + u^2}$$

Như vậy vận tốc v của điểm có trị số không đổi và phương tiếp tuyến với quỹ đạo (xem hình 5.10). Tương tự ta xác định được:

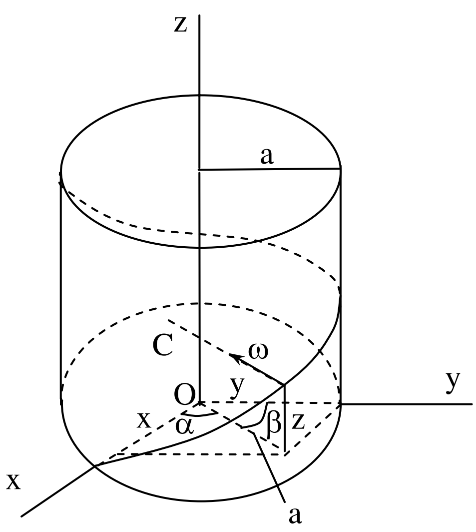
$w_x = -a\omega^2\sin\omega t$

$w_x = -a\omega^2\cos\omega t;$

$w_z = 0.$

và $w = \sqrt{w^2{}_x + w^2{}_y} = a\omega^2.$

Gia tốc của điểm có độ lớn không đổi còn phương chiều được xác định bằng các cosin chỉ phương.



Hình 5.10

$$\cos(w,x) = \frac{w_x}{w} = -\sin\omega t = \frac{x}{a};$$

$$\cos(w,y) = \frac{w_y}{w} = -\sin\omega t = \frac{y}{a};$$

$$\cos(w,x)\frac{w_z}{w} = 0.$$

Mặt khác ta thấy:

$$\frac{x}{a} = \cos\alpha; \ \frac{y}{a} = \cos\beta.$$

α và β biểu diễn trên hình vẽ.

Như vậy gia tốc $\vec{w}$ luôn luôn hướng theo bán kính từ động điểm vào trục oz.

<u>Thí du 5.3</u>: Một bánh xe bán kính R lăn không trượt trên đường thẳng. Vận tốc tâm bánh xe v = v(t).

Lập phương trình chuyển động của điểm M nằm trên vành bánh xe.

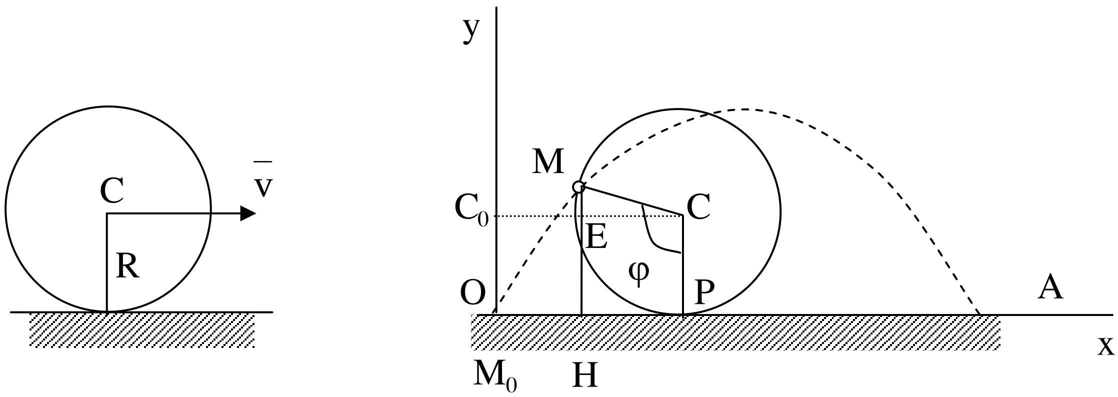
Khảo sát vận tốc và gia tốc của điểm M đó.

Khảo sát tính biến đổi chuyển động của điểm M trên quỹ đạo ứng với một vòng lăn của bánh xe khi $V=V_o$ = cosnt.

<u>Bài giải</u>:

Chọn gốc toạ độ là điểm tiếp xúc O giữa M và mặt đường (xem hình 5.11).

Đặt góc PCM = φ. Để xác định phương trình chuyển động ta tìm quan hệ giữa các toạ độ x.y của điểm với góc φ.



Hình 5.11

Trên hình có x = OH = OP - PH = Rφ - R sinφ;

$$y = HM = R + R\sin(\varphi - 90^0) = R - R\cos\varphi = R(1 - \cos\varphi);$$

Vì bánh xe lăn không trượt nên: $\overline{OP} = \int_0^t v_{(t)} dt$.

Suy ra $\varphi = \varphi(t) = \frac{1}{R}\int_o^t v_{(t)} dt$

Phương trình chuyển động của điểm M có thể viết được:

x= R(φ- sinφ);

y= R(1- cosφ);

φ = φ(t).

Đây là phương trình của đường Xycloit viết dưới dạng thông số.

Khảo sát chuyển động của điểm M trên cung OA.

Vận tốc và gia tốc của điểm xác định như sau:

$$\vec{v}\left|\begin{array}{l} v_x = \dot{x} = R\dot{\varphi}(1 - \cos\varphi); \\ v_y = \dot{y} = R\dot{\varphi}\sin\varphi \end{array}\right.$$

$$\vec{w}\left|\begin{array}{l} w_x = \dot{v}_x = R\dot{\varphi}^2 \sin\varphi + R\ddot{\varphi}(1 - \cos\varphi); \\ w_y = \dot{v}_y = R\dot{\varphi}^2 \cos\varphi + R\ddot{\varphi}\sin\varphi. \end{array}\right.$$

Tại vị trí chạm đất O và A thì φ =0 và φ = 2π. Khi đó sinφ = 0, cosφ =1.

và: $v_x = 0$; $v_y = 0$ suy ra $v = 0$;

$w_x = 0$; $w_y = R\varphi^2 > 0$.

$\vec{w}$ lúc này khác không, do đó điểm chỉ dựng lại tức thời ở mặt đất.

Trong trường hợp đặc biệt $v = v_0$ = hằng số thì:

$$\varphi = \frac{1}{R}\int_o^t v_{(o)} dt = \frac{v_o t}{R};$$

$\varphi = \dfrac{v_o t}{R}$; $\varphi_o = 0$; $\dot{\varphi} = \dfrac{v_o}{R}$; $\ddot{\varphi} = 0.$

Lúc này: $v_x = v_o(1\text{-}\cos\varphi)$; $v_y = v_o\sin\varphi$;

$$w_x = \frac{v^2{}_o}{R}\sin\varphi; \qquad w_y = \frac{v^2{}_o}{R}\cos\varphi.$$

Để xét tính chất chuyển động của điểm trên cung $\overline{OA}$ ta có:

$$\vec{v}.\vec{w} = v_x.w_x + v_y.w_y = \frac{v^3{}_o}{R}\left[\sin\varphi(1-\cos\varphi)+\sin\varphi\cos\varphi\right]; = \frac{v^3{}_o}{R}\sin\varphi.$$

Như vậy $\vec{v}.\vec{w} > 0$ trong khoảng $0 < \varphi < \pi$ và $\vec{v}.\vec{w} < 0$ trong khoảng $\pi < \varphi < 2\pi$.

Trên nửa cung đầu điểm chuyển động nhanh dần còn nửa cung sau điểm chuyển động chậm dần.

<u>Ví du 5.4</u>. Một vật rắn bắn ra theo phương ngang với vận tốc ban đầu $\vec{v}_o$ sau đó rơi xuống theo quy luật : $x = v_o t$; $y = \dfrac{1}{2}gt^2$

Tìm quỹ đạo, vận tốc, gia tốc toàn phần, gia tốc tiếp tuyến, gia tốc pháp tuyến, bán kính cong của quỹ đạo tại một thời điểm t bất kỳ.

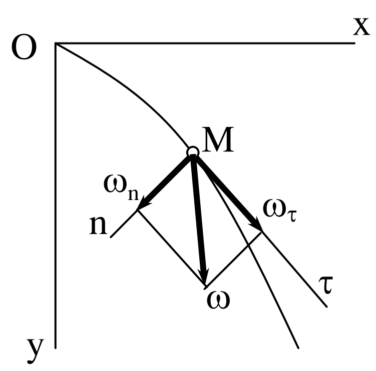
<u>Bài giải</u>:

Khử thời gian t trong phương trình chuyển động ta được phương trình quỹ đạo: $y = \dfrac{g}{v^2{}_o}x^2.$

Đây là phương trình parabol. (xem hình 5.12).

Vận tốc của vật xác định được

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_o;$$



Hình 5.12

$$v_y = \frac{dy}{dt} = gt;$$

$$v = \sqrt{v^2{}_o + g^2 t^2}.$$

Gia tốc của điểm được xác định như sau:

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 0; \qquad w_y = \frac{d^2y}{dt^2} = g.$$

Suy ra w = g . Gia tốc của vật bằng gia tốc trọng trường.

Để xác định gia tốc tiếp tuyến ta có:

$$w^t = \frac{dv}{dt} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_o^2 + g^2 t^2}} = \frac{g^2 t}{v}.$$

Theo kết quả ở trên $v^2 = v_o{}^2 + g^2t^2$ nên suy ra:

$$t = \frac{1}{g}\sqrt{v^2 + v_o^2}.$$

Thay vào biểu thức của w^t ta được:

$$w^t = g\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v^2}}.$$

Từ kết quả này ta thấy tại thời điểm ban đầu $v = v_o$ thì $w^t = 0$

Khi $v \to \infty$ thì $w^t \to g$.

Tiếp theo ta xác định gia tốc pháp tuyến căn cứ vào biểu thức:

$$w^2 = w^2{}_\tau + w^2{}_n$$

Ta có: $$w^2{}_n = w^2 - w^2{}_\tau = g^2 + g^2\left(1 - \frac{v_o^2}{v^2}\right) = g^2\frac{v_o^2}{v^2};$$

suy ra : $$w_n = g\frac{v_o}{v}.$$

Tại thời điểm đầu $v = v_o$ do đó $w_n = g$.

Từ biểu thức tìm được của w_n ta có thể xác định được bán kính cong của quỹ đạo.

$$w_n = \frac{v^2}{\rho} \text{ suy ra } \rho = \frac{v^2}{w_n} \text{ hay } \rho = \frac{v^3}{v_0 g}.$$

Tại thời điểm đầu $v = v_o$ ta có $\rho = \dfrac{v_o^2}{g}$.

Khi $v \to \infty$ thì $\rho \to \infty$.