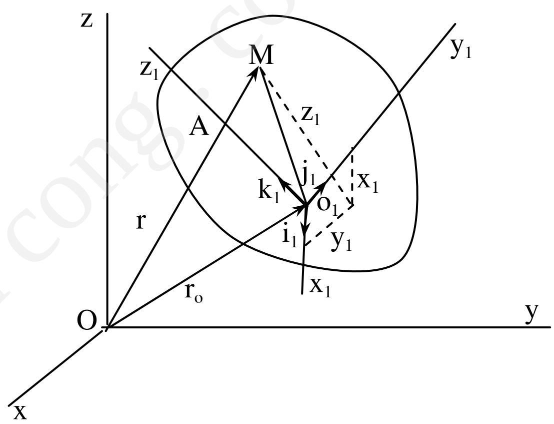
Chương 7

CHUYỂN ĐỘNG TỔNG HỢP CỦA ĐIỂM

7.1. CHUYỂN ĐỘNG TUYỆT ĐỐI, CHUYỂN ĐỘNG TƯƠNG ĐỐI VÀ CHUYỂN ĐỘNG KÉO THEO.

Chuyển động tổng hợp của điểm là chuyển động được tạo thành khi điểm tham gia hai hay nhiều chuyển động đồng thời. Ta xét bài toán trong mô hình sau đây : Khảo sát chuyển động của điểm M trên hệ toạ độ động $o_1x_1y_1z_1$ gắn trên vật A. Vật A lại chuyển động trong hệ toạ độ cố định oxyz (xem hình 7.1).

Chuyển động của điểm M so với hệ cố định oxyz gọi là chuyển động tuyệt đối. Vận tốc và gia tốc của chuyển động tuyệt đối ký hiệu là : $\vec{v}_a$ và $\vec{w}_a$.



Hình 7.1

Chuyển động của điểm M so với hệ động $o_1x_1y_1z_1$ gọi là chuyển động tương đối ký hiệu là $\vec{v}_r$ và $\vec{w}_r$.

Chuyển động của hệ động (vật A) so với hệ cố định oxyz gọi là chuyển động kéo theo. Vận tốc và gia tốc của điểm thuộc vật A (hệ động) bị điểm M chiếm chỗ (trùng điểm) trong chuyển động kéo theo là vận tốc và gia tốc kéo theo của điểm M và ký hiệu là : $\vec{v}_e$ và $\vec{w}_e$.

Như vậy chuyển động tuyệt đối của điểm M là chuyển động tổng hợp của hai chuyển động tương đối và kéo theo của nó.

Thí dụ : Con thuyền chuyển động với vận tốc $\vec{u}$ so với nước. Dòng nước chảy với vận tốc $\vec{v}$ so với bờ sông. Ở đây chuyển động của con thuyền so với bờ sông là chuyển động tuyệt đối . Chuyển động của con thuyền so với mặt nước là chuyển động tương đối với vận tốc $\vec{v}_r = \vec{u}$. Chuyển động của dòng nước so với bờ là chuyển động kéo theo, vận tốc của chuyển động kéo theo $\vec{v}_e = \vec{v}$.

Theo định nghĩa trên ta thấy, để xét chuyển động tương đối ta xem hệ động như cố định. Khi đó phương trình chuyển động viết dưới dạng véc tơ như sau : $\vec{r}_1 = \vec{O}_1M = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1$. (7-1)

Ở đây $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$, $\vec{k}_1$ là các véc tơ đơn vị trên các hệ động. Khi xét chuyển động tương đối như ở trên đã nói các véc tơ $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$, $\vec{k}_1$ được xem như không đổi. Còn các toạ độ x_1 , y_1 , z_1 là các hàm của thời gian.

$$x_1 = x_1(t) \quad ; \quad y_1 = y_1(t) \quad ; \quad z_1 = z_1(t).$$

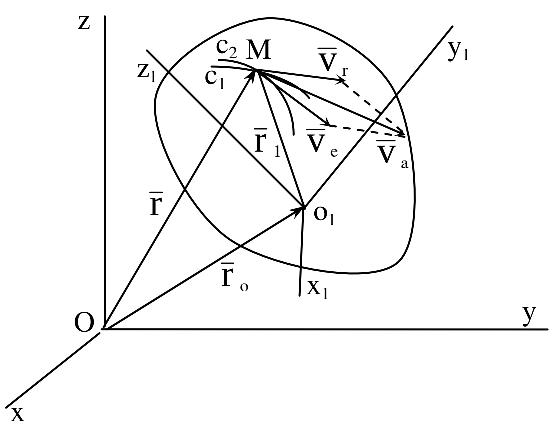
Muốn xét chuyển động kéo theo của điểm ta chỉ cần cố định nó trong hệ động khi đó phương trình chuyển động của M so với hệ cố định oxyz là phương trình chuyển động kéo theo. Ta có :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1 = \vec{r}_0 + x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1 \qquad (7\text{-}2).$$

Trong phương trình (7.2) vì ta cố định điểm trong hệ động nên các toạ độ x_1 , y_1 , z_1 là không đổi, còn $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$, $\vec{k}_1$ là các véc tơ biến đổi theo thời gian. $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t); \vec{i} = \vec{i}(t); \vec{j} = \vec{j}(t)$; $\vec{k} = \vec{k}(t)$.

7.2. ĐỊNH LÝ HỢP VẬN TỐC.

Xét điểm M chuyển động tương đối trong hệ động $o_1x_1y_1z_1$ với vận tốc $\vec{v}_r$; Hệ động chuyển động trong hệ cố định oxyz kéo theo điểm M chuyển động với vận tốc kéo theo $\vec{v}_e$ (xem hình 7-2). Để xác định vận tốc tuyệt đối ta thiết lập phương trình chuyển động tuyệt đối của điểm M. Ta có :



Hình 7.2

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1(t) = \vec{r}_0 + x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1 \qquad (7\text{-}3)$$

Phương trình này giống phương trình (7-2) nhưng cần lưu ý là mọi tham số của phương trình đều là các hàm của thời gian.

Đạo hàm bậc nhất theo thời gian phương trình (7-3) ta được :

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}_0}{dt} + x_1\frac{d\vec{i}}{dt} + y_1\frac{d\vec{j}}{dt} + z_1\frac{d\vec{k}}{dt}\right) + \left(\frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1\frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1\right)$$

Trong kết quả tìm được, nhóm số hạng thứ nhất

$$\left(\frac{d\vec{r}_0}{dt} + x_1\frac{d\vec{i}}{dt} + y_1\frac{d\vec{j}}{dt} + z_1\frac{d\vec{k}}{dt}\right)$$

chính là đạo hàm bậc nhất theo thời gian của phương trình (7-2) (phương trình chuyển động kéo theo) là vận tốc kéo theo $\vec{v}_e$.

Nhóm các số hạng còn lại :

$$\left(\frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1\frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1\right)$$

là đạo hàm bậc nhất theo thời gian của phương trình (7.1) (phương trình chuyển động tương đối) do đó được thay thế bằng vận tốc tương đối $\vec{v}_r$.

Thay các kết quả vừa tìm được vào vận tốc tuyệt đối ta được :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r.$$

Định lý 7.1 : Trong chuyển động tổng hợp của điểm vận tốc tuyệt đối bằng tổng hình học vận tốc kéo theo và vận tốc tương đối :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r. \qquad (7\text{-}4)$$

7.3. Định lý hợp gia tốc

Để thiết lập biểu thức của gia tốc tuyệt đối ta đạo hàm bậc hai theo thời gian phương trình chuyển động tuyệt đối của điểm (phương trình 7.3). Ta có :

$$\vec{w}_a = \frac{d^2\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \left(\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + x_1\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y_1\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z_1\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}\right) + \left(\frac{d^2x_1}{dt^2}\vec{i}_1 + \frac{d^2y_1}{dt^2}\vec{j}_1\frac{d^2z_1}{dt^2}\vec{k}_1\right)$$

$$+2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{i}_1}{dt}+\frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{j}_1}{dt}\frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right)$$

Trong kết quả tìm được nhóm các số hạng thứ nhất :

$$\left(\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2}+x_1\frac{d^2\vec{i}}{dt^2}+y_1\frac{d^2\vec{j}}{dt^2}+z_1\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}\right)$$

là đạo hàm bậc hai theo thời gian của phương trình (7.2) (phương trình chuyển động kéo theo) có thể thay bằng gia tốc kéo theo $\vec{w}_e$.

Nhóm các số hạng thứ hai :

$$\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}\vec{i}_1+\frac{d^2y_1}{dt^2}\vec{j}_1\frac{d^2z_1}{dt^2}\vec{k}_1\right)$$

là đạo hàm bậc hai theo thời gian của phương trình (7.1) (phương trình chuyển động tương đối) có thể thay bằng gia tốc tương đối $\vec{w}_r$.

Nhóm các số hạng còn lại :

$$2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{i}_1}{dt}+\frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{j}_1}{dt}\frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right)$$

được gọi là gia tốc quay hay gia tốc Koriolit ký hiệu là $\vec{w}_k$.

Thay các kết quả tìm được vào biểu thức của gia tốc tuyệt đối ta được :

$\vec{w}_a = \vec{w}_e + \vec{w}_r + \vec{w}_k$.

Ta đi đến định lý sau đây gọi là định lý hợp gia tốc.

Định lý 7.2 : Trong chuyển động tổng hợp của điểm gia tốc tuyệt đối bằng tổng hình học của gia tốc kéo theo, gia tốc tương đối và gia tốc Koriolit.

$$\vec{w}_a = \vec{w}_e + \vec{w}_r + \vec{w}_k. \qquad (7.5)$$

7.4. GIA TỐC KORIOLIT.

Gia tốc Koriolit $\vec{w}_k$ được xác định theo biểu thức :

$$\vec{w}_k = 2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{i}_1}{dt}+\frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{j}_1}{dt}\frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right)$$

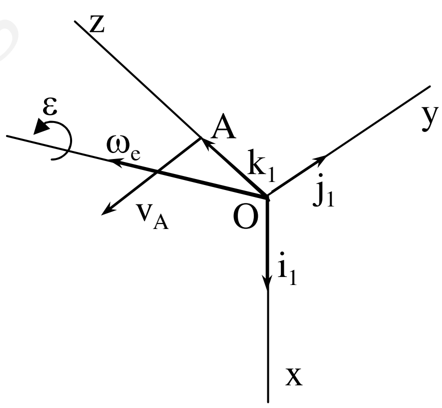
Khi hệ động có chuyển động quay thì các véc tơ đơn vị $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$, $\vec{k}_1$ sẽ quay theo khi đó đạo hàm của nó theo thời gian khác không. Trong trường hợp hệ động không tham gia chuyển động quay thì các đạo hàm của nó sẽ bằng không và do đó gia tốc Koriolit sẽ không có vì vậy gia tốc này còn được gọi là gia tốc quay. Gia tốc Koriolit biểu diễn ảnh hưởng chuyển động quay của hệ động đến gia tốc của điểm.

Nếu vận tốc góc của hệ động (vận tốc góc kéo theo) là ϖ_e thì khi hệ động quay quanh trục $o_1\varepsilon$ với vận tốc góc ω_e thì đạo hàm bậc nhất theo thời gian của các véc tơ đơn vị $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$, $\vec{k}_1$ chính là vận tốc đầu mút của chúng trong chuyển động quay quanh trục $o_1\varepsilon$. (xem hình 7.3).

Ta có :

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{i}_1 \qquad \frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{j}_1$$

$$\frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{k}_1$$



Hình 7.3

Thay các kết quả biểu thức trên vào biểu thức của $\vec{w}_k$ ta được :

$$\vec{w}_k = 2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{i}_1}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{j}_1}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right)$$

$$= 2\left(\frac{dx_1}{dt}\left(\vec{\omega}_C \, x \, \vec{i}\right) + \frac{dy_1}{dt}\left(\vec{\omega}_C \, x \, \vec{j}\right) + \frac{dz_1}{dt}\left(\vec{\omega}_C \, x \, \vec{k}\right)\right)$$

$$= 2\vec{\omega}_e x\left(\frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1\right) = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$$

Như vậy gia tốc Koriolit bằng hai lần tích hữu hướng giữa vận tốc góc kéo theo và véc tơ vận tốc tương đối.

$$\vec{w}_k = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r . \qquad (7.6)$$

Từ (7.6) ta có thể xác định độ lớn của gia tốc Koriolit theo biểu thức :

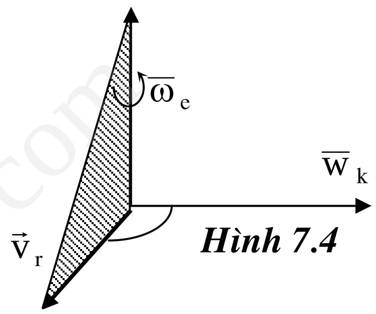
$$w_k = 2\omega_e . v_r \sin(\omega_e . v_r).$$

Ta thấy ngay gia tốc Koriolit bằng không trong trường hợp sau :

- Khi hệ động chuyển động tịnh tiến nghĩa là khi $\omega_e = 0$;

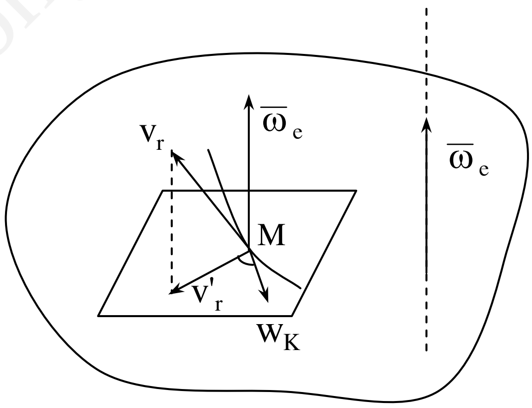
- Khi động điểm đứng yên trong hệ động, nghĩa là khi $\vec{v}_r = 0$;

- Khi chuyển động tương đối theo phương dọc theo trục quay của chuyển động kéo theo nghĩa là khi góc hợp giữa $\vec{\omega}_e$ và $\vec{v}_r$ bằng không hoặc bằng 180^0 .



Hình 7.4

Theo (7.6) gia tốc Koriolit có phương vuông góc với mặt phẳng chứa hai véc tơ $\vec{\omega}_e$ và $\vec{v}_r$ có chiều sao cho khi nhìn từ mút của nó xuống mặt phẳng đó sẽ thấy $\vec{\omega}_e$ quay ngược chiều kim đồng hồ đi một góc nhỏ hơn 180^0 sẽ đến trùng với $\vec{v}_r$ (xem hình 7.4).



Hình 7.5

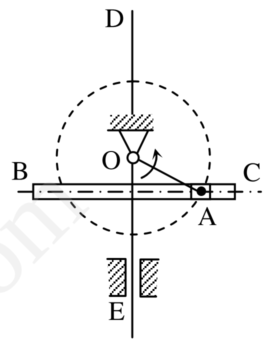
Trong thực hành ta có thể xác định phương chiều của $\vec{w}_k$ như sau :

Chiếu véc tơ vận tốc tương đối $\vec{v}_r$ lên mặt phẳng vuông góc với trục quay của chuyển động kéo theo. Sau đó quay hình chiếu $\vec{v}_r$ đó đi một góc 90^0 theo chiều quay của ω_e trong mặt phẳng trên (xem hình 7.5) ta sẽ xác định được phương chiều của gia tốc Koriolit.

Sau đây sẽ giới thiệu một số ví dụ vận dụng các định lý hợp vận tốc và hợp gia tốc trong chuyển động tổng hợp của điểm.

Thí du 7.1: Tay quay OA của cơ cấu tay quay cu lit quay quanh trục O vuông góc với mặt phẳng của cơ cấu. Đầu A của tay quay nối bằng khớp bản lề với con trượt B. Con trượt B có thể trượt trong máng BC của cu lit. Máng BC có thể chuyển động tịnh tiến lên xuống nhờ rãnh hướng dẫn E. Xác định vận tốc, gia tốc của máng BC cũng như vận tốc gia tốc của con trượt so với cu lit BC.

Cho biết tay quay có chuyển động quay đều với vận tốc góc n = 120 vòng/phút. Độ dài OA = 1 = 30cm (xem hình 7.6).



Hình 7.6

Bài giải:

Nếu chọn hệ động gắn với cu lit (máng BC) và hệ cố định gắn với trục quay O thì chuyển động của con trượt A trong máng là chuyển động tương đối. Chuyển động của máng tịnh tiến lên xuống là chuyển động kéo theo còn chuyển động của A quay quanh O là chuyển động tuyệt đối.

Trước hết ta có thể xác định được vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối của điểm A.

Vận tốc của tay quay OA.

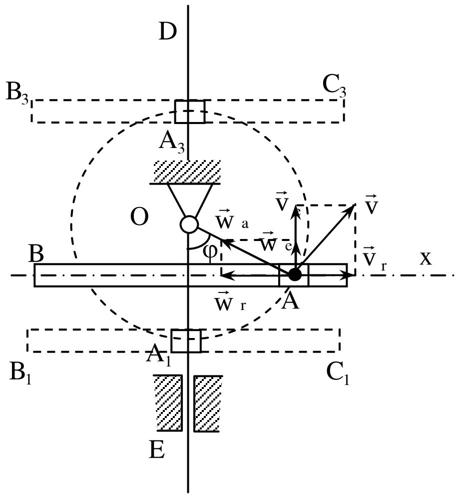
$$\omega = \frac{\pi.n}{30} = \frac{\pi.120}{30} = 4\pi(\text{rad/s}) \ .$$

Vị trí của cơ cấu được xác định bằng góc quay của tay quay OA :

$\varphi = \omega t = 4\pi t$ (rad).

Đầu A của tay quay thực hiện chuyển động tròn tâm O bán kính OA = 1.

Vận tốc của điểm A : $V_a = \omega.1 = 4\pi.30 = 120\pi \approx 3,77$ m/s.



Hình 7.7

$\vec{v}_a$ có phương vuông góc với OA hướng theo chiều quay ω (xem hình 7.7). $\vec{v}_a$ chính là vận tốc tuyệt đối của điểm A : $v_a = v_A$.

Vì tay quay quay đều nên gia tốc điểm A chỉ có một thành phần pháp tuyến.

$\vec{w}_A = \vec{w}_A^n$ về độ lớn

$w_A = \omega^2.1 = 16\pi^2.1$

$= 16\pi^2.30 \approx 4733$ cm/s^2 ;

$= 47{,}33$ m/s^2

Gia tốc $\vec{w}_A$ có chiều hướng từ A vào O. Gia tốc tuyệt đối của điểm A là $\vec{w}_A$.

Để tìm vận tốc của máng (vận tốc kéo theo) và vận tốc của con trượt A trong máng (vận tốc tương đối) ta áp dụng định lý hợp vận tốc. Ta có :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

Ở đây $\vec{v}_a = \vec{v}_A$ đã biết cả độ lớn và phương chiều. $\vec{v}_e$ là vận tốc của máng chuyển động tịnh tiến lên xuống do đó có phương thẳng đứng. Còn $\vec{v}_r$ là vận tốc của con trượt dọc theo máng BC nên có phương nằm ngang. Từ định lý hợp vận tốc ta có thể nhận được một hình bình hành mà đường chéo là $\vec{v}_a$ còn hai cạnh là $\vec{v}_e$ và $\vec{v}_r$. Dễ dàng tìm được các véc tơ vận tốc kéo theo $\vec{v}_e$ và $\vec{v}_r$ như trên hình (7.7). Ta có :

$$v_e = v_A.\sin\varphi = 3{,}77.\sin 4\pi.t(m/s)$$

$$v_r = v_A.\cos\varphi = 3{,}77.\cos 4\pi.t(m/s)$$

Phương chiều của các vận tốc $\vec{v}_e$ và $\vec{v}_r$ như hình vẽ.

Để xác định gia tốc kéo theo và tương đối (gia tốc của máng và gia tốc của con trượt trong máng) ta áp dụng dịnh lý hợp gia tốc.

$\vec{w}_a = \vec{w}_e + \vec{w}_r + \vec{w}_k$.

Trong bài toán này hệ động chuyển động tịnh tiến nên $\vec{w}_k = 0$ ta chỉ còn biểu thức :

$\vec{w}_a = \vec{w}_e + \vec{w}_r$.

Ở đây gia tốc tuyệt đối đã được xác định. Gia tốc kéo theo $\vec{w}_e$ có phương thẳng đứng còn gia tốc tương đối $\vec{w}_r$ có phương năm ngang. Cũng dễ dàng nhận thấy các véc tơ gia tốc kéo theo $\vec{w}_e$ và gia tốc tương đối $\vec{w}_r$ là hai cạnh của hình bình hành nhận gia tốc $\vec{w}_a$ làm đường chéo (xem hình 7.7). Ta có :

$w_e = w_A.\cos\varphi = 47{,}33.\cos 4\pi.t$

$w_r = w_A.\sin\varphi = 47{,}33.\sin 4\pi.t$

Phương chiều của gia tốc $\vec{w}_e$ và $\vec{w}_r$ như trên hình vẽ 7.7 .

Kết quả trên cho thấy vận tốc, gia tốc của máng BC ($v_{e,}$ w_{ed}) và vận tốc, gia tốc con trượt trong máng (v_r , w_r) là hàm của thời gian. Ta có thể xác định chúng tại các vị trí đặc biệt sau :

Khi $\varphi_1 = 4\pi t = 0$ ta có $v_e = 0$; $v_r = 3{,}77$ m/s

$W_e = 47{,}33$ m/s ; $w_r = 0$

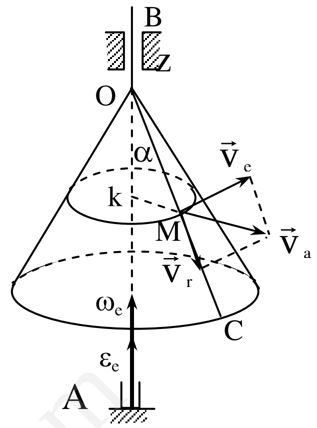
Khi $\varphi_2 = 4\pi t = \pi / 2$ ta có $v_e = 3{,}7 \text{ m / s}$; $v_r = 0$

$w_e = 0 \text{ m / s}$; $w_r = 3{,}77 \text{ m / s}$

Thí du 7.2 : Động điểm M chuyển động bắt đầu từ đỉnh O của nón dọc theo đường sinh OC với vận tốc không đổi $v_r = 24 \text{ cm / s}$. Nón cũng đồng thời quay bắt đầu cùng thời điểm xuất phát của điểm M theo quy luật $\varphi = 0{,}125t^2$. Xác định vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối của động điểm M tại thời điểm t = 4 giây. (xem hình 7.8). Cho biết góc đỉnh nón là 60^0.

Bài giải

Trong bài toán này chuyển động của điểm M dọc theo đường sinh OC là chuyển động tương đối. Như vậy vận tốc tương đối của điểm đã biết.



Hình 7.8

V_r = 24 cm / s = 0,24 m / s có phương chiều từ O đến C.

Chuyển động quay của nón quanh trục AB với quy luật $\varphi = 0{,}125t^2$ là chuyển động kéo theo.

Để xác định được vận tốc kéo theo của điểm ta phải xác định vị trí của nó tại thời điểm t_1 trên nón.

Ta có OM = v_r.t = 24.4 = 96 cm

Khoảng cách từ động điểm tại vị trí đang xét tới trục quay AB là :

MK = OM.sin30^0 = 96.0,5 = 48 cm.

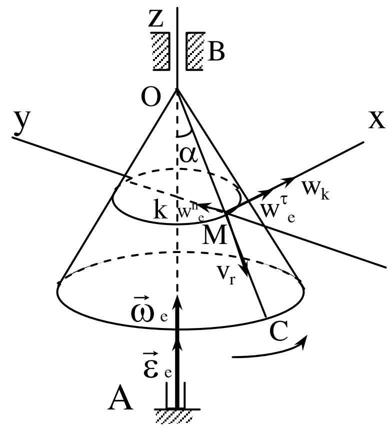
Vận tốc kéo theo tại thời điểm t_1 là :

$$\omega_e = \frac{d\varphi}{dt} = 0{,}25t \quad \text{với } t = t_1 = 4 \text{ giây}$$

ω_{et1} = 0,25.4 = 1 rad / s ;

Gia tốc góc trong chuyển động kéo theo là :

$$\varepsilon_e = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0{,}25(\text{rad}/s^2)$$



Hình 7.9

Các véc tơ ω_e và ε_e biểu diễn trên hình vẽ (7.9).

Các véc tơ vận tốc kéo theo $\vec{v}_e$ và vận tốc tương đối là $\vec{v}_r$ tại thời điểm t_1 = 4s được biểu diễn trên hình 7.8.

Về độ lớn vận tốc kéo theo xác định được :

v_e = MK . ω_e = 48,1 cm / s ≈ 0,48 m / s .

Áp dụng định lý hợp vận tốc ta có : $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

Về độ lớn vận tốc tuyệt đối của M tại thời điểm t_1 là :

$$V_a = V_M = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{48^2 + 24^2} = 53{,}64(cm/s) = 0{,}5364(m/s).$$

Để xác định gia tốc tuyệt đối của M, từ định lý hợp gia tốc ta có :

$$\vec{w}_a = \vec{w}_M = \vec{w}_e + \vec{w}_r + \vec{w}_k$$

Chuyển động kéo theo là chuyển động tròn nên $\vec{w}_e = \vec{w}_e^n + \vec{w}_e^r$.

Trong đó : $\vec{w}_e^n$ có phương chiều hướng từ M về K (xem hình 7.9), có độ lớn : $w_e^n = MK.\omega_e^2 = 48.1 = 48(cm/s^2)$.

$\vec{w}_e^r$ có phương chiều trùng với phương chiều $\vec{v}_e$ có độ lớn :

$$w_e^r = MK.\varepsilon_e^2 = 48.0{,}25 = 12(cm/s^2).$$

Gia tốc tương đối $\vec{w}_r$ trong trường hợp này bằng không còn gia tốc Koriolit $\vec{w}_k$ có phương chiều như trên hình vẽ. Có độ lớn :

$$w_k = 2\omega_e . v_r .\sin 30^0 = 2.1.24.0{,}5 = 24 \ (cm/s^2) \quad .$$

Chiếu biểu thức trên lên hai trục Mxy như trên hình ta có :

$$w_x = w_e^r + w_k = 12 + 24 = 36 \ cm/s^2 = 0{,}36 \ m/s^2.$$

$$w_y = w_e^n = 48 \ cm/s^2 = 0{,}48 \ m/s^2.$$

Gia tốc tuyệt đối của điểm

$$w_M = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{36^2 + 48^2} = 60c(cm/s^2).$$

Phương và chiều của w_M có thể xác định bằng các góc chỉ phương xác định như sau :

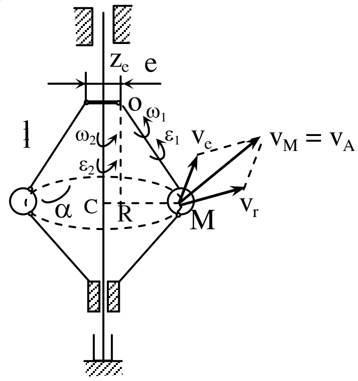
$$\cos(w_M x) = \frac{w_x}{w_M} = 0{,}6 \quad ; \qquad \cos(w_M y) = \frac{w_y}{w_M} = 0{,}8$$

__Thí du 7.3.__ : Cơ cấu điều chỉnh ly tâm biểu diễn như hình vẽ 7.10. Tại thời điểm đang xét quả cầu quay quanh điểm treo O cùng với thanh OM với vận tốc góc và gia tốc góc ω_1 = 2 rad / s và ε_1 = 0,2 rad / s^2. Cơ cấu quay quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc và gia tốc góc ω_2 =4 rad / s và ε_2 = o,8 rad / s^2. Xác định vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối của quả cầu M tại thời điểm đó. Cho biết kích thước của cơ cấu tại vị trí đang xét là :

$$l = 40 \text{ cm} \quad ; \quad e = 5 \text{ cm} \quad ; \quad \alpha = 30^0.$$

Bài giải

Trong bài toán này, chuyển động của cơ cấu quay quanh trục thẳng đứng là chuyển động kéo theo. Vận tốc góc kéo theo $\omega_e = \omega_2$ = 4 rad / s và gia tốc góc trong chuyển động kéo theo là $\varepsilon_e = \varepsilon_2$ = 0,8 rad / s^2.



Hình 7.10

Chuyển động của quả cầu M quay quanh O là chuyển động tương đối.Vận tốc góc trong chuyển động tương đối là $\omega_r = \omega_1$ = 2 rad / s và gia tốc góc trong chuyển động tương đối là $\varepsilon_r = \varepsilon_1$ = 0,2 rad / s^2.

Quỹ đạo chuyển động tương đối của M là đường tròn bán kính 1 và tâm 0

Quỹ đạo chuyển động kéo theo của M là đường tròn nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục quay AB và có bán kính :

CM = R = e+1sin30^0 = 5+40.0,5 = 25 cm.

Vận tốc tuyệt đối của điểm M được xác định như sau :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_M = \vec{v}_e + \vec{v}_r ;$$

$$v_e = R.\omega_e = 25.4 = 100 \text{ cm / s}$$

v_e có phương tiếp tuyến với quỹ đạo của chuyển động kéo theo , hướ theo chiều quay của cơ cấu ; V_r tiếp tuyến với quỹ đạo của chuyển động tương đối có nghĩa là vuông góc với thanh OM hướng theo chiều quay của ω_r , có trị số $V_r = l.\omega r = 40.2 = 80$ cm/s

Như vậy hai véc tơ $\vec{v}_e$ và $\vec{v}_r$ vuông góc với nhau vì vậy độ lớn vận tốc tuyệt đối xác định được :

$$v_M = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{100^2 + 80^2} = 128(cm/s).$$

Phương chiều của V_M xác định như trên hình vẽ 7.10.

Vì chuyển động tương đối và chuyển động kéo theo đều là chuyển động tròn nên biểu thức gia tốc tuyệt đối của điểm M ta có thể viết :

$$\vec{w}_M = \vec{w}^r{}_e + \vec{w}^n{}_e + \vec{w}_k + \vec{w}_r^r + \vec{w}_r^n. \qquad (a)$$

Sau đây xác định độ lớn và phương chiều của các thành phần gia tốc ở vế phải .

$W_e^t = R \cdot \varepsilon_e = 25 \cdot 0{,}8 = 20$ cm / s^2 . W_e^t cùng phương chiều với vận tốc kéo theo .

$\vec{w}_e^n = R.\,\omega^2{}_2 = 25.16 = 400$cm/s^2. Hướng từ M vào C

$w^r{}_r = 1 \cdot \varepsilon_r = 40 \cdot 0{,}2 = 8$ cm / s^2. $\vec{w}_r^r$ hướng theo chiều của v_r .

$w_r^n = 1 \cdot \omega^2{}_r = 40 \cdot 4 = 160$ cm / s^2. $\vec{w}_r^n$ hướng từ M vào O

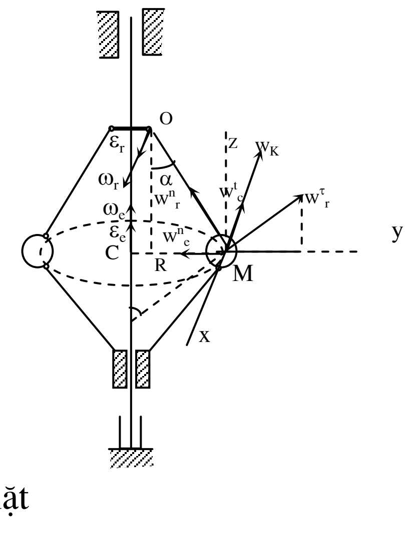
$w_k = 2\omega_e \cdot v_r \sin(\omega_{et} v_r) = 2 \cdot 4.\ 80\ .0{,}866 = 554$ cm / s^2

Ở đây góc < $(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = 60^0$

nên $\sin(\omega_e, v_r) = 0{,}866$.

Phương chiều của $\vec{w}_k$ xác định theo phương pháp thực o hành sẽ tìm thấy như ở hình vẽ (7.11) .

Để xác định gia tốc tuyệt đối $\vec{w}_M$ ta chiếu phương trình (a) lên 3 trục xyz chọn như hình vẽ.



Hình 7.11

Với cách chọn hệ trục trên ta thấy gia tốc $\vec{w}_k$ và $\vec{w}_e^r$ nằm trên trục x các gia tốc $\vec{w}_e^n$, $\vec{w}_r^r$, $\vec{w}_r^n$ năm trong mặt phẳng yMz.

Kết quả chiếu lên các trục thu được :$w_x = - w_k - w_e^n = -$

554 - 20 = -574 cm / s^2.

$w_y = w_e^r \cdot \cos 30^0 - w_r^n \cdot \sin 30^0 - w_e^n$;

$= 8 \cdot 0{,}866 - 160 \cdot 0{,}5 - 400 = -473$ cm / s^2 ;

Cuối cùng ta có :

$$w_M = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{(-574)^2 + (-473)^2 + (142)^2} =$$

$$= 869 \text{ cm / s}^2 = 8{,}69 \text{ m / s}^2$$

Để xác định phương chiều của M ta phải xác định các góc chỉ phương của chúng đối với các trục :

$$\cos(w_M x) = \frac{w_x}{w_M} = \frac{-574}{869} \quad ; \quad \cos(w_M y) = \frac{w_y}{w_M} = \frac{-473}{869}$$

$$\cos(w_M z) = \frac{w_z}{w_M} = \frac{142}{869}.$$