Chương 8

CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẲNG CỦA VẬT RẮN

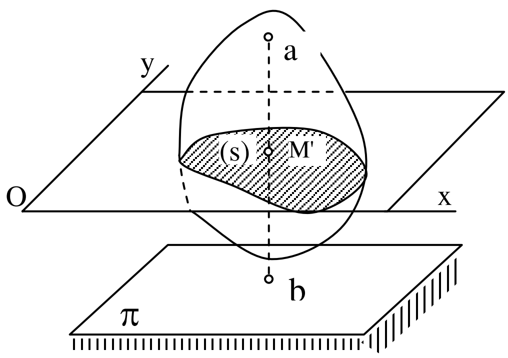
8.1. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG, VẬN TỐC VÀ GIA TỐC CỦA CẢ VẬT.

8.1.8.Định nghĩa và phân tích chuyển động song phẳng.

Chuyển động song phẳng của vật rắn là chuyển động khi mỗi điểm thuộc vật luôn luôn chuyển động trong một mặt phẳng cố định song song với mặt phẳng quy chiếu đã chọn trước (mặt phẳng cơ sở). Nói cách khác chuyển động song phẳng là chuyển động của vật khi mỗi điểm của nó trong quá trình chuyển động có khoảng cách đến mặt phẳng cơ sở là không đổi .

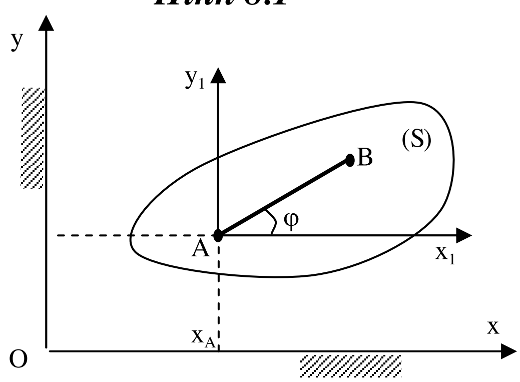
Trong kỹ thuật có nhiều chi tiết máy chuyển động song phẳng như bánh xe lăn trên một đường thẳng, thanh biên trong cơ cấu biên tay quay, ròng rọc động ..v..v...

.Xét vật rắn A chuyển động song phẳng có mặt phẳng cơ sở π (hình 8.1)



Hình 8.1

Đường thẳng ab thuộc vật vuông góc với mặt phẳng cơ sở, sẽ thực hiện chuyển động tịnh tiến. Mọi điểm nằm trên đường thẳng này có chuyển động như nhau và được đặc trưng bởi chuyển động của điểm M năm trên ab. Nếu xem vật là tập hợp vô số các đường ab như vậy suy ra chuyển động của vật được đặc trưng bởi tiết diện S trên mặt phẳng oxy. Mô hình bài toán chuyển động song phẳng của vật rắn được đưa về nghiên cứu chuyển động của một tiết diện (S) trong mặt phẳng oxy của nó (hình 8.2) gọi tắt là

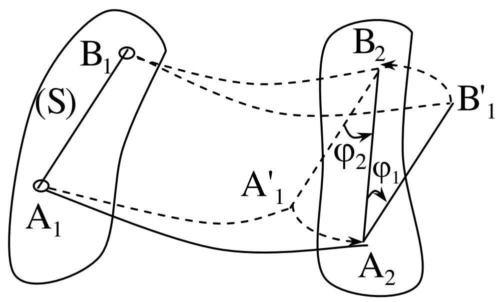


Hình 8-2

chuyển động phẳng của tiết diện S.

Vị trí của tiết diện (S) trong mặt phẳng oxy được xác định khi ta biết được vị trí của một đoạn thẳng AB thuộc tiết diện (S).

Xét chuyển động của tiết diện (S) từ vị trí (1) xác định bởi vị trí đoạn thẳng A_1B_1 đến vị trí (2) xác định bởi vị trí của đoạn thẳng A_2B_2 (hình 8.3).



Hình 8-3

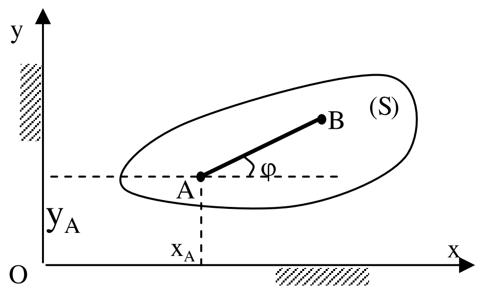
Dễ dàng thấy rằng ta có thể thay thế chuyển động của tiết diện (S) bằng hai chuyển động cơ bản sau :

Cho tiết diện (S) chuyển động tịnh tiến theo cực A hay cực B từ vị trí A_1B_1 đến vị trí A'_1B_2 hay $A_2B'_1$. Tiếp theo ta quay tiết diện S quanh A_2 hay B_2 một góc φ_1 hay φ_2. Vì $A_2B'_1 // A'_1B_2$ nên ở đây $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$.

Có thể đi đến kết luận ; chuyển động của tiết diện (S) trong mặt phẳng của nó (chuyển động song phẳng) luôn luôn có thể phân tích thành hai chuyển động: tịnh tiến theo một tâm cực và chuyển động quay quanh tâm cực đó. Chuyển động tịnh tiến phụ thuộc vào tâm cực nhưng chuyển động quay không phụ thuộc vào tâm cực. Như vậy chuyển động song phẳng chính là chuyển động tổng hợp của vật rắn khi nó đồng thời tham gia hai chuyển động quay quanh một trục có phương không đổi và tịnh tiến theo phương vuông góc với trục quay.

8.1.2. Phương trình chuyển động, vận tốc và gia tốc của vật .

Xét tiết diện (S) chuyển động trong mặt phẳng oxy chứa nó. Nếu chọn A là tâm cực và dựng đoạn thẳng AB trên tiết diện ta sẽ thấy vị trí của tiết diện (S) trong mặt phẳng oxy sẽ được xác định nếu ta biết vị trí của cực A và phương của AB so với trục ox. Nói khác đi, thông số định vị của tiết diện (S) trong mặt phẳng oxy là x_A, y_A, và φ (hình 8.4).



Hình 8-4

Trong thời gian chuyển động các thông số này biến đổi theo thời gian ta có :

$$x_A = x_A(t)$$

$$y_A = y_A(t) \qquad (8.1)$$

$$\varphi = \varphi(t)$$

Biết quy luật biến đổi (8.1) ta có thể xác định vị trí của tiết diện (S) ở bất kỹ thời điểm nào. Các phương trình (8.1) là phương trình chuyển động của tiết diện phẳng (S) trong mặt phẳng của nó (phương trình chuyển động song phẳng).

Từ phương trình chuyển động (8.1) ta thấy vận tốc và gia tốc của vật được biểu diễn bởi hai thành phần : vận tốc và gia tốc trong chuyển động tịnh tiến theo tâm cực A là : $\vec{v}_A, \vec{w}_A$. Vận tốc góc và gia tốc góc của tiết diện trong chuyển động quay quanh tâm cực A là ω, ε.

Vì chuyển động tịnh tiến phu thuộc tâm cực A nên vận tốc và gia tốc trong chuyển động tịnh tiến phụ thuộc vào tâm cực A. Ta có :

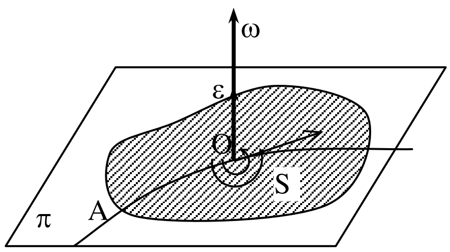
$$\vec{v}_{A1} \neq \vec{v}_{A2} \neq \vec{v}_{Ai}$$

$$\vec{w}_{A1} \neq \vec{w}_{A2} \neq \vec{w}_{Ai}$$

Chuyển động quay không phụ thuộc vào tâm A nên có :

$$\omega_{A1} = \omega_{A2} = \omega_{Ai} = \omega$$

$$\varepsilon_{A1} = \varepsilon_{A2} = \varepsilon_{Ai} = \varepsilon$$



Hình 8.5

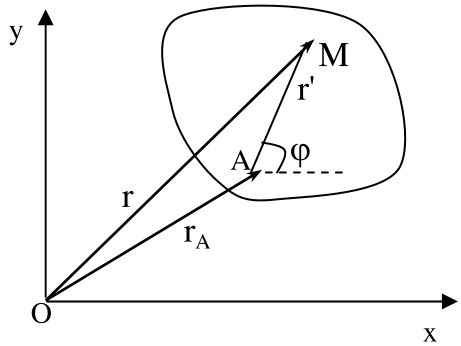
Vận tốc góc ω và gia tốc góc ε có thể biển diễn bằng véc tơ vuông góc với tiết diện (S) như hình(8.5) . Khi hai véc tơ này cùng chiều ta có chuyển động quay nhanh dần và nếu chúng ngược chiều có chuyển động quay chậm dần.

8.2. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG, VẬN TỐC VÀ GIA TỐC CỦA ĐIỂM TRÊN VẬT CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẲNG

8.2.1. Phương trình chuyển động

Xét điểm M bất kỳ trên tiết diện. Giả thiết chọn tâm cực A có toạ độ $x_A y_A$ (hình 8-6).

Ký hiệu góc hợp giữa AM với phương ox là φ và khoảng cách AM = b.Toạ độ của điểm M trong chuyển động tuyệt đối so với hệ quy chiếu oxy có thể xác định :



Hình 8.6

$x_M = x_A + b.\cos\varphi$;

$y_M = y_A + b.\sin\varphi$;

Các thông số x_A, y_A và φ là các hàm của tthời gian, nghĩa là :

$x_A = x_A(t)$ $\quad y_A = y_A(t)$ $\qquad \varphi = \varphi(t)$

Do đó x_M, y_M cũng là hàm của thời gian . Ta có :

$x_M = x_M(t) = x_A(t) + b.\cos\varphi(t)$;

$y_M = y_M(t) = y_A(t) + b.\sin\varphi(t)$; $\qquad$ (8.2)

(8.2) là phương trình chuyển động của điểm M.

Cũng có thể thiết lập phương trình chuyển động của điểm M dưới dạng véc tơ. Trên hình 8-6 có : $r = r(t) = r_A + r'$ $\qquad$ (8.2a)

Ở đây r' =AM có độ lớn không đổi bằng b, và quay quanh trục A với vận tốc góc là ω.

8.2.2. Các định lý vận tốc của điểm

8.2.2.1. Các định lý vận tốc của điểm trên vật chuyển động song phẳng

Định lý 8-1: Vận tốc của một điểm bất kỳ trên tiết diện chuyển động song phẳng bằng tổng hình học của vận tốc tâm cực A và vận tốc góc của điểm đó trong chuyển động của tiết diện quay quanh trục A với vận tốc góc ω. Ta có :

$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}$.

Chứng minh định lý : Từ phương trình chuyển động (8-2a) ta có :

$$\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}.$$

Thay $\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A; \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}_{MA} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AM}$

Ta sẽ có $\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}$, định lý được chứng minh. Cần chú ý véc tơ vận tốc của điểm M quay quanh A ký hiệu là $\vec{v}_{AM}$ có phương vuông góc với AM, có chiều hướng theo chiều quay của vận tốc ω (hình 8-6).

Đinh lý 8-2 : Định lý về hình chiếu vận tốc hai điểm

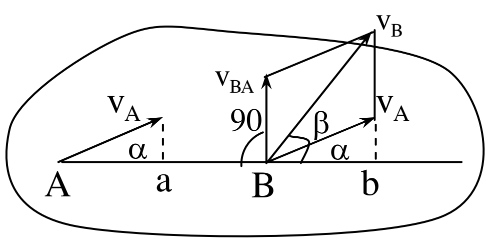
Trong chuyển động song phẳng của tiết diện S (chuyển động song phẳng) hình chiếu vận tốc của hai điểm bất kỳ trên tiết diện lên phương nối hai điểm đó luôn luôn bằng nhau.

$$(\vec{v}_A)_{AB} = (\vec{v}_B)_{AB}$$

Chứng minh định lý : Theo định lý 8-1, nếu chọn A làm tâm cực thì vận tốc điểm B xác định theo biểu thức :

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$ với $\vec{v}_{BA}$ vuông góc AB. Chiếu biểu thức trên lên phương AB ta có : $(\vec{v}_B)_{AB} = (\vec{v}_A)_{AB} + (\vec{v}_{BA})_{AB}$. Trong đó : $(\vec{v}_{BA})_{AB} = 0$ vì $\vec{v}_{BA} \perp \overrightarrow{AB}$.

Định lý đã được chứng minh.



Hình 8.7

Ta có thể minh họa định lý trên bằng hình vẽ(8-7). Trên hình vẽ ta có :

Aa = Bb hay $v_A\cos\alpha = v_B\cos\beta$.

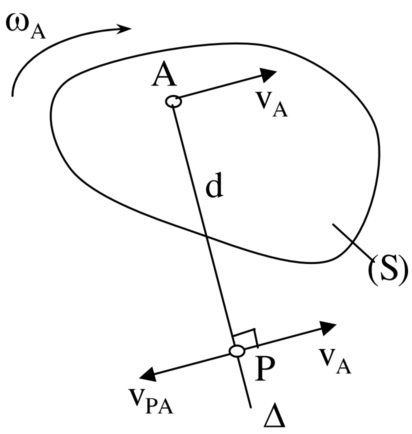
8.2.2.2. Tâm vận tốc tức thời - Xác định vận tốc của điểm trên tiết diện chuyển động phẳng theo tâm vận tốc tức thời

- Tâm vận tốc tức thời là điểm thuộc tiết diện có vận tốc tức thời bằng không. Nếu gọi P là tâm vận tốc tức thời thì : $v_P = 0$.

<u>Định lý 8-3</u> : Trong chuyển động song phẳng của vật rắn tại mỗi thời điểm luôn luôn tồn tại một và chỉ một tâm vận tốc tức thời.

<u>Chứng minh định lý</u> :

Xét tiết diện (S) chuyển động phẳng với vận tốc của tâm cực A là $\vec{v}_A$ và vận tốc góc trong chuyển động quay là ω . Quay véc tơ V đi một góc bằng 90 theo chiều quay của ω ta sẽ dựng được tia Δ. Trên tia Δ lấy một điểm P cách A một đoạn $AP = \dfrac{v_A}{\omega}$ (hình 8.8)



Hình 8.8

Theo biểu thức (8-2) ta có : $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA}$. Ở đây $v_{PA} = \omega.PA = \omega\dfrac{v_A}{\omega}$ $= v_A$.

Phương của $\vec{v}_{PA}$ vuông góc với AP hướng theo chiều quay vòng của ω nghĩa là $\vec{v}_{PA}$ có độ lớn bằng với độ lớn của v_A, cùng phương nhưng ngược chiều với $\vec{v}_A$.

Thay vào biểu thức tính $\vec{v}_P$ ta được $v_P = v_A - v_A = 0$ chính là tâm vận tốc tức thời.

Chứng minh tính duy nhất của tâm vận tốc tức thời :

Giả thiết tại thời điểm trên vật có hai tâm vận tốc tức thời P_1 và P_2 với $v_{P1} = 0$ và $v_{P2} = 0$.

Theo định lý 8-1 ta có : $\vec{v}_{P2} = \vec{v}_{P1} + \vec{v}_{P2P1}$ hay $0 = 0 + \vec{v}_{P2P1}$.

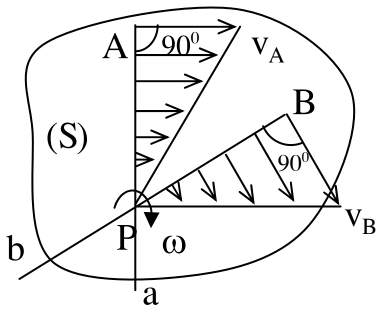
Thay $v_{P2P1} = \omega \, . \, P_2P_1$ ta thấy $v_{P2P1} = 0$ khi $\omega = 0$ hoặc $P_2P_1 = 0$. Vì vật chuyển động song phẳng nên $\omega \neq 0$ vậy chỉ có thể $P_2P_1 = 0$. Điều này có nghĩa P_1 trùng với P_2. Không thể có hai tâm vận tốc tức thời khác nhau cùng tồn tại ở một thời điểm.

- Xác định vận tốc trên vật chuyển động song phẳng theo tâm vận tốc tức thời P.

Xét vật chuyển động song phẳng có vận tốc góc ω và tâm vận tốc tức thời P. Theo biểu thức (8-2) nếu lấy P làm tâm cực ta viết biểu thức vận tốc của điểm M như sau :

$\vec{v}_M = \vec{v}_P + \vec{v}_{MP}$

Thay $v_P = 0$ ta có : $\vec{v}_M = \vec{v}_{MP}$



Hình 8.9

Như vậy vận tốc tức thời của điểm M được tính như vận tốc của điểm M trong chuyển động của vật quay tức thời quanh tâm vận tốc tức thời P.

$\vec{v}_M$ có phương vuông góc với PM, hướng theo chiều quay vòng của ω quanh P, có độ lớn $v_M = PM \cdot \omega$

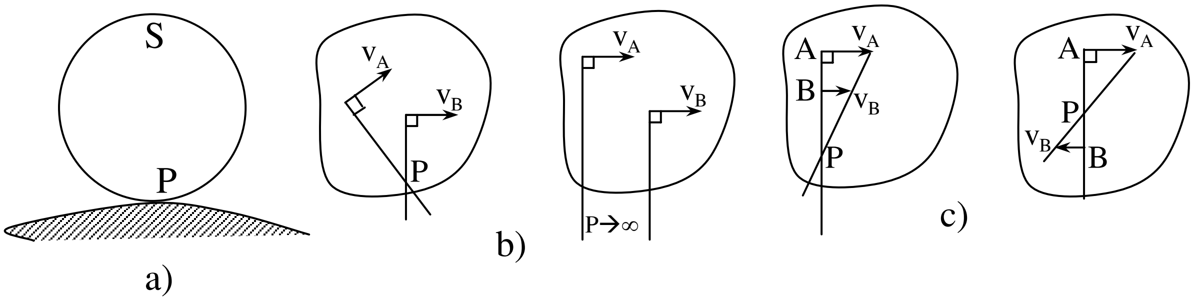
Ta có kết luận : vận tốc của điểm bất kỳ trên vật chuyển động song phẳng luôn luôn hướng vuông góc và tỷ lệ thuận với khoảng cách từ tâm vận tốc tức thời đến điểm. Quy luật phân bố vận tốc các điểm biểu diễn trên hình (8-9.). Trong thực hành có thể xác định tâm vận tốc tức thời P theo một số trường hợp sau :

<u>Trường hợp 1</u> : Vật chuyển động lăn không trượt trên một đường thẳng hay đường cong phẳng cố đ ịnh (hình 8-10a) có thể xác định ngay điểm tiếp xúc chính là tâm vận tốc tức thời vì rằng điểm đó có vận tốc bằng không.

<u>Trường hợp 2</u>: Khi biết phương vận tốc hai điểm hay quỹ đạo chuyển động của hai điểm trên vật chuyển động song phẳng thì tâm vận tốc tức thời là giao điểm của hai đường thẳng kẻ vuông góc với hai phương vận tốc hay hai phương tiếp tuyến của quỹ đạo tại hai điểm đó (hình 8-10b). Trong trường hợp này nếu hai đường đó song song với nhau có nghĩa tâm P ở xa vô cùng, ta nói vật tức thời chuyển động tịnh tiến (hình 8-10b).

<u>Trường hợp 3</u>: Khi biết độ lớn và phương chiều vận tốc hai điểm nằm trên cùng một đường thẳng vuông góc với vận tốc hai điểm đó (hình 8-10c), tâm P là

giao điểm của đường thẳng đi qua hai mút véc tơ vận tốc và đường thẳng đi qua hai điểm đó.

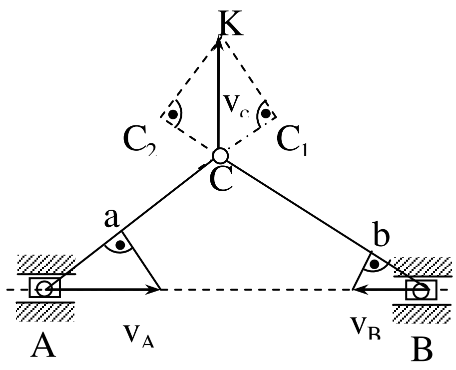


Hình 8.10

<u>Thí du 8.1</u>: Cơ cấu phẳng biểu diễn trên hình (8-11) có vận tốc $\vec{v}_A, \vec{v}_B$ của hai con trượt A và B đã biết. Xác định vận tốc của khớp C.

<u>Bài giải:</u>

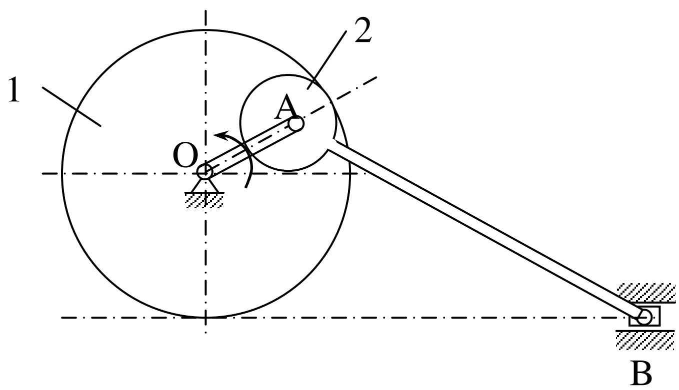
Khi cơ cấu hoạt động thì các thanh biên AC và BC chuyển động song phẳng. Để xác định vận tốc của điểm C ta áp dụng định lý hình chiếu vận tốc cho thanh AC và BC. Vì v_A và v_B đã biết nên dễ dàng xác định được hình chiếu của chúng lên phương AC và BC là $\overrightarrow{Aa}$ và $\overrightarrow{Bb}$. Tại C kéo dài các đoạn thẳng AC và BC, Trên đó lấy các điểm C_1, C_2 với CC_1 = Aa, CC_2 = Bb.



Hình 8.11

Các đoạn này là hình chiéu của V_C lên hai phương AC và BC. Ta vẽ tứ giác vuông góc tại C_1 và C_2 (hình 8-11) đường chéo CC' của tứ giác đó chính là vận tốc V_C.

<u>Thí du 8-2</u> : Tay quay OA quay quanh trục O với vận tốc góc không đổi n =60 vòng / phút và dẫn động cho thanh biên AB gắn với bánh xe 2 (hình 8-12). Bánh xe 2 truyền chuyển động cho bánh xe



Hình 8.12

1 không gắn với tay quay OA nhưng quay quanh trục O.

Xác định vận tốc con trượt B; Vận tốc góc của bánh xe 1 tại thời điểm khi tay quay OA song song và vuông góc với phương ngang.

Cho biết cơ cấu cùng nằm trong một mặt phẳng và $r_1 = 50$ cm ; $r_2 = 20$ cm; AB = 130 cm.

<u>Bài giải :</u>

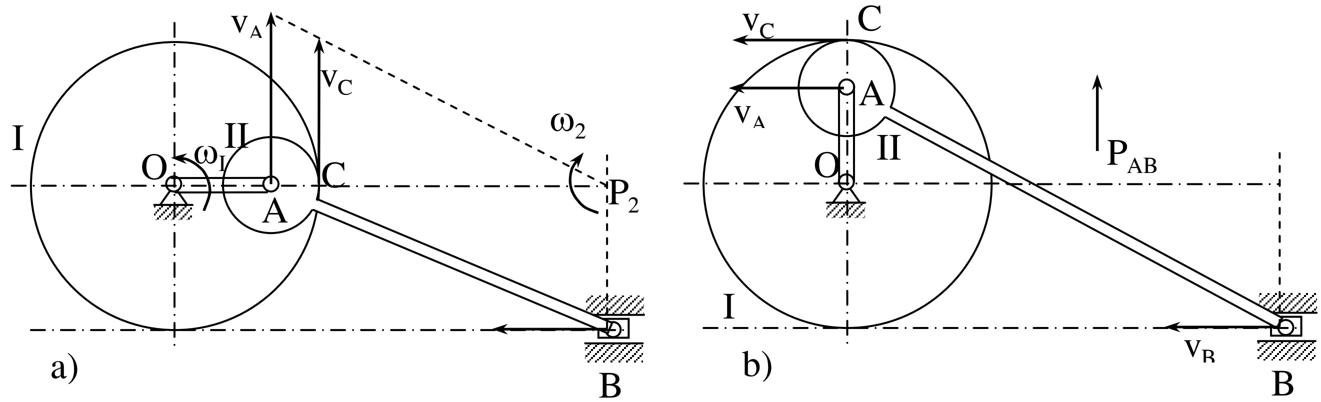
Cơ cấu có 5 khâu : bánh xe 1 chuyển động quay quanh trục O; con trượt B chuyển động tịnh tiến theo phương ngang; Thanh AB chuyển động song song phẳng; Bánh xe 2 chuyển động song phẳng; tay quay OA chuyển động quay quanh O.

1) Xét trường hợp tay quay OA ở vị trí song song với phương ngang (hình 8-12a).

Vận tốc góc thanh OA là : $\omega = \dfrac{\pi n}{30} = \dfrac{60\pi}{30} = 2\pi 1/s$.

Vận tốc điểm A : $v_A = OA \cdot \omega = 2\pi \cdot (r_1 - r_2) = 60\pi = 188{,}5$ cm / s.

Trên thanh AB có phương vận tốc hai điểm A và B đã biết nên xác định được tâm vận tốc tức thời P_1 (hình 8-12a).



Hình 8.12

Từ hình vẽ xác định được :

$$P_2B = r_1 = 50cm$$

$$P_2A = \sqrt{AB^2 - P_{AB}B^2} = \sqrt{130^2 + 50^2} = 120cm$$

$$P_2C = P_{AB} - r_2 = 120 - 20 = 100cm$$

Xác định vận tốc của các điểm A, B, C theo tâm vận tốc tức thời P_2 và vận tốc ω_1 của thanh AB ta có ;

$$V_A = \omega_2 \,.\, P_2A;$$

$$V_B = \omega_2 \,.\, P_2B;$$

$$V_c = \omega_2 .\; P_2C;$$

Trong đó : $\omega_2 = \dfrac{V_A}{P_2A} = \dfrac{60\pi}{120} = \dfrac{\pi}{2}(1/s)$

Thay vào các biểu thức của V_B và V_C ta có :

$$V_B = \frac{\pi}{2}.50 = 25\pi(cm/s)$$

$$V_C = \frac{\pi}{2}.100 = 50\pi(cm/s)$$

Vì bánh xe 2 ăn khớp với bánh xe 1 nên vận tốc điểm C còn có thể xác định theo công thức :

$V_C = \omega_1 \,.\, r_1$ suy ra : $\omega_1 = \dfrac{V_C}{r_1} = \pi$ (1/s)

2) Tay quay OA ở vị trí thẳng đứng (hình 8-12b).

Tại vị trí này vận tốc hai điểm A và B song song với nhau vì thế theo định lý hình chiếu ta có : $V_A\cos\alpha = V_B\cos\alpha$ suy ra $\vec{V}_A = \vec{V}_B$. Thanh AB tức thời chuyển động tịnh tiến. Mọi điểm trên nó và bánh xe 2 gắn với nó có chuyển động như nhau. Ta có :

$$V_B = V_C = V_A = \frac{60\pi}{50} = 188,5(cm/s).$$

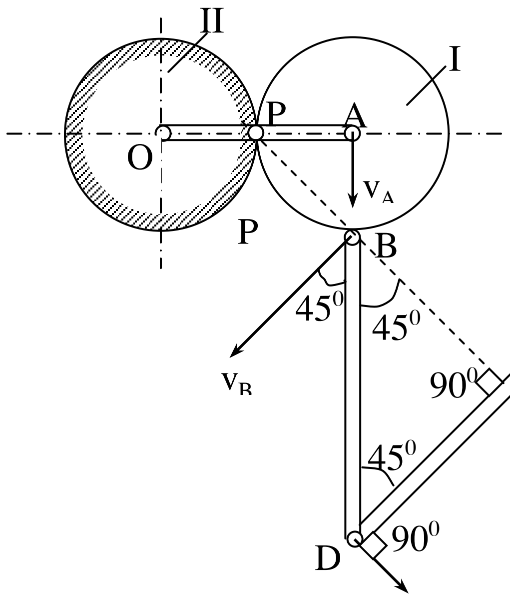
Phương chiều của các vận tốc biểu diễn trên hình vẽ .

Vận tốc góc của bánh xe 1 dễ dàng tìm được :

$$\omega_r = \frac{v_c}{r_1} = \frac{60\pi}{50} = \frac{6}{5}\pi \qquad \text{(rad/s)}$$

Thí du 8-3: tay quay OA quay quanh O với vận tốc góc ω_{oA}, truyền chuyển động cho bánh răng I ăn khớp với bánh răng II cố định. Hai bánh răng có bán kính như nhau và bằng R. Thanh truyền BD có đầu B liên kết với bánh xe I bằng khớp bản lề còn đầu D nối bằng khớp bản lề với tay quay CD (hình 8-13).

Xác định vận tốc góc của thanh truyền BD tại thời điểm có góc BDC = 45^0. Cho BD = 1 (cm).



Hình 8.13

Bài giải :

Trong cơ cấu bánh răng I và thanh truyền BD chuyển động song phẳng. Bánh răng 1 có tâm vận tốc tức thời P. Vận tốc điểm A được tính như sau :

$$V_A = \omega_{OA} . 2R.$$

$\vec{V}_A$ hướng vuông góc với OA theo chiều quay vòng của ω_{OA}. Suy ra vận tốc góc của bánh răng 1 :

$$\omega_1 = \frac{V_A}{R} = \frac{2R.\omega_{OA}}{R} = 2\omega_{OA}.$$

Vận tốc điểm B có độ lớn :

$$V_B = PB.\omega 1 = \sqrt{2}R.\omega_1 = 2\sqrt{2}R\omega_{OA}.$$

V_B Có phương vuông góc với với PB có chiều theo chiều quay của bánh răng 1 quanh P (hình vẽ 8-13).

Thanh BD chuyển động song phẳng, Đầu B có vận tốc đã xác định, đầu D có phương vận tốc vuông góc với CD do đó nhận được tâm vận tốc thức thời P_1 như trên hình vẽ .

Trên hình ta có $P_1B = \frac{1\sqrt{2}}{2}$. Vận tốc điểm B được xác định theo P_1:

$$V_B = P_1.B.\omega_{BD} \qquad \text{suy ra}: \omega_{BD} = \frac{V_B}{P_1B} = 4.\frac{R}{1}\omega_{OA}$$

Chiều quay của ω_{BD} như hình vẽ.

8.2.3. Gia tốc của điểm

8.2.3.1. Định lý 8-3 : Gia tốc của điểm M bất kỳ thuộc tiết diện (S) chuyển động song phẳng, bằng tổng hình học gia tốc của tâm cực A và gia tốc của điểm M trong chuyển động của tiết diện quay quanh A (hình 8-14).

$$\vec{w}_M = \vec{w}_A + \vec{w}_{MA} \qquad (8\text{-}4)$$

Trong đó : $\vec{w}_{MA} = \vec{w}^{\tau}_{MA} + \vec{w}^{n}_{MA}$

Với : $W^{\tau}_{MA} = \varepsilon.AM$ và $W^{n}_{MA} = \omega^2.AM$

Chứng minh định lý :

Đạo hàm bậc hai theo thời gian phương trình chuyển động (8-2) ta có :

$$\vec{w}_M = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}$$

Thay $\frac{d^2\vec{r}_A}{dt^2} = \vec{w}_A$ còn $\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\overrightarrow{AM}\right) = \vec{w}_{MA}$

$$w_{MA} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\overrightarrow{AM} + \vec{\omega}\times\frac{d}{dt}\overrightarrow{AM} = \vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{AM} + \vec{V}_{MA}$$

Với chú ý $\overrightarrow{AM}$ có độ lớn không đổi nên $\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AM}\right) = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AM} = \vec{V}_{MA}$

Ta có : $\vec{w}_M = \vec{w}_A + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AM} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{MA}$

$\vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AM}$ là gia tốc pháp tuyến của M trong chuyển động của (S) quay quanh A.

$\vec{\omega} \times \vec{V}_{MA}$ là gia tốc pháp tuyến của M trong chuyển động của (S) quay quanh A. Ta đã chứng minh được :

$\vec{w}_M = \vec{w}_A + \vec{w}^{\tau}_{MA} + \vec{w}^{n}_{MA}$

Vì các véc tơ ω có phương vuông góc với mặt phẳng của tiết diện nghĩa là vuông góc với AM và $\vec{V}_{MA}$ nên dễ dàng tìm được :

$$W_{MA}{}^{\tau} = AM \,.\, \varepsilon \text{ còn } W_{MA}{}^{n} = AM \,.\, \omega^2$$

Suy ra : $w_{MA} = AM.\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$

Véc tơ $\vec{w}_{MA}$ có phương hợp với AM một góc μ với $tg\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$ (hình 8.14).

8.2.3.2. Tâm gia tốc tức thời

Điểm trên tiết diện có gia tốc tức thời bằng không gọi là tâm gia tốc tức thời. Ký hiệu tâm gia tốc tức thời là **J** . Ta có : $W_j = 0$.

Định lý 8-4 :

Tại mỗi thời điểm trên tiết diện chuyển động song phẳng luôn tồn tại một và chỉ một tâm gia tốc tức thời J.

Chứng minh tính tồn tại của tâm gia tốc tức thời : giả thiết tiết diện chuyển động song phẳng với vận tốc góc và gia tốc góc là ω và ε. Trên tiết diện có điểm A biết gia tốc W_A (hình 8-15). Xoay W_A theo chiều quay của ε quanh A đi một góc μ với $tg\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$. Dựng nửa đường thẳng Ax theo phương đó.và lấy trên Ax một điểm J cách A một đoạn $AJ = \dfrac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$.

Điểm J đó có gia tốc :

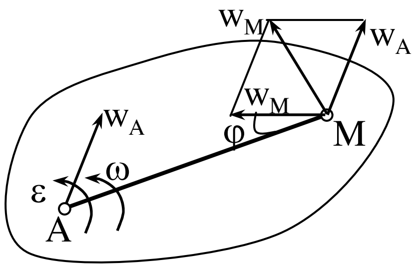
$$\vec{w}_J = \vec{w}_A + \vec{w}_{JA}$$

Trong đó W_{JA} có độ lớn bằng $w_{JA} = AJ.\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.'

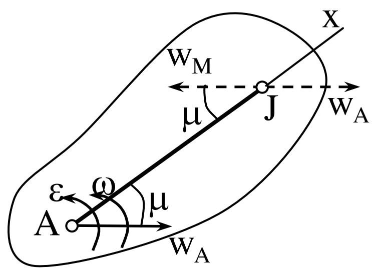
Thay $AJ = \dfrac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$. Ta được : $w_{JA} = \dfrac{w_A\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = w_A$.

$\vec{w}_{JA}$ hợp với AJ một góc μ với $tg\mu = \dfrac{|\varepsilon|}{\omega^2}$ hướng theo chiều quay của ε quanh A. Như trên hình vẽ (8-15) ta thấy hai véc tơ gia tốc $\vec{w}_A$ và $\vec{w}_{JA}$ có độ lớn bằng nhau song song và ngược chiều do đó :

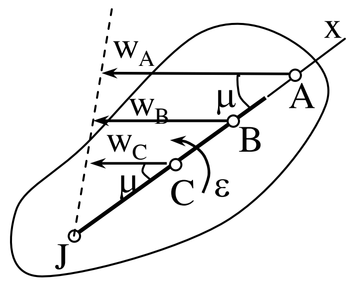
$$\vec{w}_J = \vec{w}_A + \vec{w}_{JA} = 0$$



Hình 8.14



Hình 8.15



Hình 8.16

Điểm J chính là tâm gia tốc tức thời của tiết diện .

Tiếp theo ta chứng minh tính duy nhất của tâm gia tốc tức thời J : giả thiết tại thời điểm trên tiết diện có hai tâm gia tốc tức thời J_1 và J_2.

Khi đó $W_{J1} = 0$ và $W_{J2} = 0$.

Theo biểu thức (4-8) ta có thể viết :

$$\vec{w}_{J2} = \vec{w}_{J1} + \vec{w}_{J2J1}.$$

Thay $W_{J1} = 0$ và $W_{J2} = 0$ vào biểu thức trên ta được $W_{J2J1} = 0$.

Vì $w_{J2J1} = J_2J_1\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$ trong đó $\varepsilon \neq 0$ $\omega \neq 0$

nên W_{J2J1} chỉ có thể bằng không khi $J_2J_1 = 0$ nghĩa là J_2 trùng với J_1. Không thể có hai tâm gia tốc cùng một thời điểm trên tiết diện chuyển động phẳng.

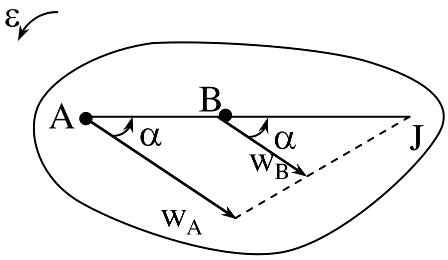
Nếu trên tiết diện có một tâm gia tốc tức thời J và chọn J là tâm cực thì gia tốc của điểm M trên tiết diện có thể xác định theo biểu thức :

$$\vec{w}_M = \vec{w}_J + \vec{w}_{MJ}.$$

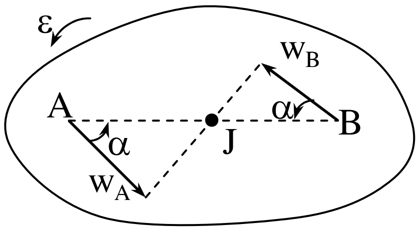
Vì $w_J = 0$ nên có thể viết :

$$\vec{w}_M = \vec{w}_{MJ} = \vec{w}^{\tau}_{MJ} + \vec{w}^{n}_{MJ}.$$

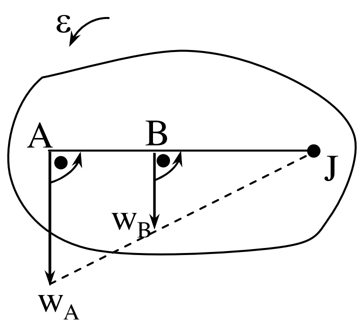
Về trị số $w_M = MJ.\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$ có phương hợp với MJ một góc μ với $tg\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$ theo chiều quay của ε quanh J (hình 8-16). Như vậy ta nhận thấy gia tốc của các điểm trên tiết diện chuyển động song phẳng luôn luôn hợp với phương nối từ điểm đến tâm gia tốc tức thời một góc μ có độ lớn tỷ lệ với khoảng cách từ điểm đến tâm gia tốc tức thời J. Vì các tính chất đó quy luật phân bố gia tốc các điểm trên tiết diện biểu diễn như trên hình (8-16). Cũng từ các tính chất trên có thể xác định tâm gia tốc tức thời trong một số trường hợp biểu diễn trên các hình (8-17), (8-18) , (8-19), (8-20), (8-21), (8-22).



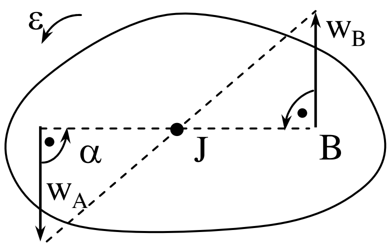
Hình 8.17



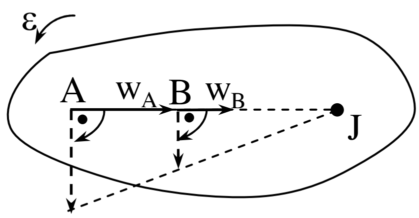
Hình 8.18



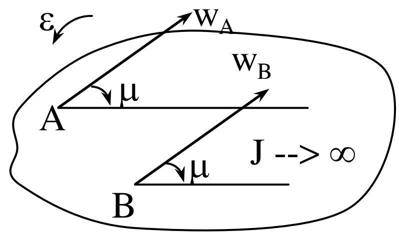
Hình 8.19



Hình 8.20



Hình 8.21



Hình 8.22

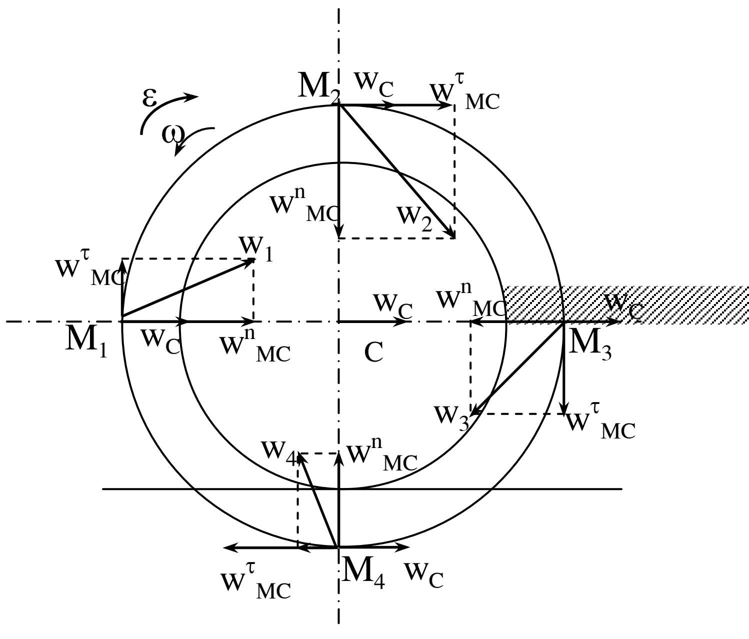
Trên hình (8-17) và (8-18) khi $0<\mu<90^0; \omega \neq 0, \varepsilon \neq 0$

Trên hình (8-19) và (8-20) khi $\mu=90^0; \omega \neq 0, \varepsilon \neq 0$

Trên hình (8-21) và (8-22) khi $\mu = 0; \omega \neq 0, \varepsilon = 0$

Trên hình (8-23) $\vec{w}_A = \vec{w}_B$.

<u>Thí du 8-4</u> : Bánh xe tầu hoả, bán kính vành ngoài R bán kính vành lăn là r lăn không trượt trên ray thẳng. Cho biết vận tốc và gia tốc của tầu là Vc = 0,4 m/s và $W_C = 0{,}2\ m/s^2$. Xác định gia tốc của các điểm M_1, M_2, M_3, M_4 trên vành ngoài của bánh xe tại thời điểm đang xét như hình (8-23). Biết r = 40cm, R = 50cm.



Hình 8.23

<u>Bài giải</u> :

Bánh xe chuyển động song phẳng đã biết vận tốc và gia tốc tâm C.

Trước hết xác định vận tốc góc và gia tốc góc của bánh xe.

Có thể xác định vận tốc góc theo v_C. Vì tâm vận tốc tức thời là điểm tiếp xúc giữa bánh xe với đường ray nên có :

$$\omega = \frac{v_C}{PC} = \frac{v_C}{r} = \frac{0{,}4}{0{,}4} = 1(rad/s).$$

Gia tốc góc :

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_C}{r}\right) = \frac{1}{r}.\frac{dv_C}{dt} = \frac{w_C}{r} = \frac{0,2}{0,4} = 0,59(rad/s^2)$$

Xác định gia tốc các điểm M theo biếu thức :

$$\vec{w}_M = \vec{w}_C + \vec{w}^r_{MC} + \vec{w}^n_{MC}$$ ở đây nhận tâm C là tâm cực.

Các véc tơ $\vec{w}^r_{MC}, \vec{w}^n_{MC}$ của các điểm có trị số như nhau, chỉ khác nhau về phương chiều.

Về độ lớn ta có : $W_{MC}{}^{\tau} = CM.\varepsilon = R.\varepsilon = 0,5.0,5 = 0,25\ m/s^2$;

$W_{MC}{}^{n} = CM.\omega^2 = R.\omega^2 = 0,5.1^2 = 0,5\ m/s^2$;

Phương chiều các véc tơ này ở các điểm biểu diễn trên hình vẽ. Căn cứ vào hình vẽ và trị số đã thu được ta có thể tính gia tốc các điểm M_1, M_2, M_3, M_4 như sau :

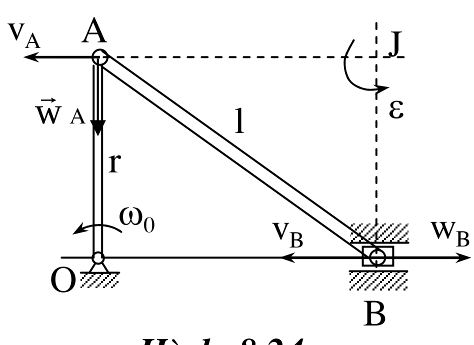
$$w_1 = \sqrt{\left(w_C + w^n_{MC}\right)^2 + w^{\tau\ 2}_{MC}} = \sqrt{(0,2+0,5)^2 + 0,25^2} = 0,74 m/s^2$$

$$w_2 = \sqrt{\left(w_C + w^{\tau}_{MC}\right)^2 + w^{n\ 2}_{MC}} = \sqrt{(0,2+0,25)^2 + 0,5^2} = 0,67 m/s^2$$

$$w_3 = \sqrt{\left(w^n_{CM} + w_C\right)^2 + w^{\tau\ 2}_{MC}} = \sqrt{(0,5+0,2)^2 + 0,25^2} = 0,39 m/s^2$$

$$w_4 = \sqrt{\left(w^{\tau}_{CM} + w_C\right)^2 + w^{n\ 2}_{MC}} = \sqrt{(0,25+0,2)^2 + 0,5^2} = 0,50 m/s^2$$

<u>**Thí du 8-5**</u> : Tay quay OA quay đều với vận tốc góc ω_{OA}. Tìm gia tốc của con trượt B và gia tốc góc của thanh AB trên cơ cấu hình vẽ (8-24). Cho biết tại thời điểm khảo sát góc BOA = 90^0 ; độ dài OA = r ; AB = 1.



Hình 8.24

<u>Bài giải</u> :

Tại vị trí khảo sát có :$v_A = v_B$

Thanh AB tức thời chuyển động tịnh tiến: $\omega_{AB} = 0$

Gia tốc điểm A bằng : $W_A = W_A{}^n = r\omega_0{}^2$ có phương chiều hướng từ A vào O.

Gia tốc điểm B luôn có phương nằm ngang.

Để xác định tâm gia tốc tức thời ta xác định góc μ:

$$\mathrm{tg}\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} = \infty \qquad \text{do đó } \ \mu = 90^0$$

Dễ dàng tìm được tâm gia tốc tức thời của thanh AB là giao điểm của hai đường thẳng hạ vuông góc với phương W_A và W_B tại A và B.

Vì $\omega_{AB} = 0$ nên có thể viết : $W_A = JA.\varepsilon_{AB}$; $W_B = JB.\varepsilon_{AB}$

Suy ra : $\dfrac{w_A}{JA} = \dfrac{w_B}{JB}$,

Ở đây $JB = r$ còn $JA = \sqrt{l^2 - r^2}$ nên $w_B = \dfrac{r^2}{\sqrt{l^2 - r^2}}.\omega^2 \mathrm{rad/s^2}$

Phương của $\vec{w}_B$ theo phương ngang, chiều hướng theo chiều quay vòng của ε_{AB} quanh J như hình vẽ.

Từ biểu thức : $W_A = JA.\varepsilon_{AB}$ suy ra $\varepsilon_{AB} = \dfrac{w_A}{JA} = \dfrac{w_A}{\sqrt{l^2 - r^2}}.\omega^2 \mathrm{rad/s^2}$

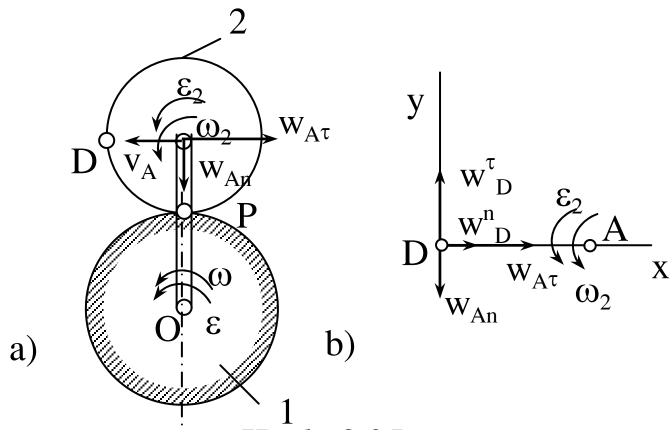
Thay $W_A = r.\omega_0^2$ ta được : $\varepsilon_{AB} = \dfrac{r}{\sqrt{l^2 - r^2}}.\omega^2 \mathrm{rad/s^2}$

<u>Thí du 8-6</u> : Cho cơ cấu gồm hai bánh răng ăn khớp với nhau. Bánh răng 1 bán kính $r_1 = 0,3$ m cố định; Bánh răng 2 bán kính $r_2 = 0,2$ m lăn trên vành bánh răng 1 và nhận chuyển động từ tay quay OA quay với vận tốc góc là ω_{OA} và gia tốc góc ε_{OA} (hình 8-25a).

Xác định gia tốc điểm D trên vành bánh răng 2 tại thời điểm có ;

$\omega_{OA} = 1 \ \mathrm{rad/s^2}$

và $\varepsilon_{OA} = = 4 \ \mathrm{rad/s^2}$.



Hình 8.25

Bài giải : Bánh răng 2 chuyển động song phẳng. Vận tốc và gia tốc của tâm A được xác định :

$v_A = OA.\omega_{OA} = 0,5$ m/s ;

$W_A{}^{\tau} = OA.\varepsilon_{OA} = -2$ m/s^2; $W_A{}^{n} = OA.\omega^2 = 0,5$ m/s^2.

Ta có thể xác định được vận tốc góc ω_2 của bánh răng 2 :

$$\omega_2 = \frac{v_A}{r_2} = \frac{0,5}{0,2} = 2,5 rad/s$$

Chiều quay của ω_2 như hình vẽ (8-25).

Gia tốc góc ε_2 của bánh răng 2 được xác định theo biểu thức :

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{1}{r^2}.\frac{dv_A}{dt} = \frac{w_a^{\tau}}{r_2} = \frac{-2}{0,2} = -10 rad/s^2$$

Điều này chứng tỏ bánh răng 2 chuyển động chậm dần, chiều của ε_2 ngược chiều với ω_2.

Gia tốc điểm D có thể viết :

$$\vec{w}_D = \vec{w}_A^{\tau} + \vec{w}_A^{n} + \vec{w}_{DA}^{\tau} + \vec{w}_{DA}^{n} \qquad (a)$$

Tại thời điểm khảo sát có :

$W_{DA}{}^{\tau} = DA.\varepsilon_2 = r_2\varepsilon_2 = 0,2.(10) = 2$ m/s^2;

$W_{DA}{}^{n} = DA.\omega_2 = r_2\omega_2{}^2 = 0,2.(2,5)^2 = 1,25$ m/s^2.

Chiếu hai vế đẳng thức (a) lên hai trục Dx và Dy (hình 8-25b) ta được :

$W_{Dx} = W_A{}^{\tau} + W_{DA}{}^{n} = 2 + 1,25 = 3,25$ m/s^2;

$W_{Dy} = W_{DA}{}^{\tau} - W_A{}^{n} = 2 - 0,5 = 1,5$ m/s^2.

Suy ra : $$w_D = \sqrt{w_{Dx}^2 + w_{Dy}^2} = \sqrt{3,25^2 + 1,5^2} \approx 3,58 m/s^2$$