Phần 3

ĐỘNG LỰC HỌC

Chương 11

CÁC ĐỊNH LUẬT CỦA NIU-TƠN VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG

11.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Động lực là phần tổng quát của cơ học. Động lực học nghiên cứu chuyển động của vật thể dưới tác dụng của lực. Động lực học thiết lập các định luật liên hệ giữa lực tác dụng với những đặc trưng động học và áp dụng các định luật đó có thể giải các bài toán kỹ thuật.

Vật thể trong động lực học được xét dưới dạng mô hình : chất điểm, cơ hệ, vật rắn.

Chất điểm là một điểm hình học có mang khối lượng. Chất điểm là mô hình đơn giản nhất và cơ bản nhất của vật thể trong động lực học.

Cơ hệ là tập hợp nhiều chất điểm chuyển động phụ thuộc lẫn nhau.

Vật rắn là cơ hệ đặc biệt khi khoảng cách giữa hai chất điểm bất kỳ trong đó luôn luôn không đổi.

Khác với tĩnh học, lực trong động lực học có thể là không đổi, có thể biến đổi cả về độ lớn và phương chiều.

Lực phụ thuộc vào thời gian như lực kéo đầu máy, phụ thuộc vào vị trí của vật như lực hấp dẫn, lực đàn hồi của lò xo, phụ thuộc vào vận tốc như lực cản của không khí. Một cách tổng quát trong động lực học lực là một hàm của thời gian, vị trí và vận tốc. Ta có : $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$.

Trong động lực học các lực được phân chia thành nội lực, ngoài lực hay hoạt lực và phản lực liên kết. Nội lực ký hiệu là $\vec{F}_i$. $\vec{F}_i$ là lực tác động tương hỗ giữa các chất điểm trong một cơ hệ.

Ngoại lực ký hiệu $\vec{F}_e$ là các lực do chất điểm hay vật thể ngoài hệ tác dụng vào hệ. Phản lực liên kết ký hiệu $\vec{N}$ là lực tác dụng do các vật gây liên kết lên cơ hệ khảo sát. Hoạt lực là các lực tác dụng lên cơ hệ không kể phản lực liên kết, thường ký hiệu là $\vec{F}_a$

Để khảo sát chuyển động của vật bao giờ cũng chọn trước một hệ quy chiếu. Hệ quy chiếu không phụ thuộc vào thời gian gọi là hệ quy chiếu quán tính, ngược lại hệ quy chiếu phụ thuộc vào thời gian gọi là hệ quy chiếu không quán tính .

11.2. CÁC ĐỊNH LUẬT CỦA NIU -TƠN

Cơ sở lý luận của động lực học chủ yếu là các định luật của NIU - TON.

I-sác Niu Tơn (1643-1727) là nhà bác học lỗi lạc đã đặt nền móng cho cơ học cổ điển và đã xây dựng lý thuyết cơ học hoàn thiện cân đối. Vì thế cơ học cổ điển còn gọi là cơ học Niu - Tơn.

Sau đây giới thiệu các định luật của Niu - Tơn và xem như là hệ tiền đề của cơ học.

Định luật 1(Định luật quán tính)

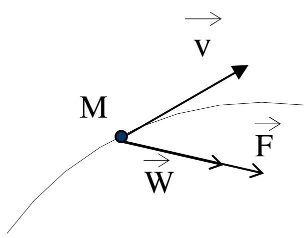
Chất điểm không chịu tác dụng của lực nào sẽ đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều.

Trạng thái đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều là trạng thái chuyển động theo quán tính. Khi chuyển động theo quán tính chất điểm sẽ có : $\vec{v} = \text{const}$ và $\vec{w} = 0$.

Định luật 2 (định luật cơ bản của động lực học)

Dưới tác dụng của lực chất điểm sẽ chuyển động với gia tốc cùng phương chiều với lực (hình 9-1)

$$\vec{F} = m.\vec{W}$$



Hình 11.1

m là hệ số tỷ lệ, phụ thuộc vào lượng vật chất có trong chất điểm.

Theo định luật này lực là nguyên nhân làm cho chất điểm chuyển động có gia tốc.

Biểu thức (11-1) cho thấy : Nếu lực $\vec{F}$ không đổi m càng lớn $\vec{W}$ càng nhỏ và ngược lại, điều đó chứng tỏ kkối lượng m là số do quán tính của vật (tính ỳ của vật)

Từ hệ thức (11-1) nếu lực là trọng lượng của vật sẽ có :P = mg. Ở đây g được gọi là gia tốc trọng trường.

Hệ thức (11-1) gọi là phương trình cơ bản của động lực học.

Định luật 3 (định luật về tính độc lập tác dụng của lực)

Dưới tác dụng đồng thời của một hệ lực chất điểm sẽ chuyển động với gia tốc bằng tổng hình học các gia tốc mà chất điểm thu được khi nó chịu tác dụng độc lập từng lực một .

$$\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + ... + \vec{w}_n . \qquad (11\text{-}2)$$

$\vec{w}$ là gia tốc của chất điểm khi hệ lực cùng tác dụng đồng thời ; $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_n$ là gia tốc của chất điểm khi nó chịu tác dụng từng lực: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_n$ độc lập .

Từ hệ (11-2) nếu nhân hai vế với khối lượng m sẽ được :

$$m\vec{w} = m\vec{w}_1 + m\vec{w}_2 + ... + m\vec{w}_n$$

Theo định luật hai thì :

Do đó ta có : $m\vec{w} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}$ (11-3)

Hệ thức (11-3) là phương trình cơ bản của động lực học khi chất điểm chịu một hệ lực tác dụng.

Định luật 4 (định luật tác dụng và phản tác dụng)

Lực tác dụng tương hỗ giữa hai chất điểm là những lực cùng phương, cùng độ lớn và ngược chiều.

Định luật này mô tả tác dụng tương hỗ giữa hai chất điểm và là cơ sở nghiên cứu cho động lực học của hệ.

Cần chú ý rằng hai lực tương hỗ không phải là một cặp lực cân bằng vì chúng đặt lên hai chất điểm khác nhau.

11-3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT ĐIỂM VÀ CƠ HỆ.

Xét chất điểm chuyển động trong hệ quy chiếu quán tính oxyz, dưới tác dụng của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ... \vec{F}_n$. Đối với chất điểm tự do các lực này là các hoạt lực đặt lên chất điểm. Đối với chất điểm không tự do các lực này bao gồm cả hoạt lực và phản lực liên kết. Căn cứ vào phương trình cơ bản của động lực học ta có thể thành lập phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dưới các dạng khác nhau.

11.3.1.Dạng véc tơ

Gọi véc tơ định vị của chất điểm là $\vec{r}$ ta có :

$$\vec{w} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

Khi đó phương trình cơ bản viết cho chất điểm như sau :

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_1 \qquad (11\text{-}4)$$

Phương trình vi phân (11-4) được gọi là phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dưới dạng véc tơ.

11.3.2. Dạng toạ độ Đề các

Chiếu phương trình (9-4) lên các trục toạ độ oxyz sẽ được :

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^{n} X_i \ ;$$

$$m\ddot{y} = \sum_{i=1}^{n} Y_i \ ; \qquad (11\text{-}5)$$

$$m\ddot{z} = \sum_{i=1}^{n} Z_i \ .$$

Ở đây x, y, z là toạ độ của chất điểm trong hệ oxyz, còn X_i, Y_i, Z_i là hình chiếu của lực $\vec{F}_i$ lên các trục ox, oy, oz.

Hệ phương trình (11-5) được gọi là hệ phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dưới dạng toạ độ Đề các.

11.3.3. Dạng toạ độ tự nhiên

Gọi W^τ, W^η, W^β là hình chiếu của gia tốc điểm và F_i^τ, F_i^η, F_i^β là hình chiếu của F_i lên các trục của hệ toạ độ tự nhiên. Sau khi chiếu phương trình (11-4) lên các trục của hệ toạ độ tự nhiên ta được :

$$mw^\tau = m\ddot{s} = \sum_{i=1}^{n} F_i^\tau \ ;$$

$$mw^\eta = m\frac{v^2}{\rho} = \sum_{i=1}^{n} F_i^\eta \ ; \qquad (11\text{-}6)$$

$$mw^\beta = 0 = \sum_{i=1}^{n} F_i^\beta \ .$$

Đối với cơ hệ chúng ta có thể tách một chất điểm trong hệ ra để xét. Gọi hợp các ngoại lực tác dụng lên chất điểm thứ k được tách ra là $\vec{F}_{ke}$ và hợp các nội lực tác dụng lên nó là $\vec{F}_{ki}$.

Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm viết dưới dạng véc tơ :

$$m_k \vec{w}_k = \vec{F}_{ki} + \vec{F}_{ke}$$

Trong đó m_k và $\vec{w}_k$ là khối lượng và gia tốc của chất điểm thứ k .

Khi xét tất cả các chất điểm ta sẽ thu được N phương trình sau :

$$m_1\vec{w}_1 = \vec{F}_{1i} + \vec{F}_{1e};$$

$$m_2\vec{w}_2 = \vec{F}_{21i} + \vec{F}_{2e}; \qquad (11\text{-}7)$$

....

$$m_n\vec{w}_n = \vec{F}_{ni} + \vec{F}_{ne}.$$

Hệ phương trình (11-7) được gọi là hệ phương trình vi phân chuyển động của hệ dưới dạng véc tơ. Nếu chiếu hệ phương trình (11.7) lên các trục của hệ toạ độ Đề các hoặc hệ toạ độ tự nhiên ta sẽ được hệ phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ dưới dạng toạ độ Đề các và hệ toạ độ tự nhiên.

11-4. HAI BÀI TOÁN CƠ BẢN CỦA ĐỘNG LỰC HỌC

Từ phương trình vi phân chuyển động của chất điểm ta thấy trong động lực học có hai bài toán cơ bản sau đây :

- Bài toán cơ bản thứ nhất: Cho biết chuyển động của chất điểm xác định lực đã gây ra chuyển động đó. Bài toán này gọi là bài toán thuận.

- Bài toán cơ bản thứ hai: Cho biết các lực tác dụng lên chất điểm và điều kiện ban đầu của chuyển động xác định quy luật chuyển động của chất điểm. Bài toán này gọi là bài toán nghịch.

Sau đây giới thiệu cách giải hai bài toán cơ bản nói trên.

Đối với bài toán thứ nhất ta thiết lập phương trình vi phân của chuyển động chất điểm. Từ phương trình vi phân ta xác định được lực tác dụng lên từng chất điểm. Điều cơ bản của bài toán là xác định gia tốc của chất điểm điều này đã được giải quyết trong động học.

Đối với bài toán thứ hai, ta thay lực vào vế phải của phương trình vi phân sau đó tích phân phương trình vi phân tìm được. Để tìm dạng chuyển động cụ thể ta xác định hằng số tích phân căn cứ vào các điều kiện ban đầu của chuyển động. Nếu phương trình vi phân viết dưới dạng toạ độ Đề các sau khi lấy tích phân hai lần sẽ xuất hiện 6 hằng số tích phân, nghĩa là các nghiêm x, y, z thu được là các hàm của thời gian và 6 hằng số tích phân đó :

$x=f_1(t,C_1,C_2....C_6)$

$y= f_2(t,C_1,C_2....C_6)$

$z= f_3(t,C_1,C_2....C_6)$

Các hằng số tích phân trên được xác định từ các điều kiện ban đầu ;

Khi $t=0$ $x=x_0$; $y=y_0$; $z=z_0$;

$\dot{x} = \dot{x}_0 ; \dot{y} = \dot{y}_0 ; \dot{z} = \dot{z}_0$

<u>Thí du 11-1</u>:

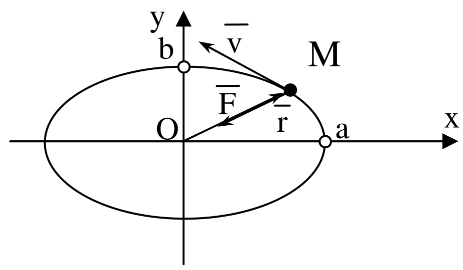
Chất điểm có khối lượng m chuyển động theo đường enlip x=acoskt và y=bsinkt hãy tìm lực tác dụng lên chất điểm (hình 11-2).

Bài giải :

Bài toán này thuộc bài toán cơ bản thứ nhất. Căn cứ vào phương trình chuyển động

x=acoskt

y=bsinkt



Hình 11.2

Xác định được :

$$\ddot{x} = ak^2 \cos kt = -k^2 x\,;$$

$$\ddot{y} = bk^2 \sin kt = -k^2 y\,;$$

Ta có phương trình vi phân chuyển động như sau :

$$\ddot{x}m = F_x = -mk^2 x$$

$$\ddot{y}m = F_y = -mk^2 y$$

Lực tác dụng lên chất điểm sẽ là F với :

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2\sqrt{x^2 + y^2} = mk^2 r$$

Các góc chỉ phương của $\vec{F}$ là :

$$\cos(F, x) = \frac{F_x}{F} = \frac{-x}{r}$$

$$\cos(F, y) = \frac{F_y}{F} = \frac{-y}{r}$$

Mặt khác ta cũng có :

$$\cos(r, x) = \frac{x}{r}$$

$$\cos(r, y) = \frac{y}{r}$$

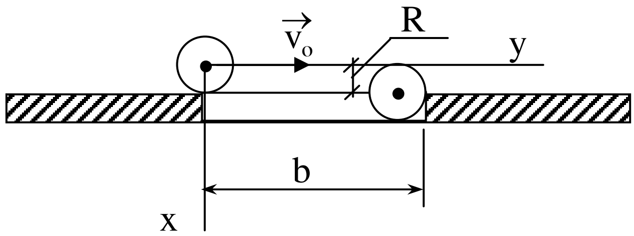
Dễ dàng nhận thấy $\vec{F}$ cùng phương nhưng ngược chiều với véc tơ định vị $\vec{r}$ của chất điểm.

Ta có : $\vec{F} = -mk\vec{r}$.

Thí du 11-2 : Để phân loại hạt người ta cho hạt đi qua một sàng dao động ngang có nhiều lỗ. Biết rằng vận tốc của hạt khi bắt đầu chuyển động qua lỗ $\vec{v}_0$ (hình 11-3). Hạt có hình dạng cầu, bán kính R. Bỏ qua lực cản của không khí xác định độ dài bé nhất b của lỗ để hạt có thể rơi qua lỗ được.

Bài giải:

Để hạt rơi qua lỗ sàng trọng tâm của hạt tại vị trí bất đầu chạm mép bên kia của lỗ phải nằm dưới mặt phẳng ngang của sàng. Để giải quyết được điều kiện đó ta xác định quãng đường hạt đi được theo phương ngang (phương ox) khi tâm hạt rơi xuống được một đoạn x=R. Lực tác dụng lên hạt coi như đã biết đó là trọng lượng bản thân của nó. Bài toán ở đây thuộc loại bài toán cơ bản thứ hai.



Hình

Chọn hệ toạ độ oxy gắn với sàng (hình 11-3) coi sàng đứng yên còn hạt chuyển động so với sàng. Lực tác dụng lên hạt có :

$$F_y = 0 \quad F_x = +mg.$$

Phương trình vi phân chuyển động của hạt viết được :

$$m\ddot{x} = mg \;; \qquad \text{hay} \qquad \ddot{x} = g \;;$$

$$m\ddot{y} = 0 \;; \qquad \text{hay} \qquad \ddot{y} = 0 \;;$$

Tích phân hai vế phương trình trên ta được :

$$\dot{x} = gt + C \qquad x = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2$$

$$\dot{y} = C_3 \qquad y = C_3 t + C_4$$

Để xác định hằng số tích phân ta dựa vào điều kiện đầu đã cho của chuyển động.

Khi $t = 0 \quad \dot{x} = \dot{x}_0$ suy ra C_1=0

x=x_0 suy ra C_4=0.

Thay vào nghiệm đã tìm được ta có :

$$x = \frac{gt^2}{2} \qquad y = v_0 t$$

Phương trình quỹ đạo thu được :

$$y = v_0\sqrt{\frac{2x}{g}}$$

Khi x=R thì $y = b - R = v_0\sqrt{\frac{2R}{g}}$

Suy ra $b = R + v_0\sqrt{\frac{2R}{g}}$

Để hạt chắc chắn rơi qua lỗ ta phải có :

$$b \geq R + v_0\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

<u>Thí du 11.3</u> :

Một chất điểm có khối lượng m chuyển động trong mặt phẳng ngang dưới tác dụng của lực hút về tâm O là $\vec{F} = -k^2 m\vec{r}$. Ở đây $\vec{r}$ là véc tơ định vị còn k là hệ số tỷ lệ. Hãy tìm phương trình chuyển động và quỹ đạo của chất điểm. Cho biết tại thời điểm ban đầu $t_0 = 0$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = v_0$ (hình 11-4)

<u>Bài giải</u>:

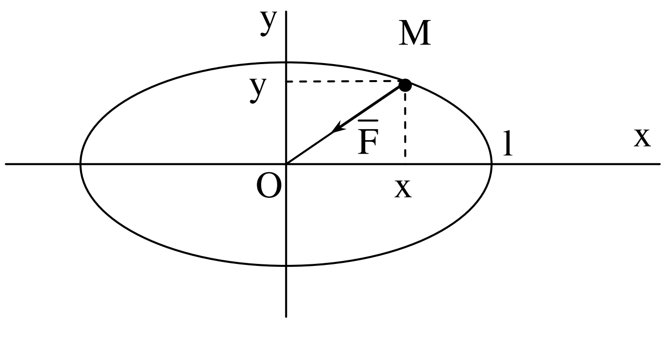
Bài toán này thuộc bài toán cơ bản thứ hai. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm viết dưới dạng véc tơ :

$$m\vec{W} = -k^2 m\vec{r}$$

chọ hệ toạ độ oxy như hình vẽ ta có thể thiết lập phương trình vi phân dưới dạng toạ độ Đề các như sau :

$$m\ddot{x} = -k^2 mx$$

$$m\ddot{y} = -k^2 my$$



Hình 11.4

Khử khối lượng m ở hai vế phương trình trên ta được :

$$\ddot{x} = -k^2 x = 0$$

$$\ddot{y} = -k^2 y = 0$$

Nghiệm tổng quát của hai phương trình có dạng:

$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt$

$y = c_3 \cos kt + c_4 \sin kt$

Các hằng số tích phân c_1, c_2, c_3, c_4 được xác định từ các điều kiện đầu của chuyển động.

Ki t $= t_0 = 0$ có :

$x = x_0 = l = C_1$; $\qquad \dot{x} = 0 = kC_2$

$y = y_0 = 0 = C_3$; $\qquad \dot{y} = v_0 = kC_4$

Suy ra :

$C_1 = 1$; $C_2 = 0$; $C_3 = 0$; và $C_4 = v_0/k$

Phương trình chuyển động chất điểm được viết :

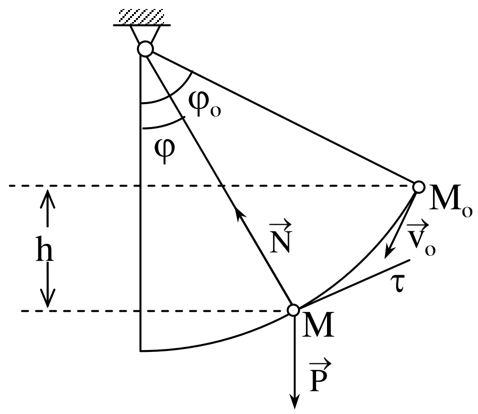
$x = l\cos kt$; $\qquad y = (v_0 \sin kt)/k$

Khử t trong phương trình trên sẽ tìm được phương trình quỹ đạo dạng

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{v_0^2/k^2} = 1$$

Đây là phương trình đường enlip nhận các trục ox, oy là trục

Thí dụ 11-4: Con lắc toán học gồm chất điểm M có khối lượng m treo vào đầu sợi dây không dãn và không trọng lượng, chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng. Xác định phản lực N của dây (hình vẽ 11-5). Cho biết lúc đầu con lắc ở vị trí M_0 và có vận tốc v_0



Hình 11.5

Bài giải :

Xét chuyển động của chất điểm M. Các

lực tác dụng lên nó gồm P và N. Có thể thiết lập phương trình vi phân viết dưới dạng tọa độ tư nhiên như său :

$$m\ddot{s} = -P\sin\varphi = -mg\sin\varphi \qquad (a)$$

$$m\frac{V^2}{\rho} = -P\cos\varphi + N = -mg\cos\varphi + N \quad (b)$$

Thay $l\varphi = s$ vào phương trình (a)

Ta được : $ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi$ hay : $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$

Xét dao động là nhỏ lấy $\sin\varphi \approx \varphi$, ta có

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0 \qquad (c) \qquad \text{Trong đó : } k^2 = \frac{g}{l}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là : $\varphi = A\sin(kt + \propto)$

A, $\propto$ là hằng số được xác định bằng điều kiện đầu của chuyển động .

Để tìm N căn cứ vào phương trình (b).

Ta có :

$$N = \frac{mv^2}{l} + mg\cos\varphi$$

Để tính v^2 ta chú ý : $\frac{d^2\varphi}{dt} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi}$

Thay kết quả trên vào phương trình (c) ta có :

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \text{ ta có :}$$

$$\omega\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$$

$$\omega d\omega = -\frac{g}{l}\cos\varphi + c$$

Hằng c được xác định từ điều kiện ban đầu. Gọi góc ban đầu và vận tốc góc ban đầu kà φ_0 và ω_0 ta sẽ có :

$$c = \frac{\omega_0^2}{2} - \frac{g}{l}\cos\varphi_0 = \frac{v_0^2}{2l^2} - \frac{g}{l}\cos\varphi_0$$

Thay c vào biểu thức (c) ta được :

$$\omega^2 = \frac{2g}{l}\cos\varphi + \frac{v_0^2}{l^2} - \frac{g}{l}\cos\varphi_0 ;$$

$$v^2 = l^2\omega^2 = v_0^2 + 2gl(\cos\varphi - \cos\varphi_0$$

Cuối cùng nhận được :

$$N = P(\frac{v_0^2}{gl} + 3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0)$$

Như vậy phản lực N phụ thuộc vào điều kiện ban đầu và vị trí của điểm M. Kết quả này cũng đúng cho cả khi dao động là không nhỏ.