Phần 4

CÁC NGUYÊN LÝ CƠ HỌC

Cùng với hai vấn đề đã nghiên cứu là phương trình vi phân của chuyển động và các định lý tổng quát của động lực học; các nguyên lý cơ học trình bày dưới đây sẽ cho ta một phương pháp tổng quát khác giải quyết có hiệu quả và nhanh gọn nhiều bài toán động lực học của cơ hệ không tự do.

Các nguyên lý cơ học là phần cơ sở của cơ học giải tích. Căn cứ vào nguồn năng lượng và đặc điểm kết cấu của cơ hệ, cơ học giải tích sử dụng công cụ giải tích toán học để thiết lập phương trình vi phân chuyển động và tìm cách tích phân các phương trình đó. Trong phần này chỉ giới thiệu một số vấn đề cơ bản nhất của cơ học giải tích cụ thể là chỉ thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho cơ hệ không tự do và nêu lên một số tính chất của nó mà ta không đi sâu vào phương pháp tích phân các phương trình đó.

Chương 14

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

14.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ CƠ HỆ

Để làm cơ sở cho việc thiết lập các nguyên lý cơ học trước hết nêu một số khái niệm cơ bản về cơ hệ không tự do.

14.1.1. Liên kết và phân loại liên kết

14.1.1.1. Cơ hệ không tự do

Cơ hệ không tự do là một tập hợp nhiều chất điểm mà trong chuyển động của chúng ngoài lực tác dụng ra vị trí và vận tốc của chúng còn bị ràng buộc bởi một số điều kiện hình học và động học cho trước.

14.1.1.2. Liên kết và phân loại liên kết

Liên kết là điều kiện ràng buộc chuyển động lên các chất điểm của cơ hệ không tự do. Các biếu thức toán học mô tả các điều kiện ràng buộc đó gọi là phương trình liên kết. Dạng tổng quát của phương trình liên kết có thể viết :

$f_i(r_k,v_k,t) \geq 0$ $\quad\quad$ $j = 1...m$; $k = 1...n$

j là số thứ tự các phương trình liên kết.

k là số thứ tự các chất điểm trong hệ.

Phân loại liên kết

Căn cứ vào phương trình liên kết ta có thể phân loại liên kết thành : liên kết dừng hay không dừng ,liên kết giữ hay không giữ , liên kết hình học hay động học

Nếu liên kết mà phương trình không chứa thời gian t gọi là liên kết dừng. Ngược lại phương trình liên kết chứa thời gian t gọi là liên kết không dừng hay hữu thời

Nếu liên kết mà phương trình mô tả bằng đẳng thức ta gọi là liên kết giữ hay liên kết hai phía. Nếu liên kết có phương trình mô tả bằng bất đẳng thức gọi là liên kết không giữ hay liên kết một phía.

Nếu liên kết có phương trình không chứa vận tốc v gọi là liên kết hình học hay liên kết hô nô nôm. Ngược lại nếu liên kết có phương trình chứa yếu tố vận tốc v gọi là liên kết động học hay không hô nô nôm.

Sau đây nêu một vài thí dụ về các loại liên kết.

Cơ cấu biên tay quay OAB biểu diễn trên hình (14-1) có phương trình liên kết :

$x_A^2 + y_A^2 = r^2$;

$(x_B + x_A)^2 + y_A^2 = l^2$;

$y_B = 0$.

Các phương trình liên kết trên thể hiện liên kết dừng, giữ và hô nô nôm.

Bánh xe bánh kính R lăn không trượt trên đường thẳng (hình 14-2) có phương trình liên kết :

$y_0 \geq R$;

$V_P = 0$;

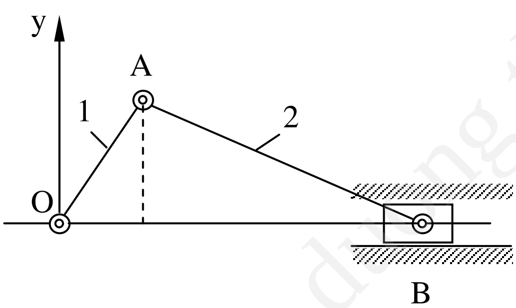
Liên kết này là liên kết dừng, không giữ và không hô nô nôm.

Vật A treo vào đầu sợi dây vắt qua ròng dọc cố định B. Đầu kia của dây được cuốn lại liên tục theo thời gian. Giữ cho vật dao động trong mặt phẳng oxy thẳng đứng (hình 14-3). Phương trình liên kết được viết :

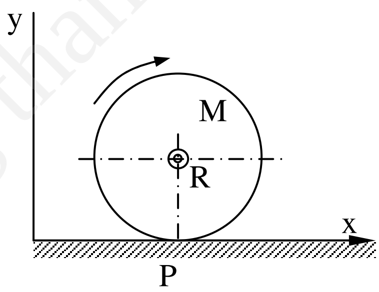
$x_A{}^2 + y_A{}^2 = \leq l^2(t)$;

$z_A \quad = 0$.

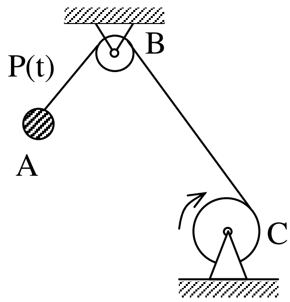
Liên kết này không dừng, không giữ và hô nô nôm.



Hình 14.1



Hình 14.2



Hình 14.3

14.1.2. Toạ độ suy rộng.

Toạ độ suy rộng là các thông số định vị của cơ hệ. Ký hiệu toạ độ suy rộng là q_j ; q_j có thể đo bằng đơn vị độ dài, đơn vị góc quay, điện lượng...

Nếu số các toạ độ suy rộng đủ để xác định vị trí của hệ ta gọi là toạ độ suy rộng đủ. Nếu số toạ độ dư thừa nghĩa là vượt quá số toạ độ cần thiết để xác định vị trí của hệ gọi là toạ độ dư. Số các toạ độ dư được liên hệ với nhau bằng biểu thức dạng :

$f_i(q_k, q_k, t) \geq 0$ gọi là phương trình liên kết.

Cơ cấu tay quay thanh truyền biểu diễn trên hình 14-1 nếu chọn $q_1 = \varphi$ và $q_2 = \Psi$ thì giữa q_1 và q_2 có phương trình :

$r\sin q_1 - l\sin q_2 = 0.$

Nếu chọn $q_1 = x_A$ và $q_2 = y_A$ thì giữa q_1 và q_2 có phương trình :

$q_1^2 + q_2^2 = r^2$;

$q_1 = R\cos q_3$.

14.1.3. Di chuyển khả dĩ của cơ hệ

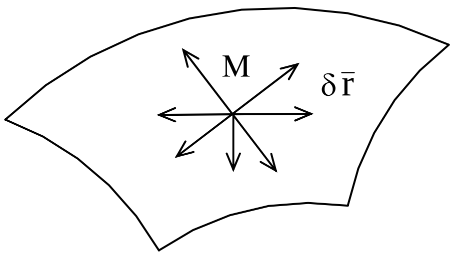
Di chuyển khả dĩ là di chuyển vô cùng nhỏ của cơ hệ tại vị trí đang xét sang vị trí lân cận mà cơ hệ có thể thực hiện phù hợp với liên kết đặt liên hệ. Để phân biệt với di chuyển thực dr ta ký hiệu di chuyển khả dĩ là ∂r .

Nếu gọi $\vec{r}_k$ và $\vec{r}_k^{\,'}$ là véc tơ định vị của chất điểm thứ k trong hệ tại vị trí đang xét và tại vị trí lân cân thì $\partial\vec{r}_k = \vec{r}_k - \vec{r}_k^{\,'}$ ta có :

$f_j(r_k^{'}, v_k^{'}, t) - f_j(r_k, v_k, t) = 0 \quad (j = 1...m).$

Với định nghĩa trên ta thấy di chuyển thực khác với di chuyển khả dĩ ở chỗ :

Di chuyển thực $d\vec{r}$ phụ thuộc vào lực tác dụng và điều kiện đầu và liên kết đặt lên hệ còn di chuyển khả dĩ chỉ phụ thuộc vào liên kết đặt lên hệ mà thôi. Chính vì thế di chuyển thực chỉ có một còn di chuyển khả dĩ có thể có một hoặc nhiều. Đối với hệ chịu liên kết dừng di chuyển thực sẽ trùng với một trong số các di chuyển khả dĩ. Trong cơ cấu tay quay thanh truyền (hình 14-1) di chuyển khả dĩ của hệ là một tập hợp các véc tơ ∂r_A và ∂r_B thoả mãn điều kiện liên kết như sau : Hình chiếu lên AB của ∂r_A bằng hình chiếu lên Ab của ∂r_B. Chất điểm đặt lên mặt cong (hình 14-4) có di chuyển khả dĩ là tập hợp các véc tơ $\partial\vec{r}$ tiếp tuyến với mặt cong tại vị trí đang xét.



Hình 14.4

14.1.4. Bậc tự do của cơ hệ

Di chuyển khả dĩ của cơ hệ là có nhiều tuy nhiên mức đọ nhiều có hạn chế. Trong số các di chuyển khả dĩ của cơ hệ có thể có một hay một số m di chuyển cơ sở. Các di chuyển còn lại được biểu diễn qua các di chuyển cơ sở nói trên. Các di chuyển cơ sở độc lập tuyến tính với nhau và đúng bằng thông số định vị của cơ hệ tức là bằng số toạ độ suy rộng đủ. Ta goi các số di chuyển khả dĩ cơ sở của hệ là số bậc tự do m của hệ.

Trong cơ cấu tay quay thanh truyền rõ ràng số bậc tự do m = 1, và có thể chọn một trong φ hay μ làm di chuyển cơ sở.

Số bậc tự do của hệ càng cao thì mức độ tuỳ ý của các di chuyển khả dĩ càng lớn có thể xác định số bậc tự do của cơ hệ bằng biểu thức : m = r - s.

Trong đó r là số toạ độ dư và s là số phương trình liên kết.

14.1.5. Liên kết lý tưởng - Lực suy rộng

14.1.5.1. Liên kết lý tưởng

Nếu tổng cộng nguyên tố của phản lực liên kết trong mọi di chuyển khả dĩ của cơ hệ đều triệt tiêu thì liên kết đặt lên cơ hệ được gọi là liên kết lý tưởng.

Gọi $\vec{N}_k$ là phản lực liên kết tác dụng lên chất điểm M_k; ∂r_k là véc tơ di chuyển khả dĩ của chất điểm đó thì theo định nghĩa trên ta có :

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{N}_k . \partial \vec{r}_k = 0 \tag{14-1}$$

Trong thực tế nếu cần bỏ qua lực ma sát và tính đàn hồi của vật thể tạo thành cơ hệ thì đa số các cơ hệ thoả mãn biểu thức trên vsf như vậy chúng chịu các liên kết lý tưởng. Khi phải kể đến các lực ma sát và tính đàn hồi của vạt thể ta vẫn dùng dược khái niệm liên kết lý tưởng trên đây nhưng phải xem các lực do ma sát hoặc do tính đàn hồi của vật thể tác dụng lên cơ hệ như là các hoạt lực.

Vật rắn tuyệt đối tự do là một cơ hệ chịu liên kết lý tưởng.

Quả vậy nếu ta xét một cặp chất điểm M, N bất kỳ trong vật thì lực tác dụng tương hỗ giữa chúng là F, F' với F = -F'. Gọi ∂r và $\partial r'$ là các véc tơ di chuyển khả dĩ của chất điểm M, N, ta có :

$$\sum_{k=1}^{2} \vec{N}_k \partial\vec{r}_k = \vec{F}.\partial\vec{r} + F'\partial\vec{r}\,' = \vec{F}\left(\partial\vec{r} + \partial\vec{r}\,'\right).$$

Theo động học vật rắn ta có :

$\partial\vec{r} = \partial\vec{r}\,' + \partial\overrightarrow{MN}$ nghĩa là : $\partial\vec{r} - \partial\vec{r}\,' = \partial\overrightarrow{MN}$. Véc tơ MN có độ lớn không đổi nên $\partial\overrightarrow{MN} = \left(\partial\vec{r} - \partial\vec{r}\,'\right)$ vuông góc với $\vec{F}$. Cuối cùng suy ra $\vec{F}.\left(\partial\vec{r} - \partial\vec{r}\,'\right) = 0$, hay $\sum_{k=1}^{n} \vec{N}_k \partial\vec{r}_k = 0$, điều này chứng tỏ vật rắn tự do là cơ hệ chịu liên kết lý tưởng.

Hai vật rắn có bề mặt trơn nhẵn tiếp xúc với nhau tạo thành một cơ hệ chịu liên kết lý tưởng.

Cũng dễ dàng nhận thấy hai vật rắn có bề mặt trơn nhẵn tiếp xúc với nhau tạo thành một cơ hệ chịu liên kết lý tưởng.

Dây mềm không dãn vắt qua ròng rọc khi bỏ qua sự trượt của dây và bỏ qua ma sát ổ trục cũng là một cơ hệ chịu liên kết lý tưởng.

14.1.5.2. Lực suy rộng

Xét cơ hệ N chất điểm, có m toạ độ suy rộng đủ $q_1 q_2 ... q_m$. Biểu thức tổng công của các hoạt lực trong một di chuyển khả dĩ nào đó của cơ hệ có thể viết:

$$\sum_{k=1}^{n} \partial A_k^a = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^a \partial\vec{r}_k . \qquad \text{(a)}$$

Trong đó $\vec{\mathbf{F}}_k^a$ là tổng các hoạt lực tác dụng lên chất điểm M_k ; ∂r_k là di chuyển khả dĩ của chất điểm M_k tại vị trí đang xét.

Biểu diễn véc tơ định vị $\vec{r}_k$ và di chuyển khả dĩ $\partial\vec{r}_k$ qua các toạ độ suy rộng ta có :

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k\left(q_1 q_2, ...q_m\right);$$

$$\partial\vec{r}_k = \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_1}\partial q_1 + \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_2}\partial q_2 + \ldots\ldots\ldots\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_m}\partial q_m \ .$$

Thay kết quả vào biểu thức (a) ở trên ta được

$$\sum_{k=1}^{N}\partial A_k^a = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k\left(\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_1}\partial q_1 + \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_2}\partial q_2 + \ldots\ldots\ldots\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_m}\partial q_m\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^a\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_1}\partial q_1 + \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^a\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_2}\partial q_2 + \ldots\ldots\ldots\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^a\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_m}\partial q_m$$

$$Q_1\partial q_1 + Q_2\partial q_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Q_n\partial q_n = \sum_{j=1}^{n}Q_j\partial q_j$$

Đại lượng $Q_j = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^a\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}$ được gọi là lực suy rộng tương ứng với toạ độ suy rộng q_j.

Ta có định nghĩa : Lực suy rộng Q_j ứng với toạ độ suy rộng q_j là đại lượng vô hướng biểu thị bằng hệ số của biến phân tương ứng trong biểu thức tổng công của các hoạt lực tác dụng lên cơ hệ trong di chuyển khả dĩ bất kỳ của cơ hệ đó.

Bản chất vật lý của lực suy rộng phụ thuộc vào bản chất vật lý của toạ độ suy rộng tương ứng. Chẳng hạn ta thường gặp :

Toạ độ suy rộng q_j là độ dài thì Q_j là lực; là góc quay thì Q_j là mô men lực ; q_j là điện lượng thì Q_j là điện thế. q_j là điện thế thì Q_j là điện lượng.

Trong thực hành để xác định lực suy rộng Q_j ta có phương pháp sau đây. Cho hệ một di chuyển khả dĩ với $\partial q_j \neq$ còn các biến phân khác của toạ độ suy rộng cho bằng không, sau đó tính công của các lực trong di chuyển đố của hệ. Theo định nghĩa trên ta có :

$$\sum_{k=1}^{N}\partial A_k^a = \sum_{j=1}^{n}Q_j\partial q_j$$

Vì các biến phân $\partial q \neq \partial q_j$ đều triệt tiêu nên biểu thức trên viết được :

$$\sum_{k=1}^{N} \partial A_k^a = \sum_{j=1}^{n} Q_j \partial q_j$$

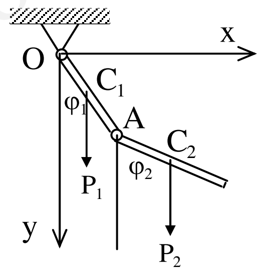
Từ đây suy ra biếu thức xác định lực suy rộng Q_j ;

$$Q_j = \frac{\sum_{k=1}^{N} \partial A_k^a}{\partial q_j}$$

Thí du 14.1 : Xác định lực suy rộng tương ứng với toạ độ suy rộng của hệ con lắc vật lý kép biểu diễn trên hình (14-5). Cho biết trọng lượng của mỗi con lắc đều bằng P và đặt tại điểm giữa C1, Chứng từ của các con lắc ; Độ dài của mỗi con lắc là 1.

Bài giải :

Chọn toạ độ suy rộng đủ của hệ là các góc φ_1 φ_2 như trên hình vẽ. Gọi các lực tươnh ứnh là Q_1, Q_2. Trước hết xác định Q_1, ta cho hệ một di chuyển khả dĩ sao cho $\partial\varphi_1 \neq 0$ còn $\partial\varphi_2 = 0$. Công của các hoạt lực P_1, P_2 trong di chuyển đó tính được :



Hình 14.5

$$\sum_{k=} \partial A_k^a = -P.\frac{1}{2}\sin\varphi_1,\partial\varphi_1 - P_2 l\sin\varphi_1\partial\varphi_1 \ ;$$

$$= \frac{3Pl}{2} l\sin\varphi_1\partial\varphi_1 = Q_1\partial\varphi_1 \ .$$

Suy ra :

$$Q_1 = -\frac{3Pl}{2} l\sin\varphi_1 \ .$$

Để tính Q_2 cho hệ một di chuyển khả dĩ với $\partial\varphi_1 = 0$ còn $\partial\varphi_2 \neq 0$. Khi đó chỉ có con lắc AB di chuyển và công của hoạt lực trong di chuyển này là :

$$\sum_{k=1}^{N} \partial A_k^a = -P_2.\frac{1}{2}\sin\varphi_2\partial\varphi_2 = -P.\frac{1}{2}\sin\varphi_2\partial\varphi_2 = Q_2\partial\varphi_2 \ .$$

Suy ra : $Q_2 = -P.\frac{1}{2}\sin\varphi$.

14.2.1. Nguyên lý di chuyển khả dĩ

Khi cơ hệ chịu liên kết dừng và lý tưởng thì điều kiện cần và đủ để nó cân bằng tại vị trí đang xét là tổng công của các hoạt lực trong mọi di chuyển khả dĩ của hệ tại vị trí đạng xét bằng không.

$$\sum_{k=1}^{N} \partial A_k^a = \sum \vec{F}_{ka}.\partial\vec{r}_k = 0 .$$

Trước hết ta chứng minh điều kiện cần. Xét cơ hệ chịu liên kết dừng và lý tưởng. Giả sử ở vị trí đang xét hệ can bằng. Ta phải chứng minh điều kiện cần có là $\sum F_{ka}.\partial\vec{r}_k = 0$. Thật vậy, vì hệ cân bằng nên chất điểm M_k trong hệ cũng cân bằng. Nếu gọi $\vec{\mathbf{F}}_k^a$ và $\vec{\mathbf{N}}_k$ là hoạt lực và phản lực liên kết tác dụng lên chất điểm khảo sát ta sẽ có :

$$\vec{F}_k^a + \vec{N}_k = 0 .$$

Cho hệ một di chuyển khả dĩ tại vị trí đang xét và gọi $\partial\vec{r}_k$ là di chuyển của chất điểm M_k ta cũng có thể viết :

$$\vec{F}_k^a.\partial\vec{r}_k + \vec{N}_k.\partial\vec{r}_k = 0 .$$

Viết cho cả hệ, nghĩa là cho k tiến từ 1 đến N sau đó cộng vế với vế của các biểu thức sẽ được :

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^a.\partial\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \vec{N}_k.\partial\vec{r}_k = 0 .$$

Vì liên kết là lý tưởng nên $\sum_{k=1}^{N} \vec{N}_k.\partial\vec{r}_k = 0$ do đó cần phải có

$$\vec{F}_k^a.\partial\vec{r}_k = 0 .$$

Sau đây chứng minh điều kiện đủ.

Giả thiết cơ hệ thoả mãn điều kiện $\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^a.\partial\vec{r}_k = 0$ ta phải chứng minh rằng điều kiện này đủ để cho hệ tự cân bằng ở vị trí đang xét. Thật vậy nếu cơ hệ thoả mãn điều kiện trên mà không cân bằng thì chứng tỏ nó phải khởi động tại vị trí đang xét đó. Như vậy biến thiên của hệ phải dương. dT > 0. Theo định lý động năng ta có :

$$dT = \sum dA_k^a = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^a.\partial\vec{r}_k + \sum \vec{N}_k.\partial\vec{r}_k .$$

Với hệ chịu liên kết dừng thì di chuyển thực dr sẽ trùng với một trong các di chuyển khả dĩ. Ta có $dr = \partial\vec{r}_k$.

Thay vào biểu thức trên ta được :

$$dT = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{k.}^a \partial\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \vec{N}_k.\partial\vec{r}_k > 0$$

Vì hệ chịu lực liên kết lý tưởng nên :

$$+\sum_{k=1}^{N} \vec{N}_k.\partial\vec{r}_k = 0 \ .$$

Chỉ còn lại : $dT = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{k.}^a \partial\vec{r}_k > 0$.

Điều này trái với giả thiết đã nêu, chứng tỏ cơ hệ không thể khởi động tại vị trí đang xét nghĩa là khi thoả mãn điều kiện $\sum_{k=1}^{N} \vec{N}_k.\partial\vec{r}_k = 0$ thì chác chắn cơ hệ sẽ cân bằng.

14.2.2. Phương trình cân bằng tổng quát của cơ hệ không tự do

Từ điều kiện cân bằng $\sum_{k=1}^{N} \vec{N}_k.\partial\vec{r}_k = 0$ có thể thiết lập phương trình tổng quát cho cơ hệ dưới hai dạng toạ độ Đề các và toạ độ suy rộng.

- Dạng toạ độ Đề các .

Gọi X_k^a, Y_k^a, Z_k^a là hình chiếu của hoạt lực $\vec{F}_k^a$ và ∂x_k, ∂y_k, ∂z_k, là hình chiếu của di chuyển $\partial\vec{r}_k$ lên các trục toạ độ oxyz. Ta có thể viết phương trình cân bằng của hệ dưới dạng phương trình sau đây:

$$\sum \partial A_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^a.\partial\vec{r}_k = \sum_{k=1}^{N} \left(X_k^a \partial x_k + Y_k^a \partial y_k + Z_k^a \partial z_k \right). \qquad (14\text{-}3)$$

Phương trình này gọi là phương trình cân bằng tổng quát của hệ dưới dạng toạ độ Đề các.

- Dạng toạ độ suy rộng.

Xét hệ có m toạ độ suy rộng đủ $q_1 q_2 .... q_m$. Điều kiện cân bằng của hệ có thể viết :

$$\sum \partial A_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^s . \partial \vec{r}_k = \sum_{k=1}^{N} Q_j \partial q_j = 0 \; .$$

Nếu hệ chịu liên kết hình học (hô nô nôm) thì các ∂q_j là độc lập với nhau và dễ dàng suy ra các điều kiện cân bằng sau đây :

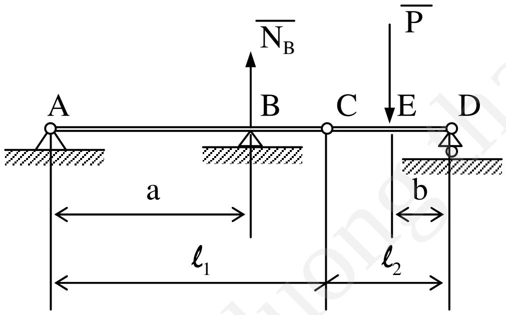
$$Q1 = 0 \;\; ; \;\; Q2 = 0 \;\; ; \; ......Qm = 0. \qquad (14\text{-}4)$$

Các phương trình (12-3) và (12-4) chính là điều kiện cân bằng tổng quát của cơ hệ chịu liên kết dừng, hô nô nôm là lý tưởng.

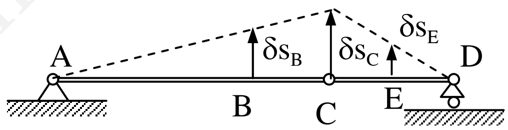
Sau đây là các bài toán thí dụ.

Thí du 14 .1

Xà kép gồm hai đoạn AC và chuyển động nối với nhau bằng khớp bản lề ở C. Trên đoạn chuyển động có lực tập trung P tác dụng theo phương vuông góc với xà tại E. Xác định phản lực tại gối đỡ di động B. Kích thước kết cấu xà cho trên hình (14-6a).



Hình 14.6a



Hình 14.6b

Bài giải :

Để xác định phản lực N_B ta giải phỏng liên kết (gối tựa di động) tại B và thay vào đó phản lực N_B.

Cho hệ di chuyển khả dĩ với ∂S_B, ∂S_c, ∂S_{cE} như hình vẽ.

Phương trình cân bằng tổng quát cho hệ viết được :

$\sum \partial A_k^a = N_B \partial S_B - P.\delta S_E = 0$. Trong đó :

$\partial S_E = \dfrac{b}{a}\dfrac{l_1}{l_2}\partial S_B$ .Phương trình cân bằng còn viết được :

$$N_B \partial S_B - P.\frac{b}{a}.\frac{l_1}{l_2}\partial S_B = 0 \;\text{ hay }\; N_B - P.\frac{b}{a}\frac{l_1}{l_2} = 0$$

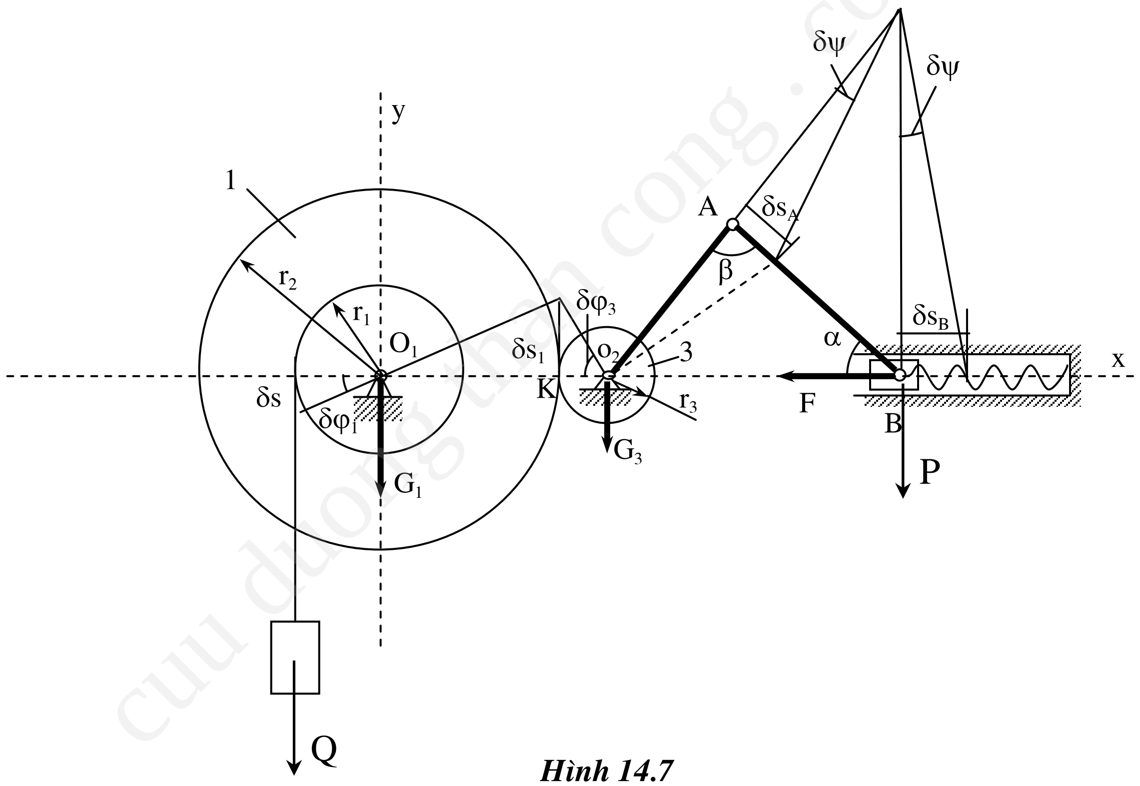
Suy ra :

$$N_B = P.\frac{b}{a}\frac{l_1}{l_2} \;.$$

Kết quả cho ta giá trị dương chứng tỏ chiều của phản lực N_B chọn như hình vẽ là đúng.

<u>**Thí dụ 142**</u>**:** Cho cơ cấu chịu tác dụng các lực cân bằng biểu diễn trên hình (14-7).

Xác định độ biến dạng h của lò xo nếu cho Q = 100N; độ cứng lò xo c = 5N/cm; r_1 = 20cm; r_2 = 40cm; r_3 = 10cm; OA = 50cm; $\alpha = 30^0$; $\beta = 90^0$.



Hình 14.7

<u>Bài giải</u>:

Xét hệ bao gồm vật D đến con trượt B. bỏ qua ma sát ở trục và mặt trượt liên kết đặt lên hệ là dừng, một phía, hô nô nôm và lý tưởng.

Hoạt lực tác dụng lên hệ gồm trọng lượng $\vec{Q}, \vec{G}_1, \vec{G}_3, \vec{P}$ và các lực đàn hồi $\vec{F}$ của lò xo. Trong các lực trên chỉ có lực $\vec{Q}$ và $\vec{F}$ là sinh công.

Cho hệ một di chuyển khả dĩ với ∂s là di chuyển của vật D làm cơ sở. Ta có thể tìm được ci chuyển của điểm B như sau :

Ta có : $\partial\varphi_1 = \dfrac{\partial s}{r_1}$

Điểm tiếp xúc K giữa hai bánh răng 2 và 3 có di chuyển ∂s_1 với :

$\partial s_1 = r_1\partial\varphi_1 = \dfrac{r_2}{r_1}\partial s$. di chuyển góc quay của bánh răng 3 sẽ là

$\partial\varphi_3 = \dfrac{\partial s_1}{}\dfrac{r_2}{r_1 r_3}$.

Vì thanh O_3A gắn với bánh răng A nên điểm A có di chuyển :

$\partial s_A = O_3A.\partial\varphi_3 = l\dfrac{r_2}{r_1 r_3}\partial s$.

Ta có thể xác định di chuyển của B thông qua ∂s_A. Vì thanh AB chuyển động song phẳng với P là tâm vận tốc tức thời nên suy ra :

$\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{\partial s_B}{\partial s_A}$, hay : $\partial a_B = \dfrac{PA}{PB}\partial s_A$.

Trong tam giác APB ta có : $\dfrac{PB}{PA} = \dfrac{1}{\cos 30^0}$.

Nên : $\partial s_B = \dfrac{r_2}{r_1 r_3 \cos 30^0}\partial s$.

Thiết lập điều kiện cân bằng cho hệ nhờ nguyên lý di chuyển khả dĩ. Ta có:

$$\sum \vec{F}_k \partial \vec{r}_k = Q\partial s - F\partial s_B = 0 \quad \text{Thay } F = c \,.\, h$$

ta được : $Q\partial s - c.h\dfrac{r_2}{r_1 r_3 \cos 30^0}\partial s = 0$.

Suy ra : $h = \dfrac{Q}{c}\dfrac{r_1 r_3 \cos 30^0}{r_2}\partial s = \dfrac{100.20.10.0,87}{5.40.50} = 1{,}74\text{cm}$.

Như vậy hệ cân bằng khi lò xo bị nén một đoạn h = 1,74cm.

Chương 15

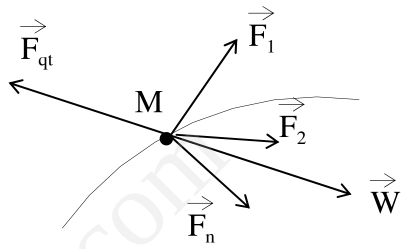
NGUYÊN LÝ DA LAM BE

15.1. LỤC QUÁN TÍNH VÀ NGUYÊN LÝ DA LAM BE ĐỐI VỚI CHẤT ĐIỂM

Xét chất điểm có khối lượng m chuyển động với gia tốc $\vec{W}$ dưới tác dụng các của lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2 ..... \vec{F}_n$ (hình 15-1).

Phương trình cơ bản của động lực học viết cho chất điểm :

$$m\vec{W} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ...\vec{F}_n = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \ .$$



Hình 15.1

Chuyển các số hạng của phương trình trên sang một vế được :

$$\sum \vec{F}_i + \left(- m\vec{W}\right) = 0 . \qquad (1)$$

Số hạng $\left(- m\vec{W}\right)$ có thứ nguyên của lực bằng tích số giữa khối lượng m với gia tốc w, cùng phương nhưng ngược chiều với gia tốc được gọi là lực quán tính của chất điểm và ký hiệu là $\vec{F}_{qt}$.

Ta có $\vec{F}_{qt} = -m\vec{W}$.

Thay vào phương trình (1) ta được :

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i + \vec{F}_{qt} = 0 .$$

Các lực $\sum \vec{F}_i$ và lực $\vec{F}_{qt}$ đồng quy tại chất điểm vì vậy có thể viết :

$$\left(\vec{F}_1 \vec{F}_2 ......\vec{F}_n , \vec{F}_{qt}\right) = 0 \ . \qquad (15\text{-}1)$$

Biểu thức (15-1) biểu diễn nguyên lý Đa Lam Be cho chất điểm và được phát biểu như sau :

Khi chất điểm chuyển động, các lực thực sự tác dụng lên chất điểm (bao gồm các hoạt lực và phản lực liên kết) cùng với lực quán tính của nó tạo thành một hẹ klực cân bằng.

Điều kiện cân bằng của hệ lực biểu diễn nguyên lý Đa Lam Be cho chất điểm viết được :

$\Sigma X_i = X_1 + X_2 + ... + X_n + X_{qt} = 0.$

$\Sigma Y_i = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n + Y_{qt} = 0.$

$\Sigma Z_i = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n + Z_{qt} = 0.$

Trong đó :

X_i , Y_i , Z_i và X_{qt} , Y_{qt} , Z_{qt} là các hình chiếu của lực F_i thực sự rác động len chất điểm của lực quán tính $\vec{F}_{qt}$ lên các trục oxyz.

Chú ý :

1. Lực quán tính $\vec{F}_{qt}$ không đặt lên chất điểm, đó là lực tưởng tượng thêm vào để có nguyên lý Đa Lăm Be. Thực tế lực quán tính đặt vào liên kết của chất điểm. Thí dụ khi buộc một vật nặng vào đầu một sợi dây và quay thì lực thực sự tác dụng lên vật trong trường hợp này chỉ có trọng lực, lực căng của dây, lực cản không khí, còn lực quán tính của vật lại đặt lên sợi dây và có xu hướng đứt dây.

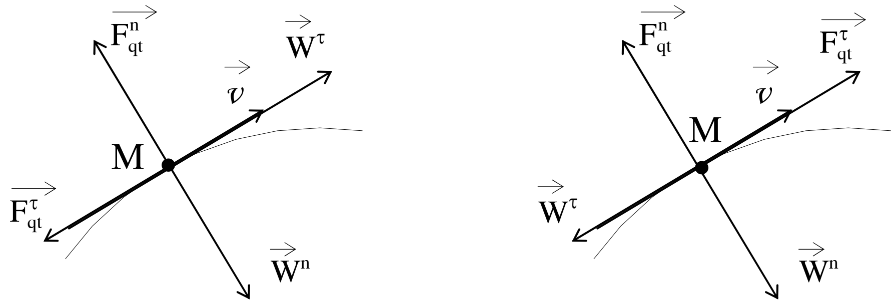
2. Khi chất điểm chuyển động cong, gia tốc của chất điểm có hai thành phần tiếp tuyến và pháp tuyến do đó lực quán tính cũng có hai thành phần tương ứng. Ta có :

$\vec{W} = \vec{W}^{\tau} + \vec{W}^{n}.$

$\vec{F}_{qt} = -m\vec{W} = -m\vec{W}^{\tau} - m\vec{W}^{n} = \vec{F}_{qt}^{\tau} + \vec{F}_{qt}^{n}.$

Trong đó lực quán tính tiếp tuyến $\vec{F}_{qt}^{\tau}$ có phương tiếp tuyến với quỹ đạo có chiều phụ thuộc vào tính chất chuyển động của chất điểm. Nếu $W = \dfrac{dv}{dt} > 0$ thì lực quán tính tiếp tuyến ngược chiều với vận tốc của chất điểm.

$W^{\tau} = \dfrac{dv}{dt} < 0$ thì lực quán tính tiếp tuyến cùng chiều với vận tốc của chất điểm. Vì vậy gia tốc pháp tuyến W^n luôn luôn cùng hướng vào tâm của đường conh tại vị trí đang xét nen $\vec{F}_{qt}^{n}$ luôn luôn có chiều hướng từ tâm đường cong ra ngoài vì thế $\vec{F}_{qt}^{n}$ được gọi là lực quán tính ly tâm (hình 15-2)

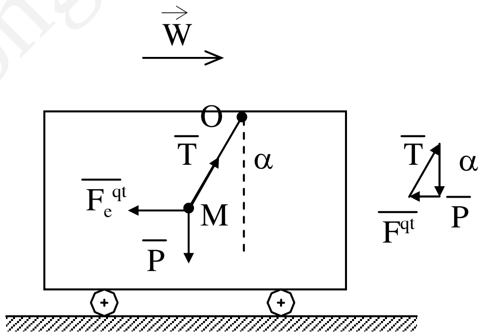


Hình 15.2

Nhờ nguyên lý Đa Lăm Be ta có thể giải thích các bài động lực học của chất điểm bằng phương pháp giải bài toán cân bằng của hệ lực đồng quy đã biết trong tĩnh học.

<u>Thí dụ 15-1</u>

Một bóng đèn có trọng lượng P treo trên trần của toa tầu đang chạy. Tại một thời điểm nào đó người ta thấy dây treo đèn lệch đi so với phương đứng một góc α. Tình gia tốc của tầu tại thời điểm đó. Tính lực căng của dây (hình 15-3).



Hình 15.3

<u>Bài giải</u> :

Xét chuyển động của bóng đèn. Gọi gia tốc của bóng đèn là $\vec{W}$ ta có : các lực thực sự tác dụng lên bóng đèn là trọng lực $\vec{P}$, lực căng $\vec{T}$ của dây. Lực quán tính của bóng đèn là :

$$\vec{F}_{qt} = -\frac{P}{g}\vec{W} \ .$$

Theo nguyen lý Đa Lăm Be có :

$(\vec{P},\vec{T},\vec{F}_{qt})$ 0

Hệ lực này gồm 3 lực đồng quy ta có thể thiết lập điều kiện cân bằng của chúng bằng tam giác khép kín như trên hình (15-3b).

Từ tam giác lực này suy ra : $F_{qt} = P\text{tg}\alpha$.

Hay $\quad mw = pt\text{g}\alpha = mg\text{tg}\alpha$;

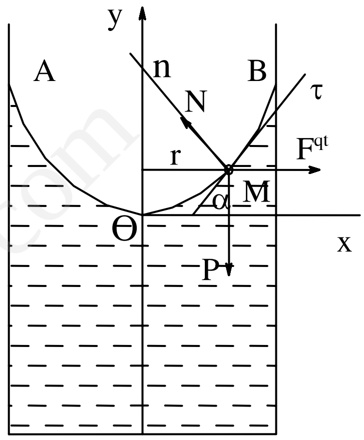
w = gtgα.

Tại thời điểm xét coi bóng đèn là cân bằng tương đối trong toa tầu do đó gia tốc của bóng đàn cũng chính là gia tốc của toa xe.

Cuối cùng lực căng T tính được ; $T = \frac{P}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}P$.

Ta có phương chiều biểu diễn như hình vẽ.

<u>Thí du 15-2</u> : Một bình hình trụ chứa chất lỏng quay quanh trục thẳng đứng với vận tốc không đổi ω_0. Tìm dạnh mặt thoáng chất lỏng ở vị trí cân bằng tương đối (hình 15-4).



Hình 15.4

<u>Bài giải</u>:

Xét mọt phần tử chất lỏng M nằm trên mặt thoáng.

Giả thiết mặt phẳng oxy cắt mặt thoáng theo giao tuyến AOB di qua điểm M (hình 15-4). Các lực thực sự tác đọng lên chất điểm M gồm : Trọng lực $\vec{P}$ phản lực $\vec{N}$ của phần chất lỏng còn lại tác dụng lên chất điểm có hướng theo pháp tuyến Mn.

Lực quán tính của chát điểm là $\vec{F}_{qt} = m\vec{W}$ vì khối lỏng quay đều quanh trục quay nên gia tốc $\vec{W}$ chỉ gồm thành phần pháp tuyến $\vec{W}^n$ và lực quán tính $\vec{F}_{qt}$ có phương chiều như hình vẽ :

$F_{qt} = F_{qt}^{\ n} = m\omega^2.x$,

ở đây x là toạ độ của điểm M.

Áp dụng nguyên lý Đa Lăm Be cho chất điểm M ta có :

$\left(\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{qt}\right) \sim 0$.

Phương trình cân bằng của hệ lực này trên trực tuyến Mτ viết được :

$m\ x\ \omega^2\cos\alpha$ - $mg\sin\alpha = 0$;

α là góc nghiêng của đường tiếp tuyến với trục x.

Suy ra $tg\alpha = \frac{\omega^2}{g}.x$

Thay $tg\alpha = \dfrac{dy}{dx}$ ta được : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\omega^2}{g}.x$

Hay $dy = \dfrac{\omega^2}{g}.x.dx$.

Lấy tích phân hai vế theo các cận tương ứng có :

$$\int_0^y dy = \int_0^y \frac{\omega^2}{g}.x.dx \ ,$$

Hay $y = \dfrac{\omega^2}{2g}.x^2$.

Như vậy đường AOB là đường parabol và mặt thoáng của chất lỏng là một mặt paraboloit tròn xoay nhận trục oy là trục đối xứng.

15.2. NGUYÊN LÝ ĐA LĂM BE ĐỐI VỚI HỆ

15.2.1. Nguyên lý

Xét hệ gồm n chất điểm : $M_1, M_2, \ldots\ldots M_n$.

Tách một chất điểm M_k ra xét. Gọi $\vec{F}_k^i$ và $\vec{F}_k^e$ là tổng các nội lực và tổng các ngoại lực tác dụng lên chất điểm. Nếu chất điểm chuyển động với gia tốc $\vec{W}_k$ thì lực quán tính của chất điểm sẽ là $\vec{F}_{qtk} = -m_k\vec{W}_k$.

Áp dụng nguyên lý Đa Lăm Be cho chát điểm ta có :

$\left(\vec{F}_k^i, \vec{F}_k^e, \vec{F}_{qtk}\right)$ 0.

Cho k tiến từ 1 ... n ta được n hệ lực cân bằng viết theo dạng trên. Tất cả các hệ lực đó hợp lại thành một hệ lực cân bằng :

$\left(\vec{F}_k^i, \vec{F}_k^e, \vec{F}_{qtk}\right)$ 0. (k = 1.... n) (15-3)

Biểu thức (15-3) biểu diễn nguyên lý Đa Lăm Be đối với hệ và được phát biểu như sau :

Khi hệ chuyển động các lực thực sự tác dụng lên hệ (kể cả nội lực và ngoại lực) cùng với lực quán tính của hệ tạo thành một hệ lực cân bằng.

Hệ lực biểu diễn bởi biểu thức (15-3) là hệ lực bất kỳ trong không gian và vậy điều kiện cân bằng của hệ có thể viết như sau :

$$\sum_{ki=1}^{N}\left(\vec{F}_k^i + \vec{F}_k^e + \vec{F}_{qtk}\right) = 0\ ;$$

$$\sum_{ki=1}^{N}\left[\vec{m}_0(\vec{F}_k^i) + \vec{m}_0(\vec{F}_k^e) + \vec{m}_0(\vec{F}_{qtk})\right] = 0\ .$$

Vì $\sum_{ki=1}^{N}\vec{F}_k^i = 0$ nên phương trình còn lại :

$$\sum_{ki=1}^{N}\left(\vec{F}_k^e + \vec{R}^{qt}\right) = 0\ ;$$

$$\sum_{ki=1}^{N}\left[\vec{m}_0(\vec{F}_k^e) + \vec{M}_0^{qt}\right] = 0 \qquad (15\text{-}4)$$

Trong đó $\vec{R}^{qt}$ và $\vec{M}_0^{qt}$ là véc tơ chính và mô men chính lực quán tính của hệ.

Nếu viết dưới dạng hình chiếu ta có 6 phương trình sau :

$$\sum X_k^e + X^{qt} = 0;$$

$$\sum Y_k^e + Y^{qt} = 0;$$

$$\sum Z_k^e + Z^{qt} = 0;$$

$$\sum m_x(F_k^e) + M_x^{qt} = 0\ ;$$

$$\sum m_y(F_k^e) + M_y^{qt} = 0\ ;$$

$$\sum m_z(F_k^e) + M_z^{qt} = 0.$$

Trong đó : X_k^e, Y_k^e , Z_k^e , X^{qt} , Y^{qt} , Z^{qt} là các thành phần hình chiếu lên các trục oxyz của ngoại lực $\vec{F}_k^0$ và véc tơ chính của lực quán tính $\vec{R}^{qt}$ còn $m_x(\vec{F}_k^e), m_y(\vec{F}_k^e), m_z(\vec{F}_k^e)$ và M_x^{qt} , M_y^{qt} , M_z^{qt} là mô men đối với ba trục oxyz của ngoại lực $\vec{F}_k^0$ và mô men chính của lực quán tính đối với ba trục.

Cũng như đối với chất điểm nguyên lý Đa Lăm Be đối với hệ cho ta phương pháp giải các bài toán động lực học cho hệ theo phương pháp tĩnh học và được gọi là phương pháp tĩnh động....Phương pháp tĩnh động được áp dụng rộng rãi để giải các bài toán động lực học đặc biệt là những bài toán xác định các phản lực liên kết. Khi sử dụng phương pháp khó khăn chính là việc xác định véc tơ chính $\vec{R}^{qt}$ và mô men chính, M_c^{qt}. Sau đây sẽ trình bày kết quả thu gọn hệ lực quán tính trong một số trường hợp đặc biệt.

15.2.2. Thu gọn hệ lực quán tính

15.2.2.1. Thu gọn hệ lực quán tính của vật rắn chuyển động tịnh tiến

Các chất điểm trong vật có gia tốc như nhau và bằng gia tốc khối tâm : $\vec{W}_k = \vec{W}_c(k = 1....n)$.

Khi thu gọn hệ lực quán tính về khối tâm C ta được :

$$\vec{R}_c^{qt} = \sum - m_k \vec{W}_c = -M\vec{W}_c \ ;$$

$$M_c^{qt} = -\sum \vec{m}_c\left(m_k \vec{W}_k\right) = -\sum \vec{r}_k x m_k \vec{W}_c = M\vec{r}_{cc} x \vec{W}_c = 0.$$

Vì $\vec{r}_{cc} = 0$ do ta chọn C làm tâm thu gọn.

Như vậy trong trường hợp vật chuyển động tịnh tiến hợp lực của các lực quán tính bằng véc tơ chính $\vec{R}_c^{qt} = -M\vec{W}_c$ và đi qua khối tâm C.

15.2.2.2. Thu gọn hệ lực quán tính của vật rắn chuyển động quay quanh một trục cố định đi qua khối tâm C

Gọi vận tốc và gia tốc của vật là ω và ε ta có :

$$\vec{R}_c^{qt} = \sum - m_k \vec{W}_k = -M\vec{W}_c = 0 \text{ vì } \vec{W}_c = 0.$$

$$M_k^{qt} = \sum_{k=1}^{N} m_{cz}\left(\vec{F}^{qt}\right) = \sum_{k=1}^{N} m_{cz}\left(\vec{F}_\tau^{qt}\right) + \sum_{k=1}^{N} m_{cz}\left(\vec{F}_n^{qt}\right).$$

Các lực quán tính pháp tuyến luôn luôn đi qua trục quay do đó :

$\sum_k m_{cz}\left(\vec{F}_n^{qt}\right) = 0$. Ta có :

$$M_{cz}^{qt} = \sum_{k=1}^{N} m_{cz}\left(\vec{F}_\tau^{qt}\right) = -\sum d_k m_k d_k \varepsilon = -J_{oz}\varepsilon.$$

$$M_{cz}^{qt} = - J_{oz}\varepsilon.$$

Với J_{oz} là mô men quán tính của vật đối với trục quay.

Kết quả thu gọn hệ lực quán tính của hệ chuyển động quay quanh một trục đi qua khối tâm là :

$$\vec{R}_c^{qt} = 0 \text{ và } M_{cz}^{qt} = - J_{oz}\varepsilon.$$

15.2.2.3. Thu gọn hệ lực quán tính của vật rắn chuyển động song phẳng

Theo động học chuyển động song phẳng của vật có thể phân tích thành hai chuyển động cơ bản là tĩnh tiến theo khối tâm và chuyển động quay quanh trục z đi qua khối tâm C vuông góc với mặt phẳng cơ sở. Thu gọn hệ lực quán tính với từng chuyển động cơ bản đó đã được trình bày trong hai trường hợp trên. Dễ dàng nhận thấy khi thu gọn các lực quán tính của hệ chuyển động song phẳng có kết quả sau :

$$\vec{R}_C^{qt} = -M\vec{W}_c \text{ và } M_{cz}^{qt} = -J_{oz}\varepsilon.$$

trong đó M và J_{oz} là khối lượng và mô men quán tính của hệ đối với trục quay cz. W_c và ε là gia tốc khối tâm và gia tốc góc của hệ.

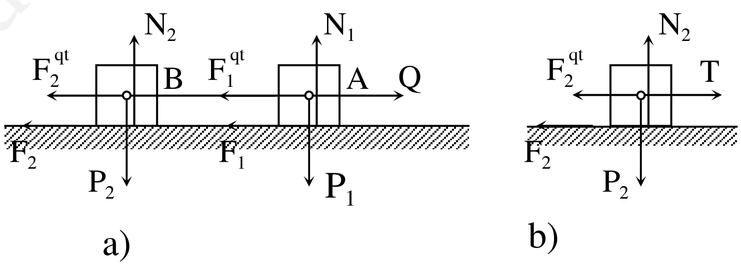
Sau đây giải một số bài toán có vận dụng nguyên lý Đa Lăm Be cho hệ.

<u>Thí du 15-3</u>:

Hai vật A và B có trọng lượng P_1 và P_2 liên kết với nhau bằng một sợi dây không dãn trọng lượng không đáng kể. Hai vật chuyển động trên mặt phẳng nằm ngang có hệ số ma sát f nhờ tác dụng lực Q vào vật B theo phương ngang (hình 15-5). Xác định gia tốc của hai vật và lực căng của sợi dây.

<u>Bài giải</u> :

Xét hệ gồm cả hai vật. Các lực ngoài tác dụng lên hệ gồm trọng lượng $\vec{P}_1, \vec{P}_2$, phản lực pháp tuyến $\vec{N}_1, \vec{N}_2$, lực ma sát trượt $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ và lực kéo Q.



Hình 15.5

Gọi lực quán tính đặt lên vật A và B là $\vec{F}_1^{qt}, \vec{F}_2^{qt}$ ta có :

$$\vec{F}_1^{qt} = -\frac{P_1}{g}\vec{W}_1 ; \vec{F}_2^{qt} = -\frac{P_2}{g}\vec{W}_2$$

với $\vec{W}_1 = \vec{W}_2 = \vec{W}$.

Theo nguyên lý Đa Lăm Be ta có :

$$\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{Q}, \vec{F}_1^{qt}, \vec{F}_2^{qt}\right) = 0$$

Các lực này được biểu diễn trên hình (15-5a). Phương trình cân bằng theo phương trục ox nằm ngang viết được:

$$Q - \vec{F}_1^{qt} - \vec{F}_2^{qt} - \vec{F}_1 - \vec{F}_1 = 0,$$

hay $Q = -\dfrac{P_2 + P_1}{g}\vec{W} - (P_2 + P_1)f = 0$.

Suy ra gia tốc hai vật :

$$W = \left(\frac{Q}{P_2 + P_1} - f\right).g$$

Từ kết quả tìm được nhận thấy vật chuyển động khi :

$$f < \left(\frac{Q}{P_2 + P_1}\right).$$

Để tính lực căng T của dây ta phải tách một trong hai vật ra để xét chẳng hạn xét vật B. Các lực thực sự tác dụng lên vật B là : $\left(\vec{P}_2, \vec{N}_2, \vec{F}_2, Q, \vec{T}\right)$. lực quán tính là $\vec{F}_2^{qt}$. Các lực này được biểu diễn trên hình (15-5b).

Áp dụng nguyên lý Đa Lăm Be ta có :

$$(\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_2, \vec{Q}, \vec{T}, \vec{F}^{qt}{}_2) \sim 0.$$

Viết phương trình của hệ cân bằng này lên phương ngang ta có:

$$Q - T - F_2 - F_2{}^{qt} = 0$$

$$Q - T - p_2.f - p_2\frac{w}{g} = 0$$

Thay giá trị tìm được của w vào phương trình trên tính được :

$$T = \frac{QP_1}{P_1 + P_2}.$$

Kết quả cho thấy lực căng của dây không phụ thuộc lực ma sát.

<u>Thí dụ 15-4</u>:

Thanh đồng chất có chiều dài l, trọng lượng $\vec{P}$. Đầu A được giữ bằng khớp bản lề và đầu B được giữ bằng sợi dây (hình 15.6). Xác định lực căng $\vec{T}$ của dây BD khi trục quay đều với vận tốc ω_o.

Cho biết góc hợp bởi giữa thanh AB và trục quay AD là α.

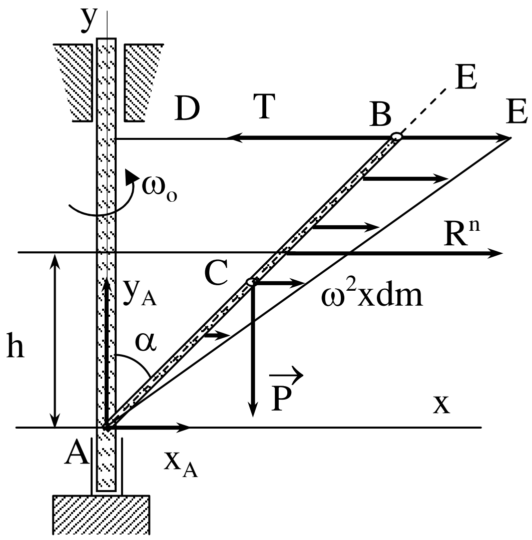
<u>Bài giải</u>:

Xét chuyển động của thanh AB. Các lực ngoài tác dụng lên thanh là: Trọng lực $\vec{P}$, phàn lực $\vec{R}_A$ và lực căng $\vec{T}$ của dây. Gọi hợp lực của các lực quán tính là $\vec{R}^{qt}$. Theo nguyên lý Đa lam be ta có:

$(\vec{P}, \vec{T}, \vec{R}_A, \vec{R}^{qt}) \sim 0.$

Ta có nhận xét: Lực quán tính $\vec{F}^{qt}_k$ của các phần tử trên thanh có cùng phương chiều và tỷ lệ với toạ độ x_k của nó.

Điều này cho phép vẽ biểu đồ phân bố các lực quán tính theo hình (15-6). Ta nhận thấy rằng hợp lực của hệ lực này $\vec{R}^{qt}$ = M. $\vec{W}_c$ và đi qua trọng tâm của tam giác ABE, nghĩa là đi qua điểm F cách A một đoạn bằng 2l/3. Dễ dàng tìm thấy phương trình cân bằng cho hệ lực:



Hình 15.8

$$\sum X = -T + X_A + R^{qt} = 0;$$

$$\sum Y = Y_A - P = 0;$$

$$\sum m_A(F_i) = T.l.\cos\alpha - R^{qt}.\frac{2}{3}\cos\alpha - P\frac{1}{2}\sin\alpha = 0$$

.Thay $R^{qt} = M.W_c = \frac{P}{g}\frac{l}{2}\sin\alpha\omega^2$ và giải hệ phương trình trên ta được :

$$T = P\left(\frac{l\omega_0^2}{3g}\sin\alpha + \frac{1}{2}tg\alpha\right);$$

$$Y_A = P \text{ và } X_A = P\left(\frac{l\omega_0^2}{3g}\sin\alpha + \frac{1}{2}tg\alpha\right) - \frac{P}{g}\frac{l}{2}\sin\alpha\omega_0^2 .$$

Chương 16

PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐỘNG LỰC HỌC - PHƯƠNG TRÌNH LAGRANG LOẠI 2

16.1. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐỘNG LỰC HỌC

Như đã biết ở chương 12 và chương 13, nguyên lý Đa Lăm Be cho ta phương pháp tĩnh để giải quyết các bài toán động lực học, còn nguyên lý di chuyển khả dĩ cho ta phương pháp tổng quát giải các bài toán cân bằng của cơ hệ tự do. Kết hợp hai nguyên lý trên cho chúng ta thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ tự do gọi là phương trình tổng quát của động lực học.

Xét cơ hệ chịu liên kết dừng và lý tưởng chuyển động dưới tác dụng của các hoạt lực và phản lực liên kết. Gọi $\vec{F}_k^a, \vec{N}_k$ là hoạt lực và phản lực liên kết tác dụng lên chất điểm M_k . Nguyên lý Đa Lăm Be cho chất điểm M_k có thể viết ;

$$\vec{F}_k + \vec{N}_k - m_k\vec{W}_k = 0. \qquad \text{(a)}$$

Cho hệ di chuyển khả dĩ, gọi $\partial\vec{r}_k$ là di chuyển của chất điểm M_k . Nhân hai vế của phương trình (a) với $\partial\vec{r}_k$ ta được

$$\vec{F}_k^a\partial\vec{r}_k + \vec{N}_k\partial\vec{r}_k - m_k\vec{W}_k\partial\vec{r}_k = 0. \qquad \text{(b)}$$

Viết phương trình (b) cho tất cả các chất điểm trong hệ nghĩa là cho k = 1 ... N ta sẽ được hệ N phương trình :

$$\vec{F}^a\partial\vec{r}_1 + \vec{N}_1\partial\vec{r}_1 - m_1\vec{W}_1\partial\vec{r}_1 = 0 \ ;$$

$$\vec{F}^a\partial\vec{r}_2 + \vec{N}_2\partial\vec{r}_2 - m_2\vec{W}_2\partial\vec{r}_2 = 0 \ ;$$

....

$$\vec{F}_n^a\partial\vec{r}_n + \vec{N}_n\partial\vec{r}_n - m_n\vec{W}_n\partial\vec{r}_n = 0 \ .$$

Tiến hành cộng vế với vế của hệ N phương trình trên ta được :

$$\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^a\partial\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{N}\vec{N}_k\partial\vec{r}_k - \sum_{k=1}^{N}m_k\vec{W}_k\partial\vec{r}_k = 0 \ . \qquad \text{(c)}$$

Vì liên kết đặt lên hệ là liên kết lý tưởng nên số hàng thứ hai trong phương trình (c) triệt tiêu : $\sum_{k=1}^{N}\vec{N}_k\partial\vec{r}_k = 0$.

Cuối cùng ta có :

$$\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^a\partial\vec{r}_k - \sum_{k=1}^{N} m_k\vec{W}_k\partial\vec{r}_k = 0$$

Hay : $$\sum_{k=1}^{N}(\vec{F}_k^a - m_k\vec{W}_k)\partial\vec{r}_k = 0 \qquad (16\text{-}1)$$

Phương trình (16-1) là phương trình vi phân chuyển động của hệ được gọi là phương trình tổng quát của động lực học dưới dạng véc tơ.

Cũng có thể viết phương trình này dưới dạng toạ độ Đề các sau đây.

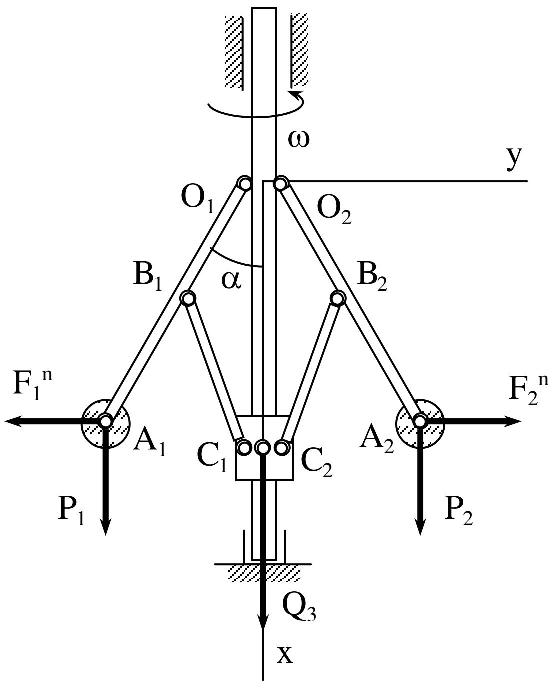
$$\sum_{k=1}^{N}.(X_k^a - m_k\vec{x}_k)\partial x_k + \sum_{k=1}^{N}.(Y_k^a - m_k\vec{y}_k)\partial y_k + \sum_{k=1}^{N}.(Z_k^a - m_k\bar{z}_k)\partial z_k = 0 \quad (16\text{-}2)$$

Từ các phương trình tổng quát của động lực học ta thấy khi cơ hệ chịu liên kết dừng và lý tưởng tổng vi phân công của các hoạt lực và các lực quán tính luôn luôn bằng không. Ta có :

$$\sum_{k=1}^{N}.\partial A_k^a + \sum_{k=1}^{N}.\partial A_k^{qa} = 0 \qquad (16\text{-}3).$$

<u>Thí du 16-1</u>

Trục của bộ điều chỉnh ly tâm đặt thẳng đứng và quay với vận tốc góc ω (hình 16-1). Trọng lượng của mỗi quả văng là $P_1 = P_2 = P$. Trọng lượng của con trượt CC_1là Q. Xác địng góc α của thanh A_1O_1 và A_2O_2 hợp với trục quay là hàm theo vận tốc góc ω. Cho $A_1O_1 = A_2O_2 = 1$; $O_1B_1 = O_2B_2 = B_1C_1 = B_2C_2 = a$



Hình 16.1

<u>Bài giải</u> :

Xem bộ điều chỉnh bao gồm quả văng A_1A_2 và con trượt là một cơ hệ. Nếu bỏ qua lực ma sát ở các ổ trục và các khớp nối ta có thể xem cơ hệ này chịu liên kết dừng và lý tưởng. Các hoạt lực tác dụng lên hệ bao gồm trọng lượng của các quả văng và con trượt là $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ và Q. Khi hệ quay ổn định với vận tốc góc ω thì lực quán tính của hệ chỉ bao gồm các lực quán tính ly tâm $\vec{F}_1^{qt}, \vec{F}_2^{qt}$ của hai quả văng. Do đối xứng các lực quán tính này có trị số bằng nhau và bằng :

$$\vec{F}_1^{qt} = \vec{F}_2^{qt} = \frac{P}{g}\omega^2 l \sin\alpha \ .$$

Phương trình tổng quát của động lực học viết dưới dạng toạ độ Đề các đã chọn như hình vẽ là :

$$P_1\partial x_1 + P_2\partial x_2 - F_1^{qt}\partial y_1 + F_2^{qt}\partial y_2 + Q\partial x_0 = 0.$$

Để xác định các biến phân của toạ độ từ hình vẽ ta có :

$x_1 = x_2 = l\cos\alpha$;

$y_1 = -y_2 = -l\sin\alpha$;

$x_c = 2a\cos\alpha$.

Suy ra: $\partial x_1 = \partial x_2 = -l\sin\alpha.\partial\alpha$;

$\partial y_1 = -\partial y_2 = -l\cos\alpha.\partial\alpha$;

$\partial x_c = -2a.\sin\alpha.\partial\alpha$;

Thay các kết quả vừa tìm được vào phương trình thiết lập ở trên :

$$-2P.2a\sin\alpha\partial\alpha + \frac{2P}{g}\omega^2 l\sin\alpha.l\cos\alpha\partial\alpha - 2Q.\sin\alpha\partial\alpha = 0 \ .$$

Suy ra :

$$\cos\alpha = \frac{Pl + Qa}{Pl^2\omega^2}g \ ,$$

$$\text{Hay : } \alpha = \arccos\frac{Pl + Qa}{Pl^2\omega^2}g \ .$$

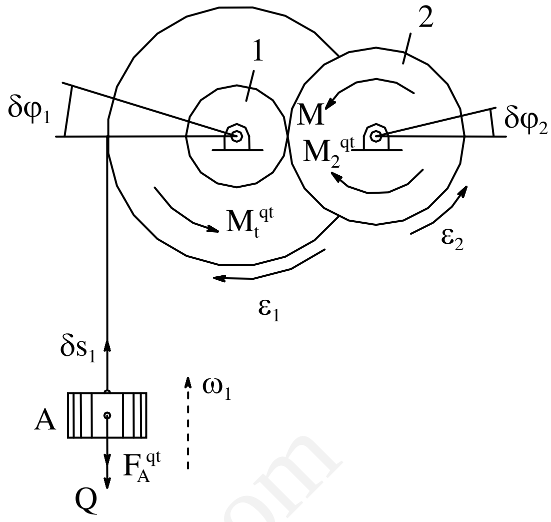
Vì $\cos\alpha \le 1$ nên cũng từ kết quả này suy ra :

$$\omega^2 \ge \frac{Pl + Qa}{Pl^2\omega^2}g \ .$$

Để có góc tách α cho trước vận tốc góc của trục bao giờ cũng lớn hơn hoặc bằng $\sqrt{\frac{Pl + Qa}{Pl^2\omega^2}g}$.

Thí du 16-2

Cơ cấu nâng hạ có kết cấu biểu diễn trên hình (16-2). Bánh xe 1 có trọng P_1, bán kính quán tính ρ_1. Bánh xe 2 có trọng P_2, bán kính quán tính ρ_2. Xác định gia tốc của vật nặng A có trọng lượng Q khi ta tác động lên bánh xe một mô men quay M.



Hình 16.2

Bài giải :

Xét hệ gồm bánh xe 1, bánh xe 2 và vật nặng A. Coi ma sát trong trục bánh xe là không đáng kể thì liên kết đặt lên hệ là liên kết dừng và lý tưởng. Phương trình vi phân chuyển động của hệ được viết dưới dạng phương trình tổng quát của động lực học.

$$\sum_{k=1}^{n} .F_k^a \partial \vec{r}_k - \sum_{k=1}^{N} .m_k \vec{W}_k \partial \vec{r}_k = 0$$

Hoạt lực tác dụng lên hệ bao gồm mô men M và các trọng lực $\vec{P}_1, \vec{P}_2, Q$.

Khi hệ chuyển động, các lực quán tính tác dụng lên hệ bao gồm $\vec{F}_A^{qt}, M_1^{qt}, M_2^{qt}$.

Lực quán tính của vật A có thể xác định : $\vec{F}_A^{qt} = -\dfrac{Q}{g}\vec{W}_A$

Các mô men lực quán tính của bánh xe $M_1^{qt} = \dfrac{P_1}{g}\rho_1^2\varepsilon_1 ; M_2^{qt} = \dfrac{P_2}{g}\rho_2^2\varepsilon_2$.

Ở đây $\vec{W}_A$ là gia tốc của vật A ; ε_1 và ε_2 là gia tốc của góc của bánh xe 1 và 2. Theo kết cấu của hệ ta có: $\varepsilon_1 = \dfrac{W_A}{r} ; \varepsilon_2 = \dfrac{r_1}{rr_2} W_A$.

Cho hệ một di chuyển khả dĩ với di chuyển ∂s_A của vật A làm cơ sở. Theo kết cấu ta cũng suy ra di chuyển của các bánh xe là :

$$\partial \varphi_1 = \frac{\partial s_A}{r} \quad ; \quad \partial \varphi_2 = \frac{r_1}{r_2}\partial \varphi = \frac{r_1}{r_2}\frac{\partial s_A}{r}$$

Phương trình tổng quát của hệ động lực học viết cụ thể sẽ là :

$$- Q\partial s_A - \frac{Q}{g}W_A\partial s_A - \frac{P_1}{g}\rho_1^2\varepsilon_1\frac{\partial s_A}{r} - \frac{P_2}{g}\rho_2^2\varepsilon_2\frac{r_1}{rr_2}\partial s_A + M\frac{r_1}{r_2}\frac{\partial s_A}{r} = 0 .$$

$$\text{Hay : } -Q(1-\frac{W_A}{g}) - \frac{P_1}{g}\rho_1^2\frac{W_A}{r^2} - \frac{P_2}{g}\rho_2^2\frac{r_1^2}{r^2r_2^2}W_A + M\frac{r_1}{rr_2} = 0 .$$

Suy ra :

$$W_A = \frac{\frac{r_1}{r_2}M - rQ}{rQ + \frac{\rho_1^2}{r}P + \frac{\rho_2^2}{r}\frac{r_1^2}{r_2^2}P_1} .$$

16.2. PHƯƠNG TRÌNH LAGRANG LOẠI II

Phương trình trình tổng quát của động lực học viết dưới dạng toạ độ suy rộng dược gọi là phương trình Lagrang loại 2.

Xét hệ chịu liên kết dừng và lý tưởng. Phương trình tổng quát của hệ là :

$$\sum_{k=1}^{N}.(\vec{F}_k^a = m_k\vec{W}_k)\partial\vec{r}_k = 0 \quad , \quad \text{hay : } \sum_{k=1}^{N}.\vec{F}_k^a\partial\vec{r}_k - \sum_{k=1}^{N}.m_k\vec{W}_k\partial\vec{r}_k = 0 .$$

Như đã biết ở chương 14 ta có thể thay : $\sum_{k=1}^{N}.\vec{F}_k^a\partial\vec{r}_k = \sum_{j=1}^{m}.Q_j\partial q_j$

Ở đây Q_j là lực suy rộng ứng với toạ độ suy rộng q_j .

Để có phương trình Lagrang loại 2 ta còn phải biến đổi trực tiếp số hạng $\sum_{k=1}^{N}.m_k\vec{W}_k\partial\vec{r}_k$ sang toạ độ suy rộng. ta có :

$$\sum_{k=1}^{N}.m_k\vec{W}_k\partial\vec{r}_k = \sum_{k=1}^{N}.m_k\vec{W}_k(\sum_{j=1}^{m}.\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\partial q_j) = \sum_{j=1}^{m}.(\sum_{k=1}^{N}m_k\vec{W}_k\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j})\partial q_j .$$

$$\text{ở trên đã thay : } \partial r_k = (\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_1}\partial q_j + \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_2}\partial q_j + ...\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_m}\partial q_j + \frac{\partial r_k}{\partial t})$$

Đặt $\sum_{k=1}^{N}m_k\vec{W}_k\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j} = Z_j$ ta sẽ đưa phương trình về dạng:

$$\sum_{k=1}^{N}.m_k\vec{W}_k\partial\vec{r}_k = \sum_{j=1}^{m}.Z_j\partial q_j$$

Sau đây tìm biểu thức của Z_j :

$$Z_j = \sum_{k=1}^{N}.m_k\vec{W}_k\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}(\sum_{k=1}^{N}.m_k\,\vec{v}_k\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_1} - \sum_{k=1}^{N}.m_k\vec{v}_k\frac{d}{dt}(\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_1})\ .$$

Thay $\vec{v}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_2 + ...\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_m + \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial t}$;

$$\vec{v}_k = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial t}\ .$$

Từ kết quả này suy ra hai biểu thức sau :

$$\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial\vec{v}_k}{\partial\dot{q}_j} \qquad \text{(e)}$$

Thay :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}) = \frac{\partial^2\vec{r}_k}{\partial q_j\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2\vec{r}_k}{\partial q_j\partial q_2}\dot{q}_2 + ...+\frac{\partial^2\vec{r}_k}{\partial q_j\partial q_m}\dot{q}_m + \frac{\partial^2\vec{r}_k}{\partial t\partial q_1}$$

$$= \sum_{j=1}^{m}.\frac{\partial^2\vec{r}_k}{\partial q_j\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial^2\vec{r}_k}{\partial t\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}(\sum_{j=1}^{m}.\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial t}) = \frac{\partial\vec{v}_k}{\partial q_j}$$

Suy ra : $\frac{d}{dt}(\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}) = \frac{\partial\vec{v}_k}{\partial q_j}$. (g)

Thay kết quả tìm được từ biểu thức (e) và (g) vào biểu thức của Z_j ta được :

$$Z_j = \frac{d}{dt}(\sum_{k=1}^{N}.m_k\,\vec{v}_k\frac{\partial\vec{v}_k}{\partial\dot{q}_j}) - \sum_{k=1}^{N}.m_k\,\vec{v}_k\frac{\partial\vec{v}_k}{\partial q_j}\ ;$$

$$= \frac{d}{dt}.\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}(\sum_{k=1}^{N}.m_k\,\vec{v}_k\frac{v_k^2}{2}.\frac{\partial}{\partial q_j}(\sum.m_k\frac{v_k^2}{2})\ .$$

Hay : $Z_j = \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}) - \frac{\partial T}{\partial q_j}$

Thay kết quả tìm được vào phương trình (d) ta có :

$$\sum_{k=1}^{N}.\vec{F}_k^a\partial\vec{r}_2 - \sum_{k=1}^{N}.m_k\vec{W}_k\partial\vec{r}_k = \sum_{j=1}^{m}.Q_j\partial q_j - \sum_{j=1}^{m}.Z_j.\partial q_j = 0\,.$$

Hay : $\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j\ (j = 1....m)$ (16-4).

Hệ phương trình dạng (16-4) được gọi là phương trình Lagrang loại 2. Trong đó T là động năng của hệ. Q_j là lực suy rộng ứng với toạ độ suy rộng q_j.

Trong trường hợp lực hoạt động là lực có thế $Q_j = -\frac{\partial \pi}{\partial q_j}$ thì phương trình (16-4) trở thành :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \pi}{\partial q_j} \qquad (j = 1....m) . \qquad (16\text{-}5)$$

Cần chú ý rằng $\frac{\partial \pi}{\partial \dot{q}_j} = 0$, do đó :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \pi}{\partial \dot{q}_j}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial \pi}{\partial q_j}\right) = 0$$

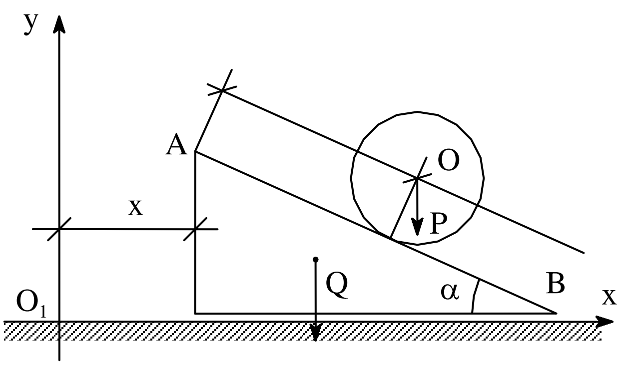
Nếu đặt T - π = L (q_j , $\dot{q}_j$,t) thì phương trình Lagrang loại 2 có dạng :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1...m) . \qquad (16\text{-}6)$$

Thí du 16-1

Một trụ tròn đồng chất có khối lượng M chuyển động lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng của lăng trụ hình tam giác có khối lượng m và có góc nghiêng với mặt ngang là α. Lăng trụ có thể trượt trên mặt ngang nhẵn (hình 16-3). Lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.

Xét hệ lăng trụ và trụ tròn. Cơ hệ chịu liên kết dừng, giữ, hô nô nôm và lý tưởng. Hoạt lực tác dụng lên hệ gồm có : Trọng lực $\vec{P}$ và $\vec{Q}$ của trụ tròn và lăng trụ tam giác. Các lực này là lực có thế. Nếu chọn hệ toạ độ suy rộng đủ của hệ là q_1 = x và q_2 = s (hình 16-3) ta thấy hệ có hai bậc tự do và phương trình Lagrang loại 2 có thể viết dưới dạng :



Hình 16.3

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_j} = -\frac{\partial \pi}{\partial x_j} \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial s_j} = -\frac{\partial \pi}{\partial s_j} \qquad \text{(b)}$$

Thế năng của hệ ứng với lực $\vec{P}$ tính như sau :

$\pi(P) = -Mg.\sin\alpha.s + C_1$ với C_1 là hằng số.

Thế năng của hệ ứng với lực Q là một hằng số

$\pi(Q) = const = C_2$

Thế năng của cả hệ $\pi = -$ Mg.S.sinα + C ; C là hằng số

Suy ra : $\dfrac{\partial \pi}{\partial x} = 0$ và $\dfrac{\partial \pi}{\partial s} = -Mg\sin\alpha$

Động năng của hệ bao gồm động năng của trụ tròn và động năng của lăng trụ.

Lăng trụ chuyển động tịnh tiến nên động năng của nó có thể viết :

$$T_1 = \frac{mV^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2}.$$

Trụ tròn chuyển động song phẳng nên động năng tính được :

$$T_{tr} = \frac{MV^2}{2} = J_0\frac{\omega^2}{2}$$

V_0 là vận tốc tuyệt đối của trục trụ tròn.

$$\vec{V}_0 = \vec{V}_c + \vec{V}_r$$

Suy ra :

$$V_{0x} = V_{cx} + V_{rx} = \dot{x} + \dot{S}\cos\alpha$$

$$V_{0y} = V_{cy} + V_{ry} = \dot{y} + \dot{S}\sin\alpha$$

$$V_0^2 = V_{ox}^2 + V_{oy}^2 = (\dot{x} + \dot{S}\cos\alpha)^2 + (\dot{y} + \dot{S}\sin\alpha)^2$$

$$= \dot{x}^2 + \dot{S}^2 + 2\dot{x}^2\dot{S}^2\cos\alpha$$

$$\omega = \frac{V_{or}}{R} = \frac{V_r}{R} = \frac{|\dot{S}|}{R} \text{ và } \omega^2 = \frac{\dot{s}^2}{R^2} \text{ còn } J_0 = \frac{MR^2}{4}$$

Thay các kết quả trên vào biểu thức của động năng hệ ta được :

$$T_{hệ} = \frac{m\dot{x}^2}{w} + \frac{M}{2}\left[(\dot{x} + \dot{S}\cos\alpha)^2 + (\dot{y} + \dot{S}\sin\alpha)^2\right] + \frac{MR^2}{4}\frac{\dot{s}}{R^2}$$

$$= (M+m)\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{3M}{2}\frac{\dot{s}^2}{2} + M\dot{x}\dot{S}\cos\alpha \ .$$

Suy ra : $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial T}{\partial s} = 0$; $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + M\dot{S}\cos\alpha$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + M\ddot{S}\cos\alpha$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{3M}{2}\dot{S} + M\dot{x}\cos\alpha \ ; \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) = \frac{3M}{2}\ddot{S} + M\ddot{x}\cos\alpha$$

Phương trình vi phân chuyển động của hệ phương trình Lagrang loại 2 nhận được :

$$(M+m)\ddot{x} + M\ddot{S}\cos\alpha = 0 \ ;$$

$$\frac{3M}{2}\ddot{S} + M\ddot{x}\cos\alpha = Mg\sin\alpha.$$

Từ hệ phương trình trên ta tìm được :

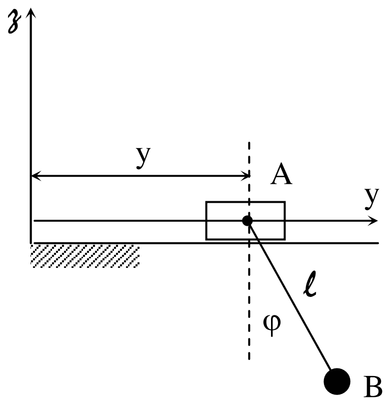
$$\ddot{x} = \frac{Mg\sin 2\alpha}{3(M+m) - 2M\cos^2\alpha} < 0$$

$$\ddot{S} = \frac{2(M+m)g\sin\alpha}{3(M+m) - 2M\cos^2\alpha} > 0$$

Nếu ban đầu hệ đứng yên thì sau đó trụ tròn lăn xuống còn lăng trụ trượt qua phải. Các chuyển động đều là chuyển động biến đổi đều.

Thí du 16-2

Con lắc eliptic gồm con trượt A và quả cầu B nối với A bằng một thanh treo AB. Cho biết khối lượng của con trượt m_1, khối lượng của quả cầu là m_2, khối lượng thanh treo không đáng kể. Con trượt A có thể trượt theo phương AY trên mặt phẳng ngang nhẵn. Con lắc AB có thể quay tròn quanh trục A trong mặt phẳng thẳng đứng oxy (hình 16-4). Thiết lập phương trình vi phân của hệ.



Hình 16.4

Bài giải

Xét hệ gồm con trượt A và con lắc AB.

Có thể chọn hai toạ độ suy rộng đủ của hệ là :

$q_1 = y$ và $q_2 = \varphi$.

Phương trình vi phân của hệ có thể viết dưới dạng :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_y \;;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi .$$

Với T là động năng của hệ, Q_y và Q_φ là các lực suy rộng ứng với toạ độ suy rộng là y và φ.

Các hoạt lực tác dụng lên hệ gồm $\vec{P}_1$ và $\vec{P}_2$ đều là các lực có thế nên có thể viết :

$$Q_y = -\frac{\partial \pi}{\partial y} \;;\; Q_\varphi = -\frac{\partial \pi}{\partial \varphi} .$$

Thế năng của hệ có thể tính như sau :

$\pi = -m_2 g.x + \text{const} = -m_2 g l\cos\varphi + \text{const}$.

Suy ra : $-\dfrac{\partial \pi}{\partial y} = Q_y = 0$ và $-\dfrac{\partial \pi}{\partial \varphi} = Q_\varphi = m_2 g l \sin\varphi$

Động năng của hệ $T = T_A + T_B$.

Động năng của con trượt : $T_A = \dfrac{m_1 V_A^2}{2} = \dfrac{m_1 \dot{y}^2}{2}$.

Động năng của quả cầu : $T_B = \dfrac{m_1 V_B^2}{2} = \dfrac{m_1}{2}(\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2)$.

Với $x_B = l\cos\varphi$ và $\dot{x}_B = -l\dot{\varphi}\sin\varphi$; $y_B = y + l\sin\varphi$ và $\dot{y}_B = \dot{y} + l\dot{\varphi}\cos\varphi$

Ta có :

$$T_B = \frac{m_2}{2}\left[(-l\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 + (\dot{y} + l\dot{\varphi}\cos\varphi)^2\right] = \frac{m_2}{2}(l^2\dot{\varphi}^2 + \dot{y}^2 + 2l\dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi).$$

Biểu thức động năng của hệ thu được :

$$T = T_A + T_B = \frac{m_1\dot{y}^2}{2} + \frac{m_2}{2}(l^2\dot{\varphi}^2 + \dot{y}^2 + 2l\dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi).$$

Từ đó suy ra : $\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = m_2l^2\dot{\varphi} + m_2l\dot{y}\cos\varphi$;

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) = m_2l^2\ddot{\varphi} + m_2l\ddot{y}\cos\varphi - m_2l\dot{y}\dot{\varphi}\sin\varphi \;;$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{y}} = (m_2 + m_1)\dot{y} + m_2l\dot{\varphi}\cos\varphi \;;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{y} + m_2l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)\;;$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = 0\;;$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = -m_2l_o\dot{\varphi}\dot{y}\sin\varphi\;.$$

Thay các giá trị tìm được vào phương trình vi phân của hệ ta được :

$$m_2l^2\ddot{\varphi} + m_2l\ddot{y}\cos\varphi - m_2l\dot{y}\dot{\varphi}\sin\varphi + m_2l\dot{y}\dot{\varphi}\sin\varphi = -m_2gl\sin\varphi\;;$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{y} + m_2l\ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2l\dot{\varphi}^2\sin\varphi = 0\;.$$

Sau khi rút gọn được phương trình vi phân chuyển động của hệ :

$$\begin{cases} l\ddot{\varphi} + \cos\varphi\ddot{y} + g\sin\varphi = 0\;; \\ (m_1 + m_2)\ddot{y} + m_2l\ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2l\dot{\varphi}^2\sin\varphi \end{cases}$$