

Đại Học Quốc Gia Tp.Hồ Chí Minh
Trường Đại học Khoa Học Tự Nhiên
Khoa Vật Lý – Vật Lý Kỹ Thuật

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA KÌ – KHÓA 2008

Năm học: 2009 – 2010

Môn học: CƠ LÝ THUYẾT

Thời gian làm bài: 60 phút

(Không được sử dụng tài liệu)

Câu 1: (6 điểm)

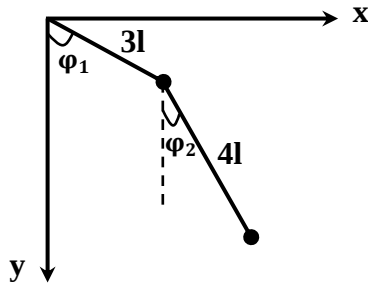
Một con lắc đơn có độ dài $4l$ và khối lượng m được treo vào một con lắc đơn khác có độ dài $3l$ và khối lượng m , tạo thành một con lắc phẳng kép. Tìm hàm Lagrange và các phương trình Lagrange cho chuyển động của hệ.

Câu 2: (4 điểm)

Một hạt bị buộc chuyển động trong một mặt phẳng. Hạt bị hút đến một điểm cố định P trong mặt phẳng đó với một lực luôn luôn được hướng chính xác đến điểm P và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách từ điểm P .

- Sử dụng hệ tọa độ cực, hãy viết hàm Lagrange cho hạt đó.
- Viết các phương trình Lagrange cho hạt đó và tìm ít nhất một tích phân đầu của chuyển động.

--- HẾT ---

Câu 1:

Chọn $q_1 = \varphi_1$; $q_2 = \varphi_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3l \sin \varphi_1 \\ y_1 = 3l \cos \varphi_1 \\ x_2 = 3l \sin \varphi_1 + 4l \sin \varphi_2 \\ y_2 = 3l \cos \varphi_1 + 4l \cos \varphi_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - U(\varphi_1, \varphi_2). \\ &= \frac{1}{2} m [(3l \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1)^2 + (-3l \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1)^2 + (3l \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + 4l \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2)^2 + (-3l \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - 4l \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2)^2] \\ &\quad - U(\varphi_1, \varphi_2). \\ &= \frac{1}{2} m (9l^2 \cos^2 \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + 9l^2 \sin^2 \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + 9l^2 \cos^2 \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + 24l^2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \\ &\quad + 16l^2 \cos^2 \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 + 9l^2 \sin^2 \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + 24l^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + 16l^2 \sin^2 \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2) - U(\varphi_1, \varphi_2). \\ &= \frac{1}{2} m [18l^2 \dot{\varphi}_1^2 + 16l^2 \dot{\varphi}_2^2 + 24l^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] - U(\varphi_1, \varphi_2). \\ &= 9ml^2 \dot{\varphi}_1^2 + 8ml^2 \dot{\varphi}_2^2 + 12ml^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - U(\varphi_1, \varphi_2). \end{aligned}$$

Phương trình Lagrange tổng quát: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.

$$\bullet q_i = q_1 = \varphi_1: \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = 18ml^2 \dot{\varphi}_1 + 12ml^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = 18ml^2 \ddot{\varphi}_1 + 12ml^2 [\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] + 12ml^2 [-\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2] \dot{\varphi}_2.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 12ml^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 [-\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] - \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = - \left[12ml^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} \right].$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình Lagrange: } 18ml^2 \ddot{\varphi}_1 + 12ml^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_2 + 12ml^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2 + \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = 0.$$

$$\bullet q_i = q_2 = \varphi_2: \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = 12ml^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{\partial U}{\partial \varphi_2}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = 16ml^2 \dot{\varphi}_2 + 12ml^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = 16ml^2 \ddot{\varphi}_2 + 12ml^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 + 12ml^2 \dot{\varphi}_1 [-\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2].$$

$$= 16ml^2 \ddot{\varphi}_2 + 12ml^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 + 12ml^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - 12ml^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2.$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình Lagrange: } 16ml^2 \ddot{\varphi}_2 + 12ml^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 - 12ml^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 + \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} = 0.$$

Câu 2: a) Hệ tọa độ cực $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U. \text{ Ta có:}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \Rightarrow \dot{x}^2 = (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \Rightarrow \dot{y}^2 = (\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi)^2 \end{aligned} \Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$U = - \int F dr = - \int_0^r \frac{\alpha}{r^2} dr = \frac{\alpha}{r} \Rightarrow L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{r}.$$

b) Phương trình chuyển động: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

$$\bullet q_1 = \varphi \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\varphi}) - 0 = 0 \Leftrightarrow mr^2 \ddot{\varphi} = 0 \Leftrightarrow \ddot{\varphi} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow d\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = C = \text{const} \Rightarrow \varphi = Ct.$$

$$\bullet q_2 = r \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{r}) - \left(m\dot{\varphi}^2 + \frac{\alpha}{r^2} \right) = 0 \Leftrightarrow m\ddot{r} - m\dot{\varphi}^2 - \frac{\alpha}{r^2} = 0.$$

(Phương trình này mình chưa tìm được cách giải, bạn nào giải được giúp đỡ mình nhé! ^_^)

- - - HẾT - - -