# Chương 1

# TỔ HỢP CƠ BẢN



lvluyen@hcmus.edu.vn

http://luyen.pe.hu/cautrucroirac

**FB**: fb.com/cautrucroirac



Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

# Nội dung

## Chương 1. TỔ HỢP CƠ BẢN

1. Nguyên lý đếm cơ bản
2. Tổ hợp
3. Tổ hợp lặp
4. Khai triển lũy thừa của đa thức

# 1.1. Các nguyên lý đếm cơ bản

1. **Nguyên lý cộng**
2. **Nguyên lý nhân**
3. **Nguyên lý Derichlet**

# 1.1.1. Nguyên lý cộng

Giả sử ta phải thực hiện một công việc bằng cách chọn một trong $k$ sự chọn lựa các phương pháp khác nhau $T_1, T_2, ..., T_k$. Để thực hiện $T_i$ $(1 \leq i \leq k)$ ta có $n_i$ cách. Vậy ta số cách thực hiện công việc trên là

$$\boldsymbol{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}.$$

**Ví dụ.** Một sinh viên có thể chọn một đề tài từ một trong 3 danh sách các đề tài. Số đề tài trong các danh sách đề tài lần lượt là 23, 15, 19. Hỏi sinh viên có bao nhiêu cách chọn một đề tài?

**Đáp án.** $23 + 15 + 19 = 57$ cách.

**Nhận xét.** Quy tắc cộng có thể phát biểu dưới dạng của ngôn ngữ tập hợp: Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_k$ là các tập hợp đôi một rời nhau, khi đó

$$\boldsymbol{|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|}.$$

# 1.1.2. Nguyên lý nhân

Giả sử một thủ tục bao gồm $k$ công việc kế tiếp nhau $T_1, T_2, \ldots, T_k$. Nếu công việc $T_1$ có thể được thực hiện theo $n_1$ cách, và sau khi chọn cách thực hiện cho $T_1$ ta có $n_2$ cách thực hiện $T_2$, v.v...cho đến cuối cùng, sau khi chọn cách thực hiện các công việc $T_1, T_2, ..., T_{k-1}$ ta có $n_k$ cách thực hiện $T_k$. Vậy ta có cách để thực hiện thủ tục này là:

$$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$$



**Ví dụ.**




Hỏi có nhiêu cách đi từ $A$ đến $C$?

**Đáp án.** $3 \times 2 = 6$ cách.

**Nhận xét.** Quy tắc nhân có thể phát biểu dưới dạng của ngôn ngữ tập hợp: Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_k$ là các tập hữu hạn, khi đó

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = |A_1| \times |A_2| \times \ldots \times |A_k|.$$

**Ví dụ.** Có bao nhiêu chuỗi bit có độ dài 8?

**Giải.** Mỗi bit có thể chọn 1 trong 2 cách: 0 hoặc 1. Theo nguyên lý nhân ta có số lượng chuỗi là $2^8 = 256$.



**Ví dụ.** Cho tập $A$ gồm 6 phần tử và tập $B$ gồm 10 phần tử. Hỏi

a) Có bao nhiêu ánh xạ từ $A$ vào $B$?

b) Có bao nhiêu đơn ánh từ $A$ vào $B$?



**Giải.** a) Với mỗi phần tử $x$ của $A$ ta có 10 cách chọn ảnh của $x$ (vì $B$ có 10 phần tử). Theo nguyên lý nhân, ta có $10^6$ ánh xạ.

b) Giải sử $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_6\}$. Ta chia bài toán thành 6 bước:

Bước 1. Chọn ảnh của $x_1$ có 10 cách.

Bước 2. Chọn ảnh của $x_2$ có $10 - 1 = 9$ cách.

................

Bước 6. Chọn ảnh của $x_6$ có $10 - 5 = 5$ cách.

Vậy số đơn ánh là: $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151200$.

**Ví dụ.** Mật khẩu máy tính dài từ 6 đến 8 ký tự. Mỗi ký tự có thể là số hoặc chữ hoa. Mỗi mật khẩu phải có ít nhất một chữ số. Có bao nhiêu mật khẩu ?



**Giải.** Gọi $L_6, L_7, L_8$ là tổng số mật khẩu có chiều dài tương ứng là $6, 7, 8$. Dùng quy tắc nhân ta có

$$L_6 = (10 + 26)^6 - 26^6$$

$$L_7 = (10 + 26)^7 - 26^7$$

$$L_8 = (10 + 26)^8 - 26^8$$



Dùng quy tắc cộng ta có tổng số mật khẩu

$$P = L_6 + L_7 + L_8 = 36^6 + 36^7 + 36^8 - (26^6 + 26^7 + 26^8) = 2684483063360$$

**Ví dụ.**

- Trong 1 nhóm có 367 người thì ít nhất có 2 người sinh cùng ngày.
- Có 20 chim bồ câu ở trong 7 cái chuồng. Khi đó sẽ có ít nhất 1 chuồng có 3 con bồ câu trở lên.

**Định nghĩa.** ***Giá trị trần*** của $x$, ký hiệu là $\lceil x \rceil$, là số nguyên nhỏ nhất mà lớn hơn hay bằng $x$.



**Ví dụ.** $\lceil 2.1 \rceil = 3$; $\lceil 1.9 \rceil = 2$; $\lceil 4 \rceil = 4$;
$\lceil -1.1 \rceil = -1$. $\lceil -2.9 \rceil = -2$; $\lceil -4 \rceil = -4$.



**Nguyên lý Derichlet**

Nếu có $n$ đồ vật được đặt vào trong $k$ hộp thì sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất $\left\lceil \dfrac{n}{k} \right\rceil$ đồ vật.

**Chứng minh.** Giả sử mọi hộp đều chứa ít hơn $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ vật. Khi đó tổng số đồ vật nhỏ hơn hoặc bằng

$$k\left(\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 1\right) < k\left(\frac{n}{k}\right) = n.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết là có $n$ đồ vật cần xếp. ■

**Ví dụ.** Trong 100 người thì có ít nhất $\left\lceil \frac{100}{12} \right\rceil = 9$ cùng tháng sinh.



**Ví dụ.** Trong một lớp học phải có ít nhất bao nhiêu học sinh để cho có ít nhất 6 học sinh có cùng thứ bậc học tập, biết rằng có 5 loại thứ bậc $A, B, C, D$ và $E$?



**Giải.** Gọi số học sinh của lớp là $N$. Theo nguyên lý Derichlet ta có $\lceil \frac{N}{5} \rceil = 6$. Khi đó

$$25 < N \leq 30.$$

Do đó ta có thể chọn $N = 26$. Vậy lớp phải có ít nhất 26 học sinh.

**Ví dụ.** Chứng minh rằng trong 10 số tự nhiên bất kỳ có thể chọn hai số có hiệu chia hết cho 9.

**Giải.** Khi chia 10 số bất kỳ cho 9 ta sẽ có mỗi số có một số dư trong 9 số dư: $0, 1, 2, \ldots, 7, 8$. Do đó theo nguyên lý Dirichlet phải tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư. Hiệu của hai số đó sẽ chia hết cho 9. ∎

**Ví dụ.**(tự làm) Cho tập $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Lấy $A$ là tập hợp con của $X$ gồm 6 phần tử. Khi đó trong $A$ sẽ chứa hai phần tử có tổng bằng 10.

**Giải.** Ta lập các hộp như sau: $\{1, 9\}$, $\{2, 8\}$, $\{3, 7\}$, $\{4, 6\}$, $\{5\}$. Do $A$ có 6 phần tử nên khi sắp xếp 6 phần tử đó sẽ có hộp có 2 phần tử. Rõ ràng tổng 2 phần tử này bằng 10. ∎

**Ví dụ.** Trong một phòng họp có $n$ người, bao giờ cũng tìm được 2 người có số người quen trong số những người dự họp là như nhau.

**Giải.** Số người quen của mỗi người trong phòng họp nhận các giá trị từ 0 đến $n-1$. Rõ ràng trong phòng không thể đồng thời có người có số người quen là 0 (tức là không quen ai) và có người có số người quen là $n-1$ (tức là quen tất cả).

Vì vậy theo số lượng người quen, ta chỉ có thể phân $n$ người ra thành $n-1$ nhóm. Vậy theo nguyên lý Dirichlet tồn tai một nhóm có ít nhất 2 người, tức là luôn tìm được ít nhất 2 người có số người quen là như nhau. ■

1. **Hoán vị**
2. **Chỉnh hợp**
3. **Tổ hợp**

# 1.2.1. Hoán vị

**Định nghĩa.** Cho tập hợp $A$ gồm $n$ phần tử. Mỗi cách sắp đặt có thứ tự $n$ phần tử của $A$ được gọi là một ***hoán vị của*** $n$ phần tử.

**Ví dụ.** Cho $A = \{1, 2, 3\}$. Khi đó $A$ có các hoán vị sau:

$$123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321$$



**Mệnh đề.** *Số các hoán vị của $n$ phần tử, ký hiệu là* $P_n$

$$P_n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$$



*Quy ước* $0! = 1$.

**Ví dụ.**(tự làm) Cho $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được tạo từ tập $X$?

**Ví dụ.** Cần sắp xếp 5 học sinh $A, B, C, D, E$ thành một dãy hàng dọc

a) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp.

b) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho hai học sinh $A$ và $B$ luôn đứng ở hai đầu hàng ?

**Giải.** a) Để xếp 5 học sinh theo một dãy hàng dọc ta chỉ cần xếp 5 học sinh theo thứ tự. Vậy có $P_5 = 5! = 120$ cách.



b) Do 2 bạn $A, B$ đứng đầu hàng nên có $2! = 2$ cách xếp 2 bạn đứng đầu. Ba vị trí còn lại ta chọn 3 học sinh còn lại và xếp theo thứ tự nên có $3! = 6$ cách. Vậy theo nguyên lý nhân ta có: $2! \times 3! = 2 \times 6 = 12$ cách.



**Ví dụ.** Từ 6 chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau, trong đó có bao nhiêu số lẻ? bao nhiêu số không chia hết cho 5?

**Giải.** Để có số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau ta chọn sắp xếp 6 chữ số đã cho theo thứ tự. Nên có $P_6 = 6! = 720$ số.

Gọi $x = \overline{abcdef}$ là số có 6 chữ số khác nhau.

- Nếu $x$ là số lẻ thì $f \in \{1, 3, 5\}$ nên $f$ có 3 cách chọn. Năm số còn lại $a\,b\,c\,d\,e$ là hoán vị của 5 chữ số còn lại (vì đã loại đi số $f$). Nên có $5!$ cách chọn. Vậy theo qui tắc nhân ta có $3 \times 5! = 360$ số lẻ
- Tương tự như lý luận trên, ta có $5!$ số chia hết cho 5. Như vậy số không chia hết cho 5 là $6! - 5! = 600$.



**Ví dụ.**(tự làm) Cần sắp xếp 3 sinh viên nữ và 5 sinh viên nam thành một hàng dọc.

a) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp nếu 3 sinh viên nữ luôn đứng liền nhau ?



b) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp nếu sinh viên đứng đầu hàng là sinh viên nữ và sinh viên cuối hàng là sinh viên nam ?



**Đáp án.** a) $5! \times 6 \times 3! = 4320$ cách b) $3 \times 5 \times 6! = 10800$ cách

# 1.2.2. Chỉnh hợp

**Định nghĩa.** Cho $A$ là tập hợp gồm $n$ phần tử. Mỗi bộ gồm $k$ phần tử $(1 \leq k \leq n)$ sắp thứ tự của tập hợp $A$ được gọi là một ***chỉnh hợp chập*** $k$ ***của*** $n$ phần tử.

**Ví dụ.** Cho $X = \{a, b, c\}$. Khi đó $X$ có các chỉnh hợp chập 2 của 3 là:

$$ab, \ ba, \ ac, \ ca, \ bc, \ cb$$



**Mệnh đề.** *Số các chỉnh hợp chập $k$ của $n$, ký hiệu là* $\boldsymbol{A_n^k}$*, và*

$$A_n^k = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$



**Ví dụ.** Có bao nhiêu số tự nhiên khác nhau ngồm 3 chữ số được tạo thành từ $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

**Đáp án.** $A_6^3$ số.

**Ví dụ.**(tự làm) Một lớp có 15 học sinh nam và 20 nữ. Trong buổi tập trung lớp đầu năm, giáo viên chọn 3 học sinh làm ban cán sự lớp: 1 lớp trưởng, 1 lớp phó và 1 thủ quỹ.

a) Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

b) Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu lớp trưởng là nam.

c) Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu trong 3 bạn được chọn phải có ít nhất 1 nữ.



**Đáp án.** $a)\ A_{35}^3$

$b)\ 15 \times A_{34}^2$

$c)\ A_{35}^3 - A_{15}^3$

# 1.2.3. Tổ hợp

**Định nghĩa.** Cho tập hợp $A$ gồm $n$ phần tử. Mỗi tập con gồm $k$ phần tử của $A$ được gọi là một ***tổ hợp chập $k$ của $n$*** phần tử.

**Ví dụ.** Cho $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Tổ hợp chập 3 của 4 phần tử của $X$ là

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$$



**Định nghĩa.** Số tổ hợp chập $k$ của $n$ phần tử được kí hiệu là $\binom{n}{k}$ hay $C_n^k$,

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



**Ví dụ.** Một lớp có 30 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 10 bạn?

**Đáp án.** $C_{30}^{10}$ cách.

**Ví dụ.**(tự làm) Một lớp có 40 sinh viên gồm 25 nam và 15 nữ. Ta cần chọn ra 6 sinh viên tham gia hội nghị của trường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu:

a) Không phân biệt nam nữ ?

b) Có 4 nam và 2 nữ ?

c) Có ít nhất là 4 sinh viên nam ?

**Đáp án.** a) $C_{40}^{6}$ b) $C_{25}^{4} \times C_{15}^{2}$

c) $C_{25}^{4} \times C_{15}^{2} + C_{25}^{5} \times C_{15}^{1} + C_{25}^{6} \times C_{15}^{0}$

**Ví dụ.**(tự làm) Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 bác sĩ, 4 kỹ sư, 3 luật sư vào một bàn dài có 12 chỗ ngồi (được đánh số từ 1 đến 12) trong mỗi trường hợp sau:

a) không có điều kiện gì thêm?

b) các đồng nghiệp ngồi cạnh nhau?

c) các bác sĩ ngồi cạnh nhau ở một đầu bàn, còn các kỹ sư, luật sư ngồi xen kẻ ở đầu bàn còn lại?



**Đáp án.** a) $12!$ b) $3! \times 5! \times 4! \times 3!$ c)$2 \times 5! \times 4! \times 3!$

**Ví dụ.**(tự làm) Có bao nhiêu số tự nhiên $N = \overline{abcdefgh}$ gồm 8 chữ số hệ thập phân $a, b, c, d, e, f, g, h$ thỏa các điều kiện $a$ lẻ, $b = 4, g > 6, h$ chia hết cho 3 và $c, d, e, f$ tùy ý ?



**Đáp án.** $5 \times 1 \times 10^4 \times 3 \times 4$.

**Ví dụ.**(tự làm) Từ 9 sinh viên nam và 8 sinh viên nữ, ta muốn chọn ra một đội gồm 10 người sao cho trong đội đó có ít nhất 4 nam và 4 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

**Đáp án.** $C_9^4 \times C_8^6 + C_9^5 \times C_8^5 + C_9^6 \times C_8^4$

**Ví dụ.**(tự làm) Có bao nhiêu cách sắp 7 nam và 6 nữ thành 1 hàng dọc mà nam và nữ đứng xen kẽ ?



Có bao nhiêu cách sắp 6 nam và 6 nữ thành 1 hàng dọc mà nam và nữ đứng xen kẽ ?

Có bao nhiêu cách sắp 6 nam và 6 nữ thành 1 hàng dọc mà 6 nam đứng gần nhau ?

Có bao nhiêu cách sắp 7 nam và 6 nữ thành 1 hàng dọc mà 7 nam đứng gần nhau và 6 nữ đứng gần nhau ?



**Đáp án.** $7! \times 6!$ $\quad 6! \times 6! + 6! \times 6!$ $\quad 6! \times 7 \times 6!$ $\quad 2! \times 7! \times 6!$

**Ví dụ.**(tự làm) Cho $S = \{1, 2, \ldots, 9, 10\}$.

a) Có bao nhiêu tập hợp con ?

b) Có bao nhiêu tập hợp con mà mỗi tập có đúng 5 phần tử ?

c) Có bao nhiêu tập hợp con mà mỗi tập có không quá 4 phần tử ?

**Đáp án.** a) $2^{10}$ b) $C_{10}^5$ c) $C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^3 + C_{10}^4$

**Ví dụ.**(tự làm) Từ 9 nam và 11 nữ, ta muốn chọn ra một đội văn nghệ gồm 10 người sao cho số nam và số nữ trong đội chênh lệch nhau không quá 2. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn đội?

**Đáp án.** $C_9^4 \times C_{11}^6 + C_9^5 \times C_{11}^5 + C_9^6 \times C_{11}^4$

**Ví dụ.**(tự làm) Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ và $8$, ta có thể tạo ra

- Bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau?
- Bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau trong đó có chữ số 5?

**Đáp án.** $A_8^4$ $\qquad A_8^3 - A_7^3$

**Ví dụ.**(tự làm) Có 3 luật sư, 4 bác sĩ và 5 kỹ sư xếp thành một hàng dọc sao cho các đồng nghiệp phải đứng cạnh nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp? Nếu yêu cầu thêm các luật sư không đứng ở đầu hàng thì có tất cả bao nhiêu cách xếp ?

**Đáp án.** $3! \times 3! \times 4! \times 5!$ $\qquad 2 \times 2! \times 3! \times 4! \times 5!$

# 1.3. Tổ hợp lặp

1. Hoán vị lặp
2. Chỉnh hợp lặp
3. Tổ hợp lặp
4. Khai triển lũy thừa của đa thức

**Ví dụ.** Có bao nhiêu chuỗi kí tự khác nhau bằng cách sắp xếp các chữ cái của từ AAABB?

**Đáp án.** 10

**Ví dụ.** Có thể nhận được bao nhiêu chuỗi kí tự khác khác nhau bằng cách sắp xếp lại các chữ cái của từ SUCCESS?



**Giải.** Chuỗi SUCCESS này chứa 3 chữ S, 2 chữ C, 1 chữ U và 1 chữ E. Để xác định số chuỗi khác nhau có thể tạo ra được ta nhận thấy có

- $C_7^3$ cách chọn 3 chỗ cho 3 chữ S, còn lại 4 chỗ trống.
- Có $C_4^2$ cách chọn 2 chỗ cho 2 chữ C, còn lại 2 chỗ trống.
- Có thể đặt chữ U bằng $C_2^1$ cách và $C_1^1$ cách đặt chữ E vào chuỗi.



Theo nguyên lý nhân, số các chuỗi khác nhau có thể tạo được là:

$$C_7^3 \times C_4^2 \times C_2^1 \times C_1^1 = \frac{7!}{4! \times 3!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{2!}{1! \times 1!} \times \frac{1!}{1! \times 0!}$$
$$= \frac{7!}{3! \times 2! \times 1! \times 1!} = 420.$$

**Định nghĩa.** Cho $n$ đối tượng trong đó có $n_i$ đối tượng loại $i$ $(1 < i \leq k)$ giống hệt nhau, nghĩa là



$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n.$$

Mỗi cách sắp xếp có thứ tự $n$ đối tượng đã cho gọi là ***một hoán vị lặp*** của $n$.



**Định lý.** *Số hoán vị lặp của $n$ trong trường hợp trên là*

$$\frac{\mathbf{n}!}{\mathbf{n_1}! \times \mathbf{n_2}! \times \cdots \times \mathbf{n_k}!}$$

**Chứng minh.** Để xác định số hoán vị trước tiên chúng ta nhận thấy

- Có $C_n^{n_1}$ cách giữ $n_1$ chỗ cho $n_1$ phần tử loại 1, còn lại $n - n_1$ chỗ trống.
- Sau đó có $C_{n-n_1}^{n_2}$ cách đặt $n_2$ phần tử loại 2 vào hoán vị, còn lại n$-n_1 - n_2$ chỗ trống.
- Tiếp tục đặt các phần tử loại 3, loại 4,. . . , loại $k - 1$ vào chỗ trống trong hoán vị.
- Cuối cùng có $C_{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}^{n_k}$ cách đặt $n_k$ phần tử loại $k$ vào hoán vị.



Theo nguyên lý nhân tất cả các hoán vị có thể là:

$$C_n^{n_1} \times C_{n-n_1}^{n_2} \times \cdots \times C_{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_k!}.$$



**Ví dụ.** Có bao nhiêu chuỗi kí tự khác nhau bằng cách sắp xếp các chữ cái của từ ATAHATAT?

**Giải.** Trong từ ATAHATAT có 4 chữ A, 3 chữ T và 1 chữ H. Do đó số chuỗi có được là

$$\frac{8!}{4! \times 3! \times 1!} = 280$$

**Ví dụ.**(tự làm) Từ các chữ số 1, 2, 3 lập được bao nhiêu số tự nhiên có đúng 5 chữ số 1, 2 chữ số 2 và 3 chữ số 3.



**Hướng dẫn.** Số tự nhiên đó có 10 chữ số, trong đó có đúng 5 chữ số 1, 2 chữ số 2 và 3 chữ số 3. Do đó ta sẽ lập được

$$\frac{10!}{5! \times 2! \times 3!} = 2520 \text{ số}$$

# 1.3.2. Chỉnh hợp lặp

**Ví dụ.** Từ bảng chữ cái tiếng Anh, có thể lặp được bao nhiêu chuỗi có độ dài 5?

**Đáp án.** $26^5$

**Định nghĩa.** Cho $A$ là tập hợp gồm $n$ phần tử. ***Chỉnh hợp lặp*** chập $k$ của $n$ phần tử là một bộ sắp thứ tự $k$ phần tử của $A$, các phần tử có thể lấy lặp lại.



**Định lý.** *Số chỉnh hợp lặp chập $k$ của $n$ phần tử là $n^k$.*



**Chứng minh.** Giả sử $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Mỗi chỉnh hợp lặp chặp $k$ của $n$ là bộ thứ tự gồm $k$ phần tử $x_1x_2\ldots x_k$. Ta có, mỗi $x_i$ có $n$ cách chọn. Áp dụng nguyên lý nhân, ta có số chỉnh hợp lặp chặp $k$ của $n$ là $\boldsymbol{n^k}$.

# 1.3.3. Tổ hợp lặp

**Ví dụ.** Có 3 loại nón A, B, C. An mua 2 cái nón. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn?

**Đáp án.** An có 6 cách chọn là AA, AB, AC, BB, BC, CC.

**Định nghĩa.** Mỗi cách chọn ra $k$ vật từ $n$ loại vật khác nhau (trong đó mỗi loại vật có thể được chọn lại nhiều lần) được gọi là ***tổ hợp lặp*** chập $k$ của $n$. Số các tổ hợp lặp chập $k$ của $n$ được ký hiệu là $\boldsymbol{K_n^k}$

**Định lý.** *Số các tổ hợp lặp chập $k$ của $n$ là* $\boldsymbol{K_n^k = C_{n+k-1}^k}$.



**Chứng minh.** Mỗi tổ hợp lặp chập $k$ từ tập $n$ phần tử có thể biểu diễn bằng một dãy $n-1$ thanh đứng "|" và $k$ ngôi sao "$*$". Ta dùng $n-1$ thanh đứng để phân cách các ngăn.

Ngăn thứ $i$ chứa thêm một ngôi sao mỗi lần khi phần tử thứ $i$ của tập xuất hiện trong tổ hợp. Chẳng hạn, tổ hợp lặp chập 6 của 4 phần tử được biểu thị bởi:

$$* \ * \mid * \mid \mid * \ * \ *$$

mô tả tổ hợp chứa đúng 2 phần tử thứ nhất, 1 phần tử thứ hai, không có phần tử thứ 3 và 3 phần tử thứ tư của tập hợp. Mỗi dãy $n-1$ thanh và $k$ ngôi sao ứng với chuỗi có độ dài $n+k-1$. Do đó số các dãy $n-1$ thanh đứng và $k$ ngôi sao chính là số tổ hợp chập $k$ từ tập $n+k-1$ phần tử. Đó là điều cần chứng minh. ∎

**Hệ quả.** *Số nghiệm nguyên không âm* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(x_i \in \mathbb{Z}, x_i \geq 0)$ *của phương trình*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$$

*là* $K_n^k = C_{n+k-1}^k$.

**Ví dụ.** Tìm số nhiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10.$$

**Giải.** Số nghiệm nguyên không âm của phương trình là: $K_3^{10} = C_{12}^{10}$.

**Ví dụ.** Tìm số nghiệm nguyên của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \qquad (*)$$

thỏa điều kiện $x_1 \geq 4; x_2 > 2; x_3 > 5; x_4 \geq -2$

**Giải.** Ta viết điều kiện đã cho thành



$$x_1 \geq 4; x_2 \geq 3; x_3 \geq 6; x_4 \geq -2.$$

Đặt

$$y_1 = x_1 - 4;\ y_2 = x_2 - 3;\ y_3 = x_3 - 6;\ y_4 = x_4 + 2.$$

Khi đó $y_i \geq 0 \ \ (1 \leq i \leq 4)$. Phương trình $(*)$ trở thành



$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 9 \qquad (**)$$

Ta có số nghiệm của phương trình $(*)$ bằng số nghiệm của phương trình $(**)$. Do đó số nghiệm của phương trình $(*)$ là $K_4^9 = C_{12}^9$.

**Ví dụ.** Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

thỏa điều kiện $x_1 \leq 3; x_2 \geq 2; x_3 > 4. \quad (*)$

**Giải.** Ta viết điều kiện đã cho thành

$$0 \leq x_1 \leq 3; x_2 \geq 2; x_3 \geq 5; x_4 \geq 0.$$



Xét các điều kiện sau:

- $x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 2;\ x_3 \geq 5;\ x_4 \geq 0 \qquad (**)$
- $x_1 > 3;\ x_2 \geq 2;\ x_3 \geq 5;\ x_4 \geq 0 \qquad (***)$



Gọi $p, q, r$ lần lượt là các số nghiệm nguyên không âm của phương trình thỏa các điều kiện $(*), (**), (***)$. Ta có $\boldsymbol{p = q - r}$.

Trước hết ta tìm $q$. Đặt

$$y_1 = x_1; y_2 = x_2 - 2; y_3 = x_3 - 5; y_4 = x_4$$

Phương trình (1) trở thành

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 13 \qquad (2)$$

Số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện (**) bằng số nghiệm nguyên không âm của phương trình (2)



Số nghiệm đó là $K_4^{13} = C_{4+13-1}^{13} = C_{16}^{13}$. Vậy $q = C_{16}^{13}$.

Lý luận tương tự ta có $r = K_4^9 = C_{4+9-1}^9 = C_{12}^9$. Như vậy

$$p = q - r = C_{16}^{13} - C_{12}^{9} = 560 - 220 = 340.$$



Vậy số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện $(*)$ là 340.

**Hệ quả.** *Số cách chia $k$ vật đồng chất nhau vào $n$ hộp phân biệt cũng chính bằng số tổ hợp lặp chập $k$ của $n$.*

**Ví dụ.**(tự làm) Tìm số cách chia 15 viên bi giống nhau cho 4 đứa trẻ.

**Đáp án.** $K_4^{15} = C_{18}^{15}$.

**Ví dụ.** Tìm số nghiêm nguyên không âm của bất phương trình sau:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 11.$$

**Giải.** Đặt $x_4 = 11 - (x_1 + x_2 + x_3)$. Khi đó $x_4 \geq 0$ và bất phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$$

với $x_1, x_2, x_3, x_4$ là các số nguyên không âm. Do đó số nghiệm của bất phương trình là: $K_4^{11} = C_{14}^{11} = 364$.

**Ví dụ.**(tự làm) Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình

$$x + y + z \leq 20,$$

biết $x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3$.

**Ví dụ.**(tự làm) Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $x + y + z \leq 15$ thỏa điều kiện $2 \leq x \leq 6, y \geq 2, z \geq 3$.

**Ví dụ.**(tự làm) Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x + y + z + t = 16$ thỏa điều kiện $2 \leq x \leq 5, y \geq 1, z \geq 2, t \geq 3$.

**Ví dụ.**(tự làm) Có bao nhiêu cách chia 18 viên bi giống nhau cho 4 đứa trẻ sao cho mỗi đứa trẻ đều có bi và đứa lớn nhất được ít nhất 6 viên bi.

# 1.3.3. Khai triển lũy thừa của đa thức

**Định lý.** *Cho $x$, $y$ là biến và $n$ là số tự nhiên. Khi đó*

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k \\ &= C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \cdots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + C_n^n y^n.\end{aligned}$$



**Chứng minh.** Ta có

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\ldots(x+y).$$



Các số hạng trong khai triển của $(x+y)^n$ sẽ có dạng $x^{n-k}y^k$ với $k = 0, 1, \ldots, n$. Để nhận được số hạng $x^{n-k}y^k$ ta chọn $x$ từ $n-k$ tổng $(x+y)$ và có $C_n^{n-k}$ cách chọn như vậy, khi đó $y$ được chọn từ $k$ tổng còn lại (chỉ có một cách duy nhất). Đó đó hệ số của $x^{n-k}y^k$ là $C_n^{n-k}$ ∎

**Hệ quả.** *Lần lượt cho $x = y = 1$ và $x = 1, y = -1$ vào khai triển trên ta có*

(i) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$

(ii) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$

**Ví dụ.** Khai triển $(x+y)^4$



**Giải.**
$$(x+y)^4 = \sum_{k=0}^{4} C_4^k x^{4-k} y^k$$
$$= C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3 y + C_4^2 x^2 y^2 + C_4^3 x y^3 + C_4^4 y^4.$$
$$= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4.$$



**Ví dụ.**(tự làm) Khai triển $(2x - 3y)^5$

**Ví dụ.** Tìm hệ số của $x^{12}y^{13}$ trong khai triển $(2x-3y)^{25}$?

**Giải.** Dựa vào Định lý, ta có

$$\Big[2x+(-3y)\Big]^{25} = \sum_{k=0}^{25} C_{25}^{k}(2x)^{25-k}(-3y)^{k}.$$

Do đó hệ số của $x^{12}y^{13}$ có được khi $k=13$. Suy ra hệ số cần tìm là:



$$C_{25}^{13}\,2^{12}(-3)^{13} = -33959763545702400.$$

**Định lý.** *Cho $x_1, x_2, \ldots, x_m$ là các biến và $n$ là số nguyên dương. Khi đó*



$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_m!} x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_m^{k_m}$$

**Ví dụ.** Tìm hệ số của $x^3y^5z$ trong khai triển $(x+2y-3z+t)^9$

**Giải.** Áp dụng Định lý trên, ta có số hạng chứa $x^3y^5z$ là

$$\frac{9!}{3!\,5!\,1!\,0!}x^3(2y)^5(-3z)^1t^0 = -48384\,x^3y^5z.$$

Vậy hệ số của $x^3y^5z$ là $-48384$.

**Ví dụ.**(tự làm) Cho khai triển của $(-x+y-2z+t)^{10}$

a) Tìm hệ số của $x^5y^4t$.

b) Có bao nhiêu số hạng khác nhau trong phép khai triển trên?



**Hướng dẫn.** b) Mỗi số hạng có dạng $Mx^ay^bz^ct^d$. Suy ra các số hạng khác nhau của khai triển là số nghiệm của phương trình



$$a+b+c+d=10,$$

với $a,b,c,d$ là các số nguyên không âm.

**Đáp án.** $K_4^{10} = C_{13}^{10}$.