Chương 2

PHƯƠNG PHÁP ĐẾM DÙNG HÀM SINH

lvluyen@hcmus.edu.vn

http://luyen.pe.hu/cautrucroirac

FB: fb.com/cautrucroirac

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

Nội dung

Chương 2. PHƯƠNG PHÁP ĐẾM DÙNG HÀM SINH

1. Định nghĩa
2. Hệ số hàm sinh
3. Sự phân hoạch
4. Hàm sinh mũ
5. Phương pháp tổng
6. Hệ thức đệ quy

2.1. Định nghĩa hàm sinh

Định nghĩa. Cho $\{a_r\}_{r\geq 0}$ là một dãy các số thực. Khi đó chuỗi lũy thừa hình thức

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_rx^r + \cdots = \sum_{r\geq 0} a_rx^r$$

được gọi là ***hàm sinh*** của dãy $\{a_r\}_{r\geq 0}$.

Ví dụ. Hàm sinh của dãy 1, 1, 1, 1, 1, 1 là

$$G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

Ví dụ. Xét tập hợp X với n phần tử, gọi a_r là số tập con có r phần tử của X. Khi đó $a_r = \binom{n}{r}$ với $\binom{n}{r}$ là tổ hợp chập r của n phần tử

Ta được hàm sinh của dãy số thực $\{a_r\}_{r\geq 0}$ là

$$G(x) = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n$$

Ví dụ. Tìm hàm sinh của dãy $\{a_r\}_{r\geq 0}$, với a_r là số cách để chọn r viên bi từ 3 viên bi màu xanh, 3 viên bi màu trắng, 3 viên bi màu đỏ, và 3 viên bi màu vàng.

Giải. Để tìm a_r, ta đưa bài toán về bài toán tìm số nghiệm nguyên của phương trình

$$\boldsymbol{e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r}$$

với $0 \leq e_i \leq 3$. Ở đây e_1, e_2, e_3, e_4 tương ứng là số viên bi màu xanh, trắng, đỏ và vàng.

Đề tìm hàm sinh của $\{a_r\}_{r\geq 0}$ ta xây dựng các nhân tử đa thức sao cho sau khi nhân các đa thức đó lại với nhau ta được tất cả các hạng tử có dạng $x^{e_1}x^{e_2}x^{e_3}x^{e_4}$, trong đó $0 \leq e_i \leq 3$ và $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r$.

Như vậy ta cần 4 nhân tử, và mỗi nhân tử bằng $\boldsymbol{1 + x + x^2 + x^3}$ bao gồm tất cả các lũy thừa nhỏ hơn hay bằng 3 của x. Ta được hàm sinh cần tìm là

$$\boldsymbol{(1 + x + x^2 + x^3)^4} = 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 31x^4 + 40x^5 + 44x^6 + \\ + 31x^8 + 40x^7 + 20x^9 + 10x^{10} + 4x^{11} + x^{12}.$$

Ví dụ. Tìm hàm sinh của $\{a_r\}_{r\geq 0}$, với a_r là số cách để chọn r quả từ 5 quả táo, 5 quả cam, 3 quả chanh, 3 quả ổi.

Giải. Tương tự như ví dụ trên, a_r chính là số nghiệm nguyên của phương trình

$$\boldsymbol{e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r}$$

với $0 \leq e_1, e_2 \leq 5$ và $0 \leq e_3, e_4 \leq 3$.

Để tìm hàm sinh ta xây dựng các nhân tử đa thức sao cho sau khi nhân các đa thức đó lại với nhau ta được tất cả các hạng tử có dạng $x^{e_1}x^{e_2}x^{e_3}x^{e_4}$.

- Đối với e_1 và e_2, nhân tử là $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$
- Đối với e_3 và e_4, nhân tử là $(1 + x + x^2 + x^3)$

Như vậy hàm sinh cần tìm là

$$\boldsymbol{(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^2(1 + x + x^2 + x^3)^2}.$$

Ví dụ. Tìm hàm sinh của $\{a_r\}_{r\geq 0}$, với a_r là số cách chia r đồng xu vào 5 hộp, với điều kiện: Số đồng xu ở hộp 1 và 2 là chẵn và không quá 10, và các hộp còn lại chứa 3 đến 5 đồng xu.

Giải. a_r là số số nghiệm nguyên của phương trình

$$\boldsymbol{e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = r}$$

với e_1, e_2 chẵn, $0 \leq e_1, e_2 \leq 10$ và $3 \leq e_3, e_4, e_5 \leq 5$.

Để tìm hàm sinh ta xây dựng các nhân tử đa thức sao cho sau khi nhân các đa thức đó lại với nhau ta được tất cả các hạng tử có dạng $x^{e_1}x^{e_2}x^{e_3}x^{e_4}x^{e_5}$.

- Đối với e_1 và e_2, nhân tử là $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10})$
- Đối với e_3, e_4 và e_5, nhân tử là $(x^3 + x^4 + x^5)$

Như vậy hàm sinh cần tìm là

$$\boldsymbol{(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10})^2(x^3 + x^4 + x^5)^3}.$$

2.2. Hệ số hàm sinh

Trong phần này chúng ra sẽ sử dụng các kỷ thuật đại số để tính toán các hệ số trong hàm sinh. Phương pháp chủ yếu là đưa một hàm sinh phức tạp về hàm sinh kiểu nhị thức hoặc tích của các hàm sinh kiểu nhị thức. Để làm điều đó chúng ta cần sử dụng những công thức sau:

(1) $\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$

(2) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$

(3) $(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{r} x^r + \cdots + \binom{n}{n} x^n$

(4) $(1-x^m)^n = 1 - \binom{n}{1} x^m + \binom{n}{2} x^{2m} + \cdots + (-1)^k \binom{n}{k} x^{km} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} x^{nm}$

(5) $\dfrac{1}{(1-x)^n} =$

$$1+\binom{1+n-1}{1}x+\binom{2+n-1}{2}x^2+\cdots+\binom{r+n-1}{r}x^r+\cdots$$

(6) Nếu $h(x) = f(x)g(x)$, với $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ và

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots, \text{ thì}$$

$$h(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots$$
$$+ (a_0b_r + a_1b_{r-1} + a_2b_{r-2} + \cdots + a_rb_0)x^r + \cdots$$

Như vậy hệ số của a_r trong $h(x)$ là

$$\boldsymbol{a_0b_r + a_1b_{r-1} + a_2b_{r-2} + \cdots + a_rb_0}$$

Ví dụ. Tìm hệ số của x^{16} trong $(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^5$?

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^5 &= [x^2(1 + x + x^2 + \cdots)]^5\\ &= x^{10}(1 + x + x^2 + \cdots)^5\\ &= x^{10}\frac{1}{(1-x)^5}\end{aligned}$$

Để tìm hệ số của x^{16} trong $(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^5$, ta tìm hệ số của x^6 trong $\dfrac{1}{(1-x)^5}$. Theo công thức (5) ta được hệ số của x^6 trong $\dfrac{1}{(1-x)^5}$ là $\binom{6+5-1}{6} = 210.$

Ví dụ. Tìm số cách lấy 15 đồng xu từ 20 người sao cho, trong 19 người đầu tiên ta có thể lấy ở mỗi người 0 đồng hoặc 1 đồng, và người thứ 20 ta có thể lấy 0 đồng, hoặc 1 đồng, hoặc 5 đồng?

Giải. Bài toán trên tương đương với bài toán tìm số nghiệm nguyên của phương trình

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 + \cdots + x_{20} = 15}$$

thỏa điều kiện $x_i = 0$ hoặc 1 với $i = 1, 2, \ldots, 19$ và $x_{20} = 0$ hoặc 1, hoặc 5. Ta có được hàm sinh cho bài toán trên là

$$\boldsymbol{(1+x)^{19}(1+x+x^5)} \qquad (*)$$

Như vậy bài toán trên tương đương với việc tìm hệ số của x^{15} trong $(*)$

Theo công thức khai triển (3) ta có

$$(1+x)^{19} = 1 + \binom{19}{1}x + \binom{19}{2}x^2 + \cdots + \binom{19}{19}x^{19}$$

Đặt $f(x) = (1+x)^{19}$ và $g(x) = 1 + x + x^5$. Gọi a_r là hệ số của x^r trong $f(x)$, và b_r là hệ số của x^r trong $g(x)$. Ta thấy $a_r = \binom{19}{r}$, và $b_0 = b_1 = b_5 = 1$, các b_i khác bằng 0.

Hệ số của x^{15} trong $h(x) = f(x)g(x)$ được tính bởi công thức (6) là,

$$\boldsymbol{a_0 b_{15} + a_1 b_{14} + \cdots + a_{15} b_0}.$$

Thu gọn ta được

$$a_{10}b_5 + a_{14}b_1 + a_{15}b_0 = \binom{19}{10} \times 1 + \binom{19}{14} \times 1 + \binom{19}{15} \times 1 = 107882$$

Ví dụ. Có bao nhiêu cách chia 25 viên bi vào 7 hộp với điều kiện hộp thứ nhất có không quá 10 viên, các hộp còn lại thì tùy ý.

Giải. Hàm sinh của dãy $\{a_r\}_{r\geq 0}$ với a_r là số cách chia r viên bi vào 7 hộp với điều kiện như đề bài là:

$$\boldsymbol{(1+x+\ldots+x^{10})(1+x+x^2+\ldots+)^6}$$

$$=\left(\frac{1-x^{11}}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right)^6$$

$$=(1-x^{11})\left(\frac{1}{1-x}\right)^7$$

cuu duong than cong . com

Theo công thức (5) ta có

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^7=1+\binom{1+7-1}{1}x+\cdots+\binom{r+7-1}{r}x^r+\cdots$$

Đặt $f(x) = 1 - x^{11}$ và $g(x) = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)^7$. Gọi a_r là hệ số của x^r trong $f(x)$, và b_r là hệ số của x^r trong $g(x)$. Ta thấy $a_0 = 1, a_{11} = -1, a_i = 0$ với $i \neq 0, 11$ và $b_r = \binom{r+7-1}{r}$.

Hệ số của x^{25} trong $h(x) = f(x)g(x)$ được tính bởi (6) là,

$$\boldsymbol{a_0 b_{25} + a_1 b_{24} + \cdots + a_{25} b_0}.$$

Thu gọn ta được

$$a_0 b_{25} + a_{11} b_{14} = 1 \times \binom{25+7-1}{25} + (-1) \times \binom{14+7-1}{14} = 697521.$$

Ví dụ.(tự làm) Có bao nhiêu cách chọn 25 nón từ 6 loại nón, với điều kiện mỗi loại nón phải được chọn từ 2 đến 6 cái.

Ví dụ. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

Giải. Ta có $\binom{2n}{n}$ là hệ số của x^n trong $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$.

Đặt $f(x) = (1+x)^n, g(x) = (1+x)^n$ và a_r, b_r lần lượt là hệ số của x^r trong $f(x)$ và $g(x)$. Ta có $a_r = b_r = \binom{n}{r}$. Áp dụng công thức (6), ta có hệ số x^n trong $f(x)g(x)$ là

$$\begin{aligned}
&a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0 \\
&= \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{0} \\
&= \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2.
\end{aligned}$$

2.3. Phân hoạch

Định nghĩa. Cho số nguyên dương n. Khi đó dãy $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ được gọi là một ***phân hoạch*** của n nếu $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq n$ và $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$.

Ví dụ. Số nguyên dương 5 có 7 phân hoạch là $(1,1,1,1,1)$, $(2,1,1,1)$, $(3,1,1)$, $(2,2,1)$, $(4,1)$, $(3,2)$, và (5), trong đó (5) được gọi là một ***phân hoạch tầm thường***.

Ví dụ.(tự làm) Liệt kê tất cả các phân hoạch của 6.

Bây giờ chúng ta sẽ xây dựng một hàm sinh cho $\{a_r\}_{r\geq 0}$, với a_r là số lượng các phân hoạch của số nguyên r.

Ta có một phân hoạch của số nguyên r được mô tả bằng số lượng các số 1, 2,... sao cho khi lấy tổng lại với nhau ta được r.

Gọi e_k là số các số nguyên k xuất hiện trong phân hoạch, ta có

$$\mathbf{1e_1 + 2e_2 + 3e_3 + \cdots + ke_k + \cdots + re_r = r}$$

Như vậy số phân hoạch của r là số các nghiệm nguyên không âm của phương trình trên. Ta sẽ xây dựng các nhân tử đa thức sao cho sau khi nhân các đa thức đó lại với nhau, ta được tất cả các hạng tử có dạng $x^{e_1}x^{2e_2}x^{3e_3}\ldots x^{ke_3}\ldots$

- Đối với e_1 nhân tử là $(1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots)$
- Đối với $2e_2$ nhân tử là $(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots)$

  ....
- Đối với ke_2 nhân tử là $(1 + x^k + x^{2k} + \cdots + x^{kn} + \cdots)$

  ....

Như vậy hàm sinh hàm sinh cần tìm là

$$g(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots) \times (1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots) \times \\ \cdots \times (1 + x^k + x^{2k} + \cdots + x^{kn} + \cdots) \times \cdots$$

Ta có $$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^n + \cdots.$$

Do đó $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^k)\ldots}$

Ví dụ. Tìm hàm sinh cho $\{a_r\}_{r\geq 0}$, với a_r là số cách biểu diễn r như tổng của các số nguyên khác nhau.

Giải. Tương tự như trên ta cũng gọi e_k là số các số nguyên k xuất hiện trong phân hoạch của r, ta có

$$\boldsymbol{1e_1 + 2e_2 + 3e_3 + \cdots + ke_k + \cdots + re_r = r}.$$

Do yêu cầu của bài toán các e_i chỉ nhận giá trị là 0 hoặc 1. Ta được hàm sinh của a_r là

$$g(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$$

Ví dụ.(tự làm) Tìm hàm sinh cho $\{a_r\}_{r\geq 0}$, với a_r là số cách chọn các đồng xu 1 đồng, 2 đồng, 5 đồng để được tổng là r đồng.

Ví dụ. Dùng hàm sinh để chỉ ra rằng mọi số nguyên dương được biểu diễn duy nhất dưới dạng tổng các lũy thừa khác nhau của 2.

Giải. Gọi a_r là số cách biểu diễn số nguyên dương r thành tổng các lũy thừa khác nhau của 2. Như vậy a_r chính là nghiệm của phương trình

$$e_0 + 2e_1 + 4e_2 + 8e_3 + \cdots + 2^k e_k + \cdots = r$$

với $e_1 = 0$ hoặc 1.

Khi đó hàm sinh của dãy $\{a_r\}_{r>0}$ là

$$g(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2k})\ldots$$

Để chỉ ra rằng mọi số nguyên dương r được biểu diễn duy nhất dưới dạng tổng các lũy thừa khác nhau của 2, ta chỉ cần chỉ ra hệ số x^r trong $g(x)$ bằng 1. Nghĩa là

$$g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Điều nay tương đương với $(1-x)g(x) = 1$.

Ta có

$$\begin{aligned}(1-x)g(x) &= (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2k})\ldots \\ &= (1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2k})\ldots \\ &= (1-x^4)(1+x^4)\ldots(1+x^{2k})\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= 1.\end{aligned}$$

Ví dụ.(tự làm) Tìm hàm sinh cho $\{a_r\}_{r\geq 0}$, với a_r là số lượng các phân hoạch chỉ chứa các số lẻ của số nguyên r.

2.4. Hàm sinh mũ

Trong phần này chúng ta nói về hàm sinh mũ và sử dụng chúng để giải quyết các bài toán liên quan tới tổ hợp và tổ hợp lặp.

Ví dụ. Tìm số các chuỗi ký tự có 4 ký tự được tạo thành từ các chữ cái a, b, c, và chứa ít nhất hai chữ a?

Giải. Từ tập hợp các ký tự sau đây

$$\{a,a,a,a\},\{a,a,a,b\},\{a,a,a,c\},\{a,a,b,b\},\{a,a,b,c\},\{a,a,c,c\},$$

ta có thể sắp xếp để được các chuỗi cần tìm. Như vậy số chuỗi cần tìm là:

$$\frac{4!}{4!0!0!}+\frac{4!}{3!1!0!}+\frac{4!}{3!0!1!}+\frac{4!}{2!2!0!}+\frac{4!}{2!1!1!}+\frac{4!}{2!0!2!}$$

Gọi e_1, e_2, e_3 lần lượt là là số chữ a, b, c xuất hiện trong một chuỗi. Thoạt nhìn, bài toán của chúng ta sẽ tương đương với bài toán tìm số nghiệm nguyên của phương trình

$$e_1 + e_2 + e_3 = 4 \text{ với } e_1 \geq 2 \text{ và } e_2, e_3 \geq 0,$$

và chúng ta có thể dùng hàm sinh thông thường để giải. Sự ***khác biệt*** ở đây nằm ở chỗ ứng với ***mỗi nghiệm nguyên*** của phương trình trên ta được ***số lượng các chữ cái*** mỗi loại, và ứng với ***số lượng các chữ cái*** đó ta có thể sắp xếp để cho ra ***nhiều chuỗi khác nhau***. Nghĩa là ứng với ***một nghiệm nguyên*** của phương trình trên cho ta có $\frac{4!}{e_1!e_2!e_3!}$ chuỗi. Để giải quyết trường hợp này người ta đưa ra khái niệm ***hàm sinh mũ***.

Định nghĩa. Cho $\{a_r\}_{r\geq 0}$ là một dãy các số thực. Khi đó chuỗi lũy thừa hình thức

$$E(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots + a_r \frac{x^r}{r!} + \cdots = \sum_{r\geq 0} a_r \frac{x^r}{r!}$$

được gọi là ***hàm sinh mũ*** của dãy $\{a_r\}_{r\geq 0}$.

Ví dụ. Tìm hàm sinh mũ cho $\{a_r\}_{r\geq 0}$, với a_r là chỉnh hợp r của n phần tử.

Giải. Ta có $A_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, do đó hàm sinh mũ là

$$E(x) = 1 + x + \frac{n!}{(n-2)!}\frac{x^2}{2!} + \frac{n!}{(n-3)!}\frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{n!}{(n-r)!}\frac{x^r}{r!} + \cdots$$

Vì $\begin{pmatrix} r \\ n \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ nên ta có thể xem hàm sinh mũ này là hàm sinh thông thường sau

$$1 + x + \begin{pmatrix} 2 \\ n \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ n \end{pmatrix} x^3 + \cdots + \begin{pmatrix} r \\ n \end{pmatrix} x^r + \cdots$$

Ví dụ. Tìm hàm sinh mũ cho $\{a_r\}_{r\geq 0}$, với a_r là số cách sắp xếp có thứ tự r vật được chọn từ 4 loại vật khác nhau, sao cho mỗi loại vật xuất hiện ít nhất là 2 và không quá 5?

Giải. Gọi e_i là số vật loại i $(i = 1, 2, 3, 4)$ xuất hiện trong cách sắp xếp có thứ tự r vật. Ta có

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r \text{ và } 2 \leq e_i \leq 5.$$

Nhân tử đa thức ứng với mỗi loại vật là $\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$. Từ đó suy ra hàm sinh cần tìm là

$$\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right)^4.$$

Ví dụ.(tự làm) Tìm hàm sinh mũ cho $\{a_r\}_{r\geq 0}$ với a_r là số cách xếp r người vào trong 3 căn phòng khác nhau sao cho mỗi phòng có ít nhất một người?

Đáp án. Hàm sinh mũ cần tìm là

$$\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)^3.$$

Một số khai triển cơ bản của hàm sinh mũ

Ta có

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots \qquad (1)$$

Thay x bởi nx ta được

$$e^{nx} = 1 + nx + \frac{n^2x^2}{2!} + \frac{n^3x^3}{3!} + \cdots + \frac{n^rx^r}{r!} + \cdots . \qquad (2)$$

Từ (1) ta cũng suy ra được

$$\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = e^x - 1 - x$$

Ngoài ra, ta cũng có một số khai triển hữu ích thường gặp sau

- $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$
- $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$

Một số ứng dụng

Ví dụ. Tìm số cách sắp xếp có thứ tự r đối tượng được chọn ra từ n loại đối tượng khác nhau?

Giải. Gọi a_r là số cách sắp xếp như đề bài. Ta có hàm sinh $\{a_r\}_{r\geq 0}$ là

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^n = (e^x)^n = e^{nx}.$$

Theo công thức khai triển (2) ta được hệ số của $\dfrac{x^r}{r!}$ trong hàm sinh trên là n^r. Như vậy $\boldsymbol{a_r = n^r}$.

Ví dụ. Tìm số cách để chia 25 người vào trong 3 căn phòng khác nhau với ít nhất một người mỗi phòng?

Giải. Gọi a_r là số cách chia r người vào trong 3 căn phòng với ít nhất một người mỗi phòng. Khi đó hàm sinh mũ của $\{a_r\}_{r\geq 0}$ là

$$\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^3 = (e^x - 1)^3.$$

Để tìm hệ số của $x^r/r!$ ta khai triển biểu thức của $(e^x - 1)^3$, ta có

$$\boldsymbol{(e^x - 1)^3 = e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1}.$$

Áp dụng công thức $e^u = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}$, ta được

$$e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1 = \sum_{r=0}^{\infty} 3^r \frac{x^r}{r!} - 3\sum_{r=0}^{\infty} 2^r \frac{x^r}{r!} + 3\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} - 1.$$

Suy ra hệ số của $\frac{x^{25}}{25!}$ là $\boldsymbol{3^{25} - (3 \times 2^{25}) + 3}$.

Ví dụ.(tự làm) Có bao nhiêu chuỗi số có độ dài bằng r chỉ chứa các số $0, 1, 2, 3$ trong đó số chữ số 0 là chẵn và số chữ số 1 là lẻ.

2.5. Phương pháp tổng

Trong phần này ta chỉ ra cách xây dựng hàm sinh $h(x)$ mà hệ số của x^r là một hàm $p(r)$ theo biến r. Sau đó ta sử dụng hàm $h(x)$ trong việc tính tổng $p(0) + p(1) + \cdots + p(n)$ với mọi số nguyên dương n.

Chúng ta sử dụng một số luật sau đây để xây dựng hàm sinh mới từ các hàm sinh đã có. Giả sử

$$A(x) = \sum a_n x^n, \; B(x) = \sum b_n x^n, \; C(x) = \sum c_n x^n.$$

Ta có

(1) Nếu $b_n = da_n$, thì $B(x) = dA(x)$ với mọi hằng số d.

(2) Nếu $c_n = a_n + b_n$, thì $C(x) = A(x) + B(x)$.

(3) Nếu $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$, thì $C(x) = A(x)B(x)$.

(4) Nếu $b_n = a_{n-k}$, ngoại trừ $b_i = 0$ với $i < k$, thì $B(x) = x^k A(x)$.

Bài toán. Cho $g(x)$ là hàm sinh có hệ số a_r, hãy xây dựng một hàm sinh $g^*(x)$ có hệ số là ra_r.

Giải. Ta sẽ tiến hành lấy đạo hàm $g(x)$ và sau đó nhân với x, nghĩa là: $g^*(x) = x\left[\frac{d}{dx}g(x)\right]$. Cụ thể, nếu

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_rx^r + \cdots,$$

ta lấy đạo hàm của $g(x)$ ta được

$$\frac{d}{dx}g(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + ra_rx^{r-1} + \cdots.$$

Nhân hai vế cho x ta được

$$x\left[\frac{d}{dx}g(x)\right] = a_1x + 2a_2x^2 + 3a_3x^3 + \cdots + ra_rx^r + \cdots$$

Đây chính là hàm sinh có hệ số ra_r.

Ví dụ. Xây dựng một hàm sinh $h(x)$ với hệ số $a_r = 2r^2$.

Giải. Từ công thức $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, ta tiến hành các bước như bài toán trên, ta được

$$x\left[\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}\right] = 1x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + rx^r + \cdots ..$$

Ta có $x\left[\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}\right] = x\left[\frac{1}{(1-x)^2}\right] = \frac{x}{(1-x)^2}$. Như vậy

$$\frac{x}{(1-x)^2} = 1x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + rx^r + \cdots .$$

Ta lặp lại quá trình trên với $\frac{x}{(1-x)^2}$ ta được

$$x\left[\frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2}\right] = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = 1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots + r^2x^r + \cdots$$

Cuối cùng nhân 2 vào hai vế của phương trình trên ta được

$$h(x) = \frac{2x(1+x)}{(1-x)^3} = (2\times 1^2)x + (2\times 2^2)x^2 + \cdots + (2\times r^2)x^r + \cdots .$$

Ví dụ. Xây dựng một hàm sinh $h(x)$ với hệ số $a_r = (r+1)r(r-1)$.

Giải.

Cách 1. Ta có $(r+1)r(r-1) = r^3 - r$. Do đó ta có thể làm tương tự như Ví dụ trên, ta sẽ tìm một hàm sinh có hệ số r^3 và một hàm sinh có hệ số r và sau đó lấy hiệu của chúng.

Cách 2. Dựa vào công thức

$$\frac{1}{(1-x)^n} = 1 + \binom{1+n-1}{1} x + \cdots + \binom{r+n-1}{r} x^r + \cdots$$

Ta có

$$3!\frac{1}{(1-x)^4} = 3!\left[1 + \binom{1+4-1}{1} x + \binom{2+4-1}{r} x^2 + \cdots\right]$$

Hệ số a_r của khai triển trên là

$$a_r = 3!\binom{r+4-1}{r} = 3!\frac{(r+3)!}{r!3!} = (r+3)(r+2)(r+1).$$

Do đó

$$\frac{3!}{(1-x)^4} = (3 \times 2 \times 1) + (4 \times 3 \times 2)x + \cdots + (r+3)(r+2)(r+1)x^r + \cdots$$

Nhân hai vế cho x^2 ta được

$$\frac{3!x^2}{(1-x)^4} = (3 \times 2 \times 1)x^2 + (4 \times 3 \times 2)x^3 + \cdots + (r+1)r(r-1)x^r + \cdots$$

Vậy hàm sinh cần tìm là $h(x) = \dfrac{6x^2}{(1-x)^4}$.

Tổng quát. Hàm sinh $(n-1)!\dfrac{1}{(1-x)^n}$ có hệ số a_r là

$$a_r = (n-1)!\binom{r+n-1}{r} = [r+(n-1)] \times [r+(n-2)] \times \cdots \times [r+1]$$

Ví dụ.(tự làm) Xây dựng một hàm sinh với hệ số $a_r = 2r^2(r-1)$.

Định lý. *Nếu $h(x)$ là hàm sinh với a_r là hệ số của x^r, thì* $h^*(x) = \dfrac{h(x)}{1-x}$ *là hàm sinh với hệ số của x^r là $\sum_{i=0}^{r} a_i$, nghĩa là*

$$h^*(x) = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \cdots + \left(\sum_{i=0}^{r} a_i\right) x^r + \cdots.$$

Chứng minh. Định lý này suy ra từ công thức

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

và luật (3). ■

Ví dụ. Tính tổng $2 \times 1^2 + 2 \times 2^2 + 2 \times 3^2 + \cdots + 2n^2$.

Giải. Từ ví dụ trước, ta đã xây dựng được một hàm sinh $h(x)$ với hệ số $a_r = 2r^2$ là

$$h(x) = \frac{2x(1+x)}{(1-x)^3}$$

Theo định lý trên, tổng cần tìm $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ là hệ số của x^n trong

$$h^*(x) = \frac{h(x)}{(1-x)} = \frac{2x(1+x)}{(1-x)^4} = \frac{2x}{(1-x)^4} + \frac{2x^2}{(1-x)^4}.$$

Ta có

- Hệ số của x^n trong $\dfrac{2x}{(1-x)^4}$ là hệ số của x^{n-1} trong $\dfrac{2}{(1-x)^4}$
- Hệ số của x^n trong $\dfrac{2x^2}{(1-x)^4}$ là hệ số của x^{n-2} trong $\dfrac{2}{(1-x)^4}$.

Do đó tổng cần tìm bằng

$$2\binom{(n-1)+4-1}{(n-1)} + 2\binom{(n-2)+4-1}{(n-2)} = 2\binom{n+2}{3} + 2\binom{n+1}{3}.$$

Ví dụ. Tính tổng $3.2.1 + 4.3.2 + \cdots + (n+1)n(n-1)$.

Giải. Từ ví dụ trước, ta đã xây dựng được một hàm sinh $h(x)$ với hệ số $a_r = (r+1)r(r-1)$ là

$$h(x) = \frac{6x^2}{(1-x)^4}$$

Ta có tổng cần tìm $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ là hệ số của x^n trong

$$h^*(x) = \frac{h(x)}{(1-x)} = \frac{6x}{(1-x)^5}.$$

Hệ số của x^n trong $h^*(x)$ bằng với hệ số của x^{n-2} trong $6(1-x)^{-5}$, và bằng

$$6\binom{(n-2)+5-1}{n-2} = 6\binom{n+2}{4}.$$

2.6. Hệ thức đệ quy

Trong phần này, chúng ta sẽ trình bày một ứng dụng quan trọng của hàm sinh trong việc giải các bài toán đệ quy. Để tìm công thức tường minh a_n của một hệ thức đệ quy, ta gọi $G(x)$ là hàm sinh của dãy $\{a_n\}_{n\geq 0}$ và tiến hành các bước sau:

- Bước 1. Chuyển hệ thức đệ quy thành một phương trình của $G(x)$, thường được thực hiện bằng cách nhân cả hai vế của hệ thức đệ quy cho x^n, hay x^{n+1}, hay x^{n+k} với một k nào đó, và lấy tổng trên tất cả các số nguyên không âm n.
- Bước 2. Giải phương trình để tìm $G(x)$.
- Bước 3. Tìm hệ số của x^n trong $G(x)$, hệ số đó chính bằng a_n, và ta được một công thức tường minh cho a_n.

Ví dụ. Hãy sử dụng phương pháp hàm sinh để tìm nghiệm của hệ thức đệ quy $a_{n+1} = 3a_n$ với $a_0 = 2$.

Giải. Gọi $G(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ là hàm sinh của dãy $\{a_n\}_{n\geq 0}$. Ta nhân cả hai vế của hệ thức đệ quy với x^{n+1} và lấy tổng trên tất cả các số nguyên $n \geq 0$, ta được

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n\geq 0} 3a_n x^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n x^n - a_0 = 3x \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

Vì $a_0 = 2$ và $G(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ nên ta có

$$G(x) - 2 = 3xG(x) \Leftrightarrow G(x) = \frac{2}{1-3x}.$$

Áp dụng công thức $\dfrac{1}{1-u} = \sum_{n\geq 0} u^n$, ta được

$$G(x) = 2\sum_{n\geq 0}(3x)^n = \sum_{n\geq 0}(2\cdot 3^n)x^n.$$

Vậy $\boldsymbol{a_n = 2\cdot 3^n}$.

Ví dụ. Hãy sử dụng phương pháp hàm sinh để tìm nghiệm của hệ thức đệ quy $a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$ với $a_0 = 1$.

Giải. Gọi $G(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ là hàm sinh của dãy $\{a_n\}_{n\geq 0}$. Ta nhân cả hai vế của hệ thức đệ quy với x^n và lấy tổng trên tất cả các số nguyên $n \geq 1$, ta được

$$\sum_{n\geq 1} a_n x^n = \sum_{n\geq 1} 8a_{n-1}x^n + \sum_{n\geq 1} 10^{n-1}x^n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n x^n - a_0 = 8x\sum_{n\geq 0} a_n x^n + x\sum_{n\geq 0} 10^n x^n$$

Vì $a_0 = 1, G(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ và $\sum_{n\geq 0} 10^n x^n = \dfrac{1}{1-10x}$ nên ta có

$$G(x) - 1 = 8xG(x) + \frac{x}{1-10x}.$$

Ta giải ra được

$$G(x) = \frac{1-9x}{(1-8x)(1-10x)}.$$

Biến đổi $G(x)$ thành tổng các phân thức đơn giản, ta có

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-8x} + \frac{1}{1-10x}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{n\geq 0}(8x)^n + \sum_{n\geq 0}(10x)^n\right] \\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{2}\left(8^n + 10^n\right)x^n \end{aligned}$$

Vậy $a_n = \dfrac{1}{2}\left(8^n + 10^n\right)$.

Ví dụ.(tự làm) Hãy sử dụng phương pháp hàm sinh để tìm nghiệm của hệ thức đệ quy $a_n = a_{n-1} + n$ với $a_0 = 1$.

Ngoài ra, ở một số bài toán hệ thức đệ quy, ta có thể dùng hàm sinh mũ tìm công thức tường minh a_n. Ta gọi $E(x)$ là hàm sinh mũ của dãy $\{a_n\}$ và tiến hành các bước sau:

- **Bước 1.** Chuyển hệ thức đệ quy thành một phương trình của $E(x)$, thường được thực hiện bằng cách nhân cả hai vế của phương trình đệ quy cho $x^n/n!$, hay $x^{n+1}/(n+1)!$, hay $x^{n+k}/(n+k)!$ với một k nào đó, và lấy tổng trên tất cả các số nguyên không âm n.
- **Bước 2.** Giải phương trình để tìm $E(x)$.
- **Bước 3.** Tìm hệ số của $x^n/n!$ trong $G(x)$, hệ số đó chính bằng a_n, và ta được một công thức tường minh cho a_n.

Ví dụ. Tìm nghiệm của hệ thức đệ quy $a_{n+1} = (n+1)(a_n - n + 1)$ với $a_0 = 1$.

Giải. Gọi $E(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \dfrac{x^n}{n!}$ là hàm sinh mũ của dãy $\{a_n\}_{n\geq 0}$.

Ta nhân cả hai vế của hệ thức đệ quy với $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, và lấy tổng với mọi $n \geq 0$, ta được

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n!} - \sum_{n\geq 0}(n-1)\frac{x^{n+1}}{n!}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} - a_0 = x\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} - x\left[\sum_{n\geq 0} n\frac{x^n}{n!} - \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}\right] \qquad (*)$$

Vì

$$\sum_{n\geq 0} n\frac{x^n}{n!} = 0 + \sum_{n\geq 1} n\frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{(n-1)!} = x\sum_{n\geq 1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = x\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$$

nên từ $(*)$ ta có

$$\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} - a_0 = x\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} - x\left[x\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!} - \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}\right].$$

Vì $E(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \dfrac{x^n}{n!}$, $a_0 = 1$ và $e^x = \sum_{n\geq 0}\dfrac{x^n}{n!}$ nên

$$E(x) - 1 = xE(x) - x(xe^x - e^x)$$
$$\Leftrightarrow \quad (1-x)E(x) = (1-x)xe^x + 1$$

Suy ra

$$E(x) = \frac{1}{1-x} + xe^x = \sum_{n\geq 0} x^n + \sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{n!}$$
$$= \sum_{n\geq 0} n!\frac{x^n}{n!} + \sum_{n\geq 0}(n+1)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$= \sum_{n\geq 0} n!\frac{x^n}{n!} + \sum_{n\geq 1} n\frac{x^n}{n!}$$

Như vậy hệ số của $\frac{x^n}{n!}$ trong $E(x)$ là $n! + n$. Do đó $\boldsymbol{a_n = n! + n}$.

Ví dụ. Tìm nghiệm của hệ thức đệ quy $f_{n+1} = 2(n+1)f_n + (n+1)!$ với $f_0 = 0$.

Giải. Gọi $F(x) = \sum_{n\geq 0} f_n \frac{x^n}{n!}$ là hàm sinh mũ của dãy $\{f_n\}_{n\geq 0}$. Nhân cả hai vế của hệ thức trên với $x^{n+1}/(n+1)!$, và lấy tổng với mọi $n \geq 0$ ta được

$$\sum_{n\geq 0} f_{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 2x \sum_{n\geq 0} f_n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n\geq 0} x^{n+1}$$

Do $f_0 = 0$ nên vế trái bằng $F(x)$, hạng tử thứ nhất của vế phải bằng $2xF(x)$, và hạng tử thứ hai của vế phải bằng $x/(1-x)$. Do đó, ta có được

$$F(x) = 2xF(x) + \frac{x}{1-x}.$$

Suy ra,

$$F(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}.$$

Phân tích $F(x)$ thành tổng các phân thức đơn giản ta được

$$F(x) = \frac{-1}{1-x} + \frac{1}{1-2x}$$

Áp dụng công thức $\dfrac{1}{1-u} = \sum_{n\geq 0} u^n$, ta được

$$F(x) = -\sum_{n\geq 0} x^n + \sum_{n\geq 0} (2x)^n = -\sum_{n\geq 0} n!\frac{x^n}{n!} + \sum_{n\geq 0} 2^n n!\frac{x^n}{n!}.$$

Do đó hệ số của $x^n/n!$ trong $F(x)$ là

$$\boldsymbol{f_n = -n! + 2^n n! = (2^n - 1)n!}.$$