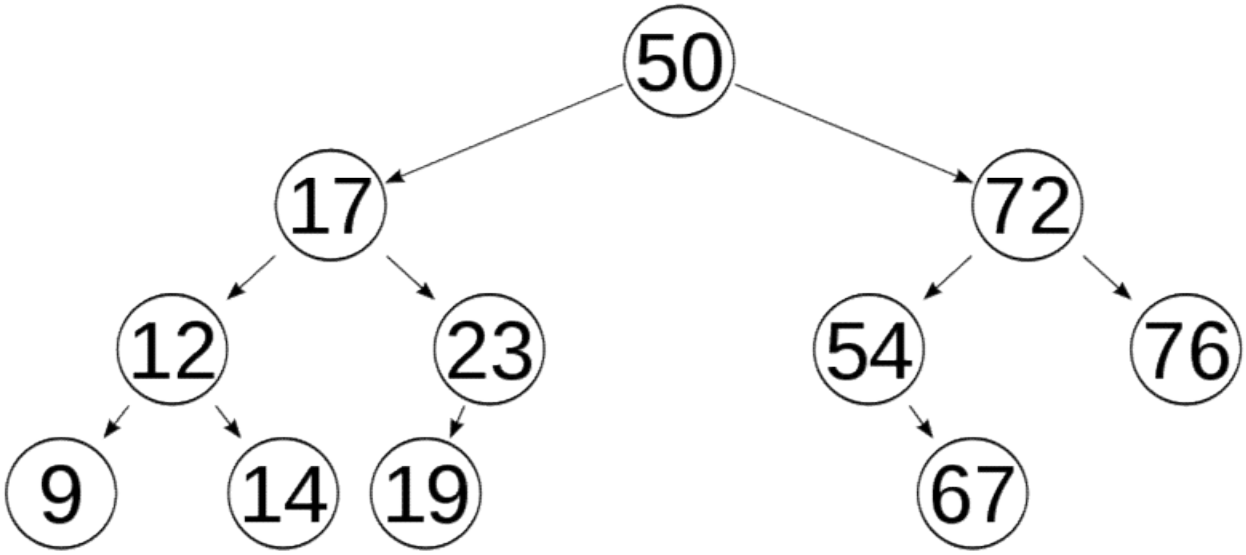
Cây nhị phân

- Các khái niệm và thuật ngữ cơ bản
- Cài đặt cấu trúc dữ liệu
- Duyệt cây
- Cây nhị phân tìm kiếm – Binary Search Tree
- Hàng đợi ưu tiên – Priority Queue

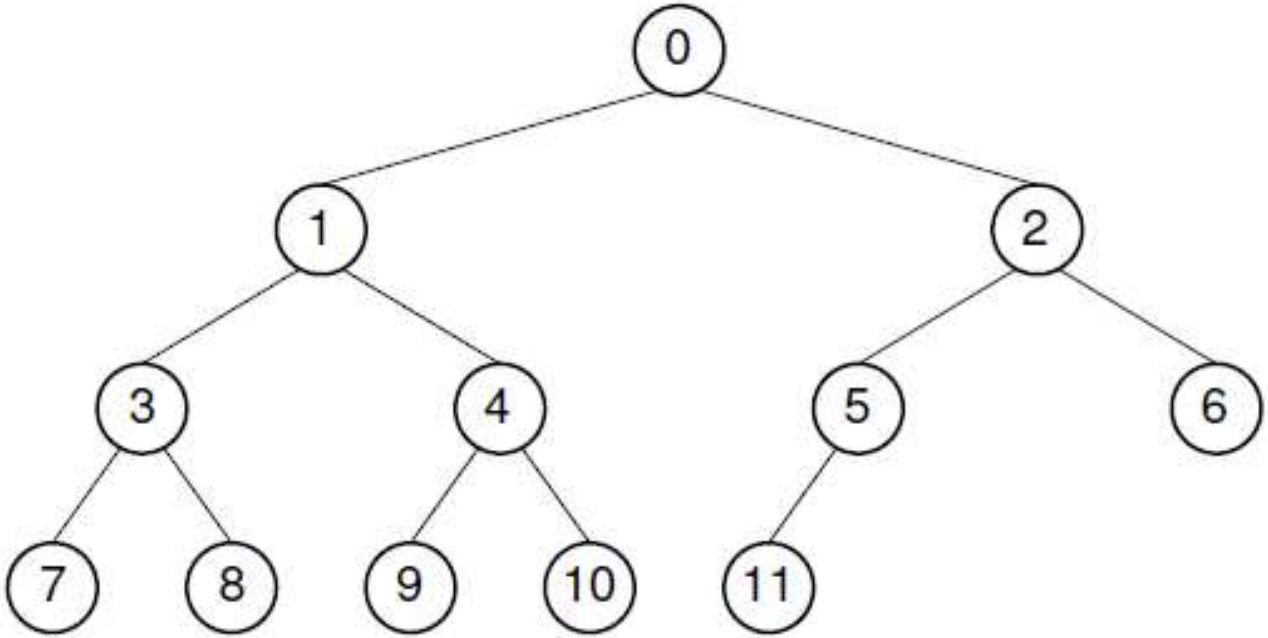
Cây nhị phân tìm kiếm (BST)

- Ý nghĩa của cây BST
- Binary Search Tree ADT
- Cài đặt cấu trúc dữ liệu BST
- Đánh giá/So sánh
- Bài tập



Ý nghĩa của cây BST (1)

- Tìm 1 phần tử trong cây nhị phân ?
  - Thuật toán ?
  - Chi phí ?



Ý nghĩa của cây BST (2)

- Điểm yếu và điểm mạnh của mảng ?
- Điểm yếu và điểm mạnh của danh sách liên kết ?
- Một cấu trúc dữ liệu có được cả điểm mạnh của mảng và danh sách liên kết ?

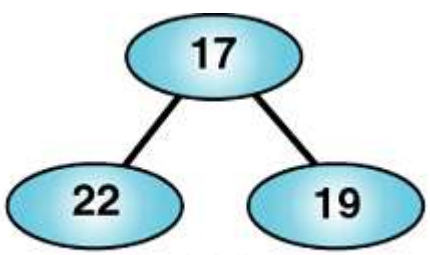
Binary Search Tree ADT (1)

- Cây nhị phân tìm kiếm là:
  - Một cây nhị phân
  - Mỗi node có một khóa (key)
  - Mỗi node p của cây đều thỏa:
    - Tất cả các node thuộc cây con trái đều có khóa nhỏ hơn khóa của p

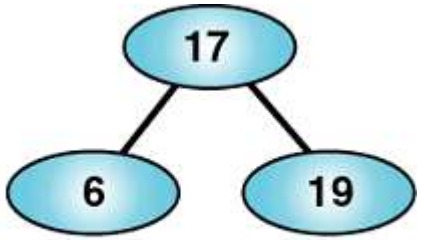
      $\forall q \in p\text{->left}: q\text{->key} < p\text{->key}$
    - Tất cả các node thuộc cây con phải đều có khóa lớn hơn khóa của p

      $\forall q \in p\text{->right}: q\text{->key} > p\text{->key}$

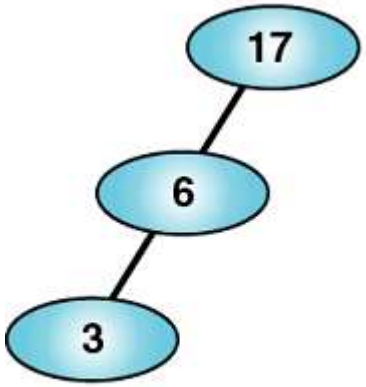
Binary Search Tree ADT (2)



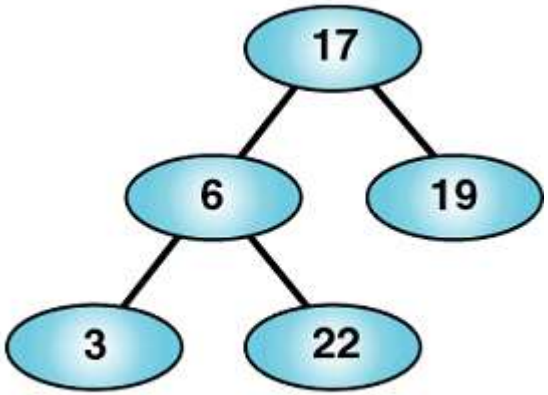
(a)



(b)

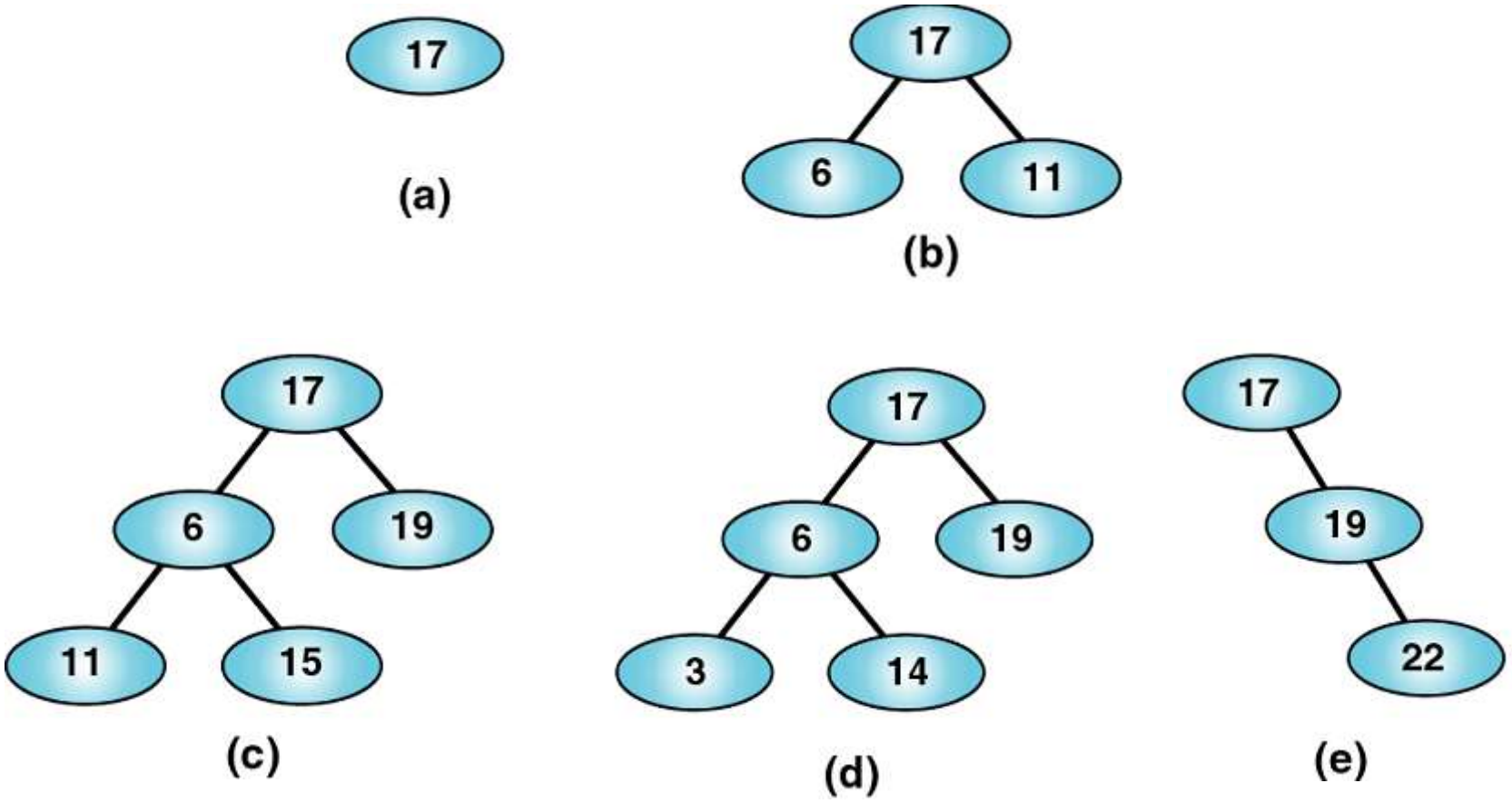


(c)



(d)

Binary Search Tree ADT (3)



Binary Search Tree ADT (4)

- Các thao tác cơ bản:
  - Khởi tạo cây rỗng
  - Xóa cây
  - Thêm một node
  - Xóa một node
  - Tìm một node
  - Duyệt cây
  - Kiểm tra cây rỗng
  - Đếm số node trong cây
  - Tính chiều cao của cây

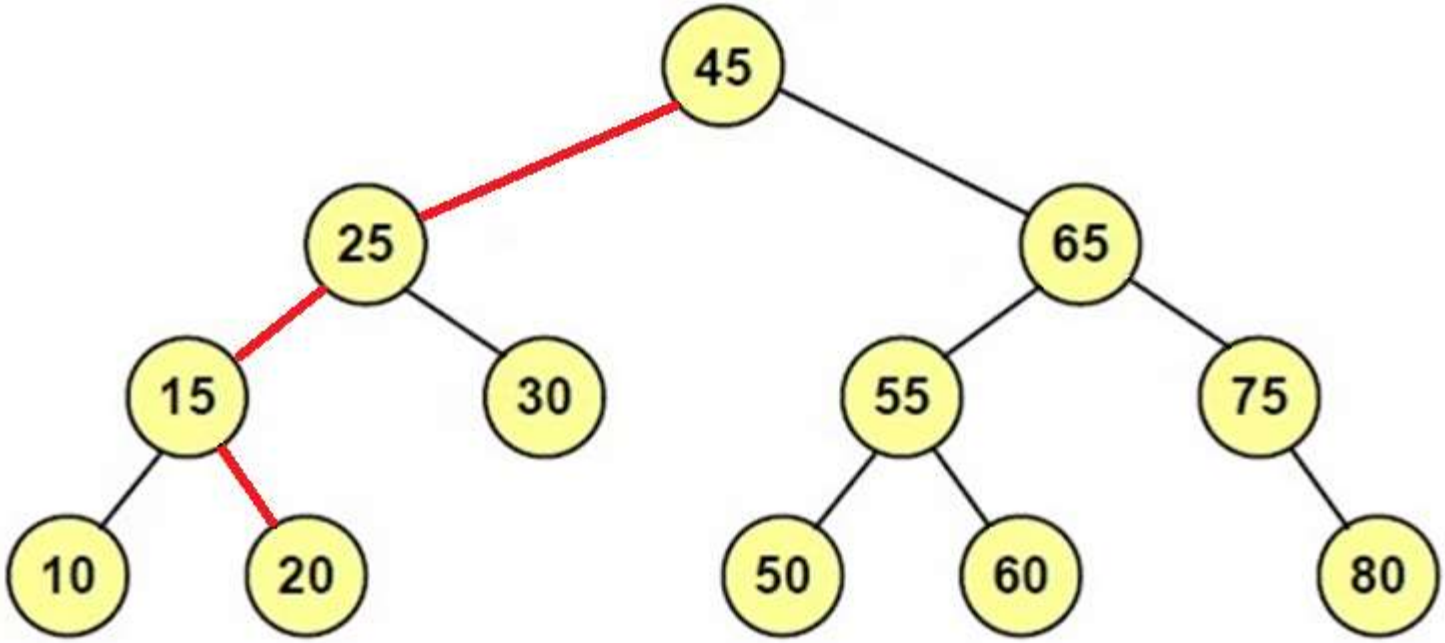
Cài đặt cấu trúc dữ liệu BST (1)

```
template <class T> class BSTNode {
   public:
        T               key;            // key of node
        BSTNode         *left;          // pointer to left child
        BSTNode         *right;         // pointer to right child

        BSTNode() {   }
        BSTNode(T newItem)
        {
                key = newItem;
                left = right = NULL;
        }
}; // end class
```

Cài đặt cấu trúc dữ liệu BST (2)

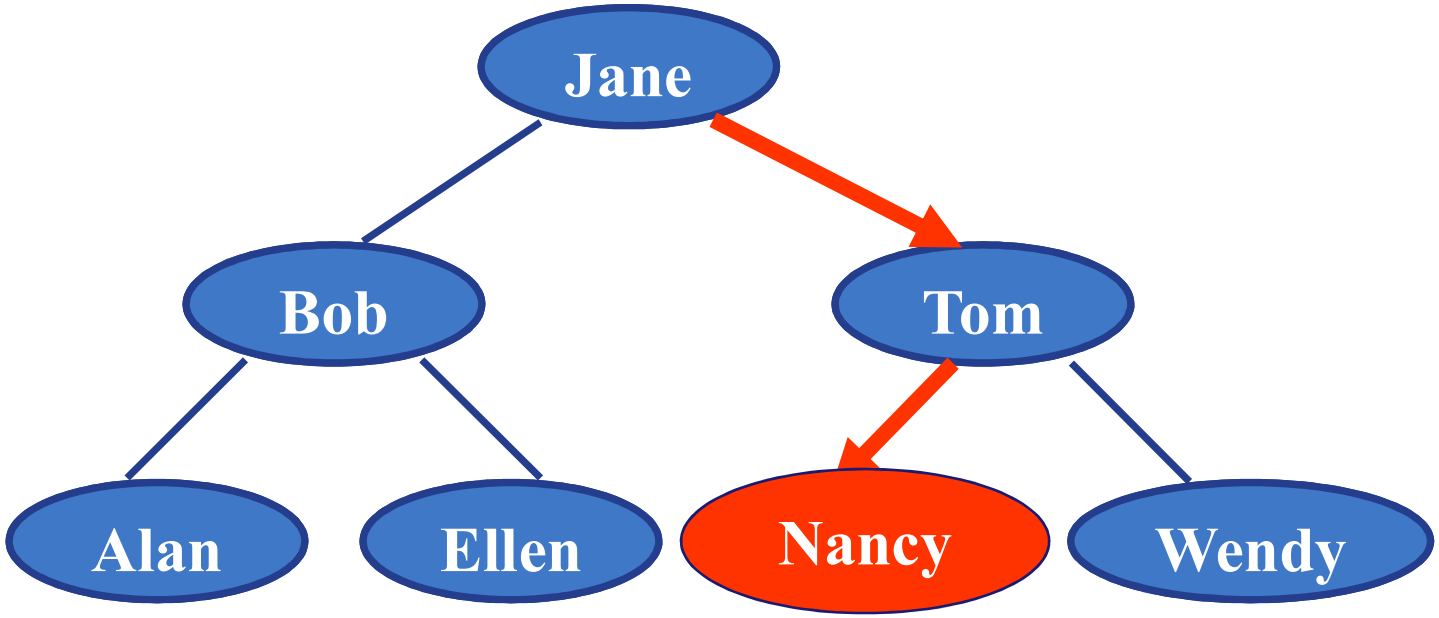
```
template <class T> class BINARY_SEARCH_TREE {
    private:
          BSTNode<T>          *root;              // pointer to root of tree

          bool      insertNode(BSTNode<T> *&p, T newItem);
          bool      removeNode(BSTNode<T> *&p, T key);
          int       countNode(BSTNode<T> *p);
          int       height(BSTNode<T> *p);
          void      LNR(BSTNode<T> *p);
          void      NLR(BSTNode<T> *p);
          void      LRN(BSTNode<T> *p);
   public:
          BINARY_SEARCH_TREE();                   // default constructor
          BINARY_SEARCH_TREE(const BINARY_SEARCH_TREE &aTree);// copy constructor
          ~BINARY_SEARCH_TREE();                  // destructor

          // operations
          bool      insert(T newItem);            // add new node with 'newItem'
          bool      remove(T key);                // find and remove node with 'key'
          BSTNode<T>*findNode(T key);             // find node with 'key'
          bool      isEmpty();
          int       countNode();                  // call countNode(root)
          int       height();                     // call height(root)
          void      preorder();                   // call NLR(root)
          void      inorder();                    // call LNR(root)
          void      postorder();                  // call LRN(root)
}; // end class
```

Tìm một node (1)



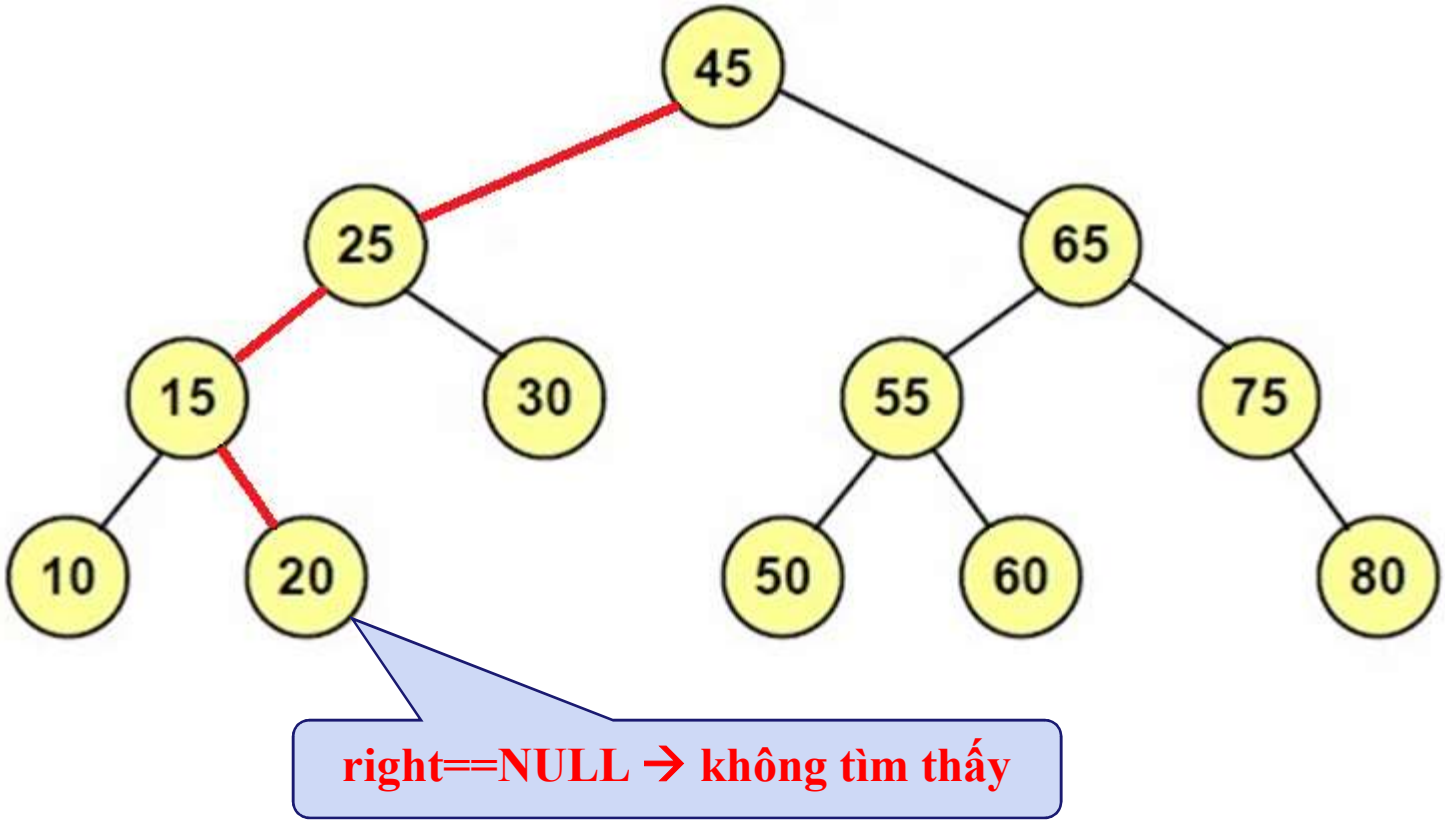
Tìm key = 20

Tìm một node (2)



Tìm key = “Nancy"

Tìm một node (3)



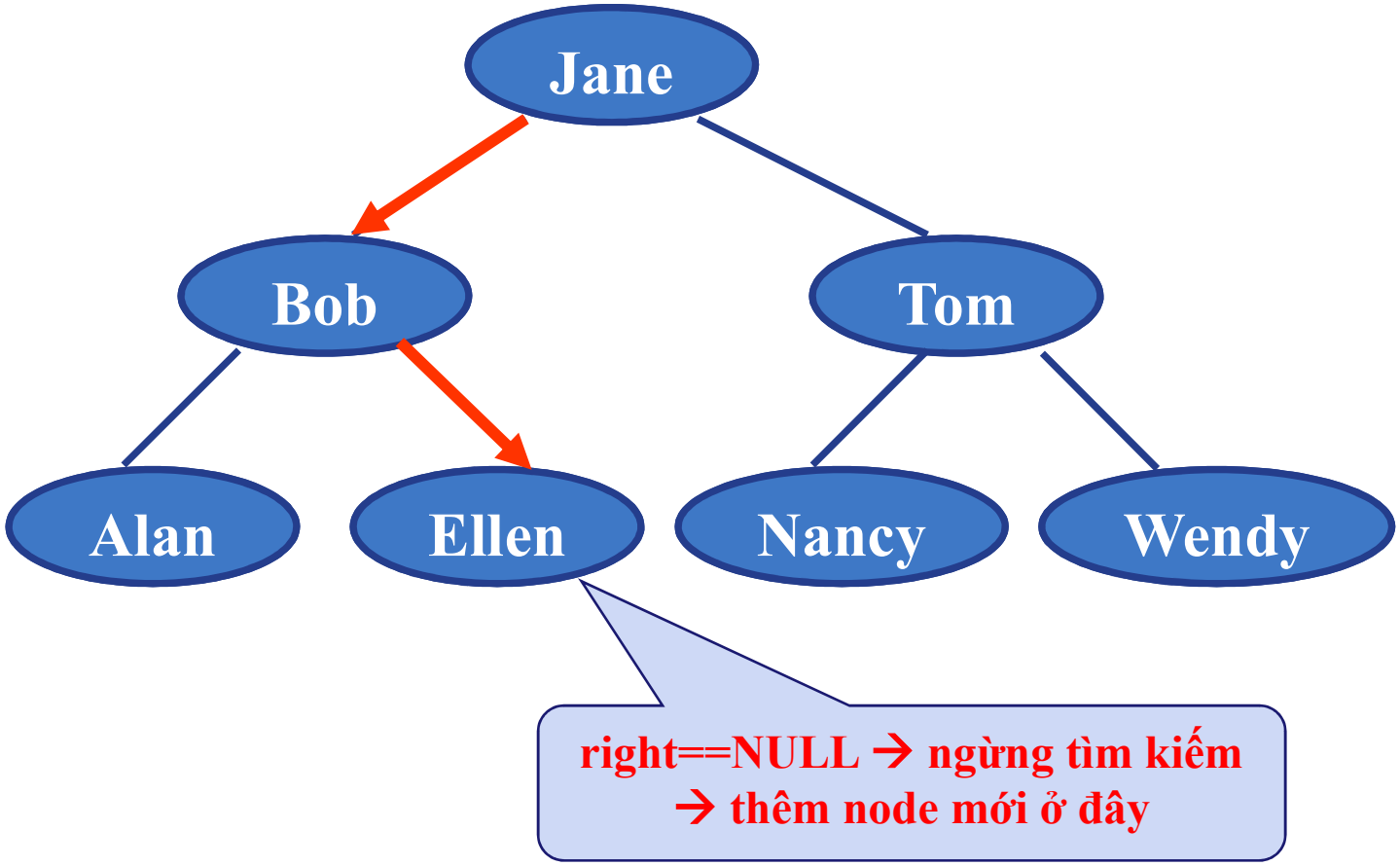
Tìm key = 21 → not found !

Tìm một node (4)

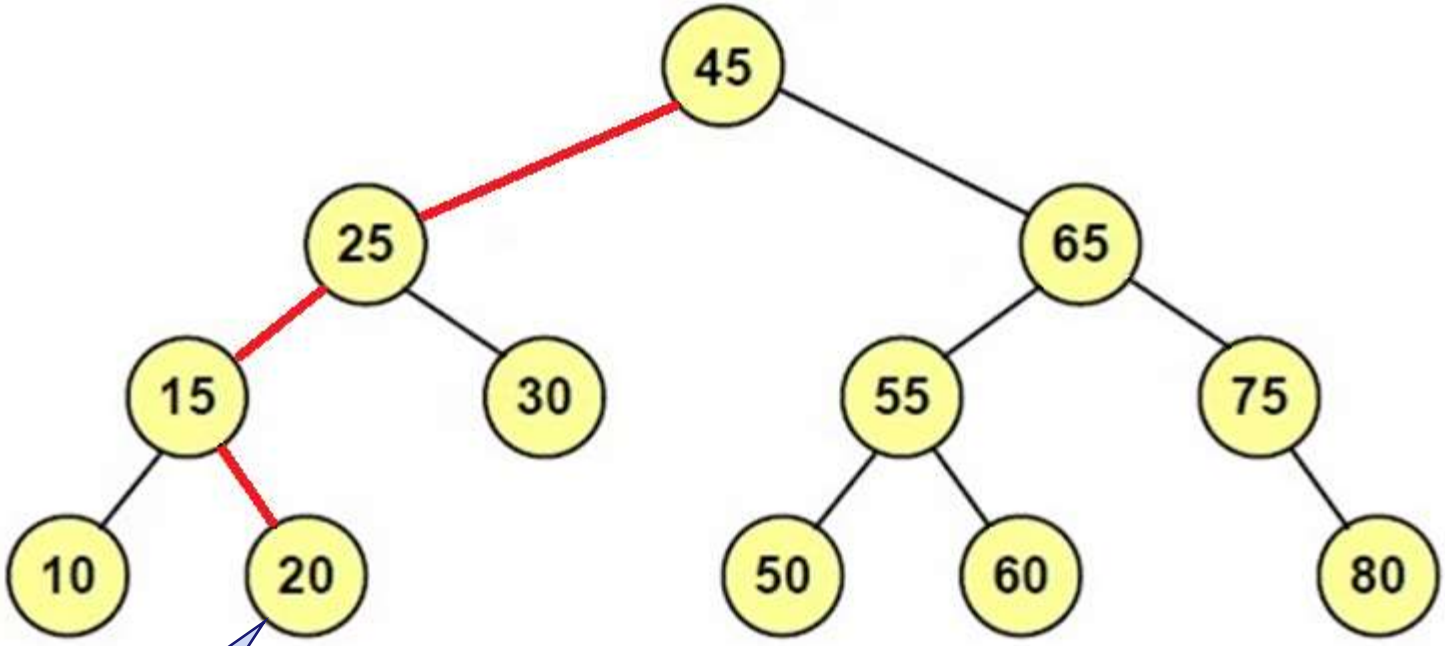
```
template <class T>
BSTNode<T>* BINARY_SEARCH_TREE<T>::findNode(T key)
{
   if (root==NULL) return NULL;
   BSTNode<T> *p = root;
   while (p) {
       if (p->key==key) return p; // Tìm thấy
       else if (p->key > key)
                p = p->left;          // Tìm nhánh trái
            else
                p = p->right;         // Tìm nhánh phải
   }
   return NULL;    // Không tìm thấy
}
```

Thêm một node (1)

Thêm key = "Frank"



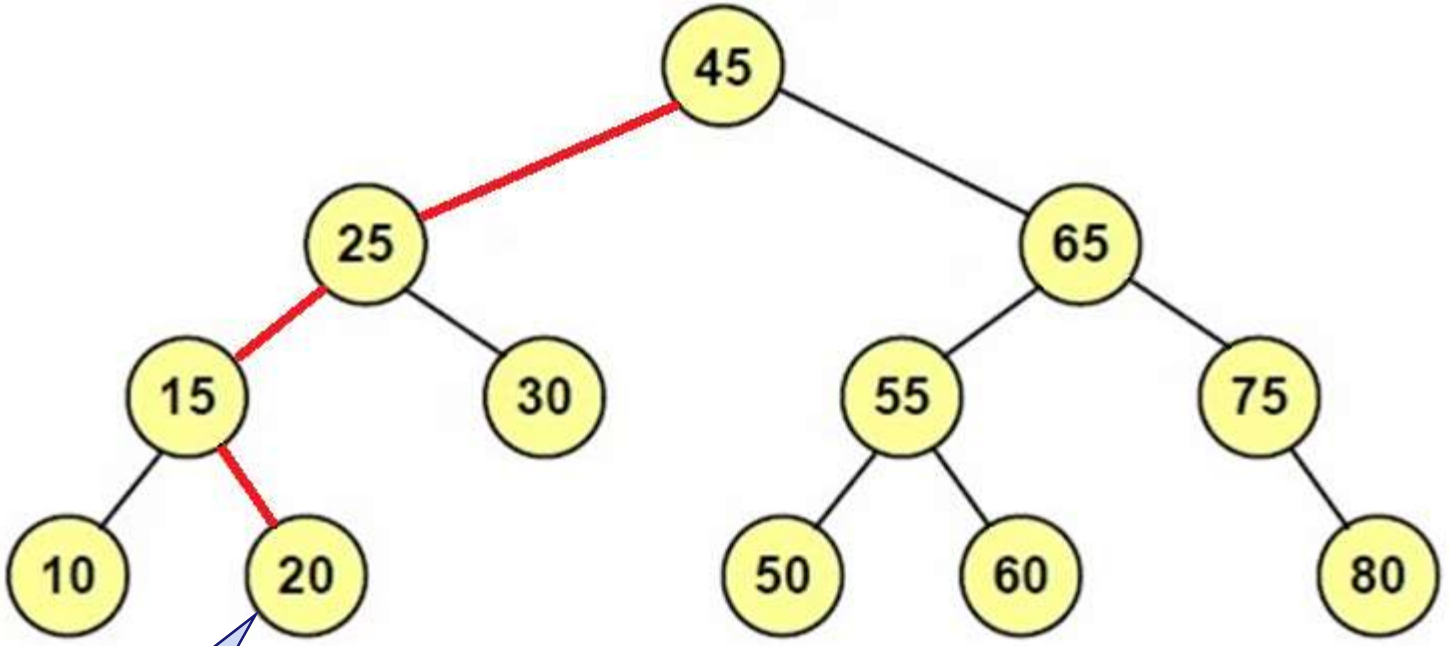
Thêm một node (2)



left==NULL → ngừng tìm kiếm → thêm node mới ở đây

Thêm key = 18

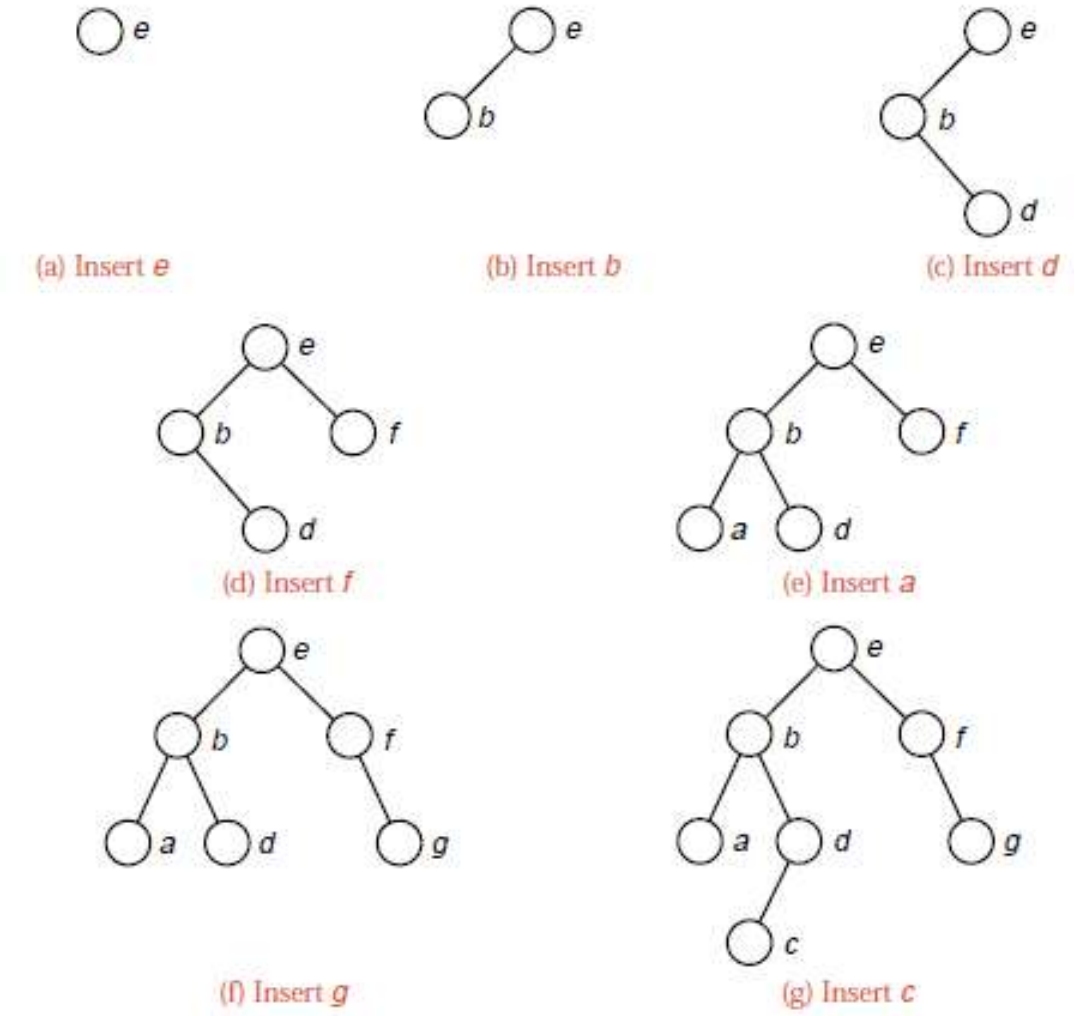
Thêm một node (3)



key đã tồn tại → không thêm nữa

Thêm key = 20

Thêm một node (4)

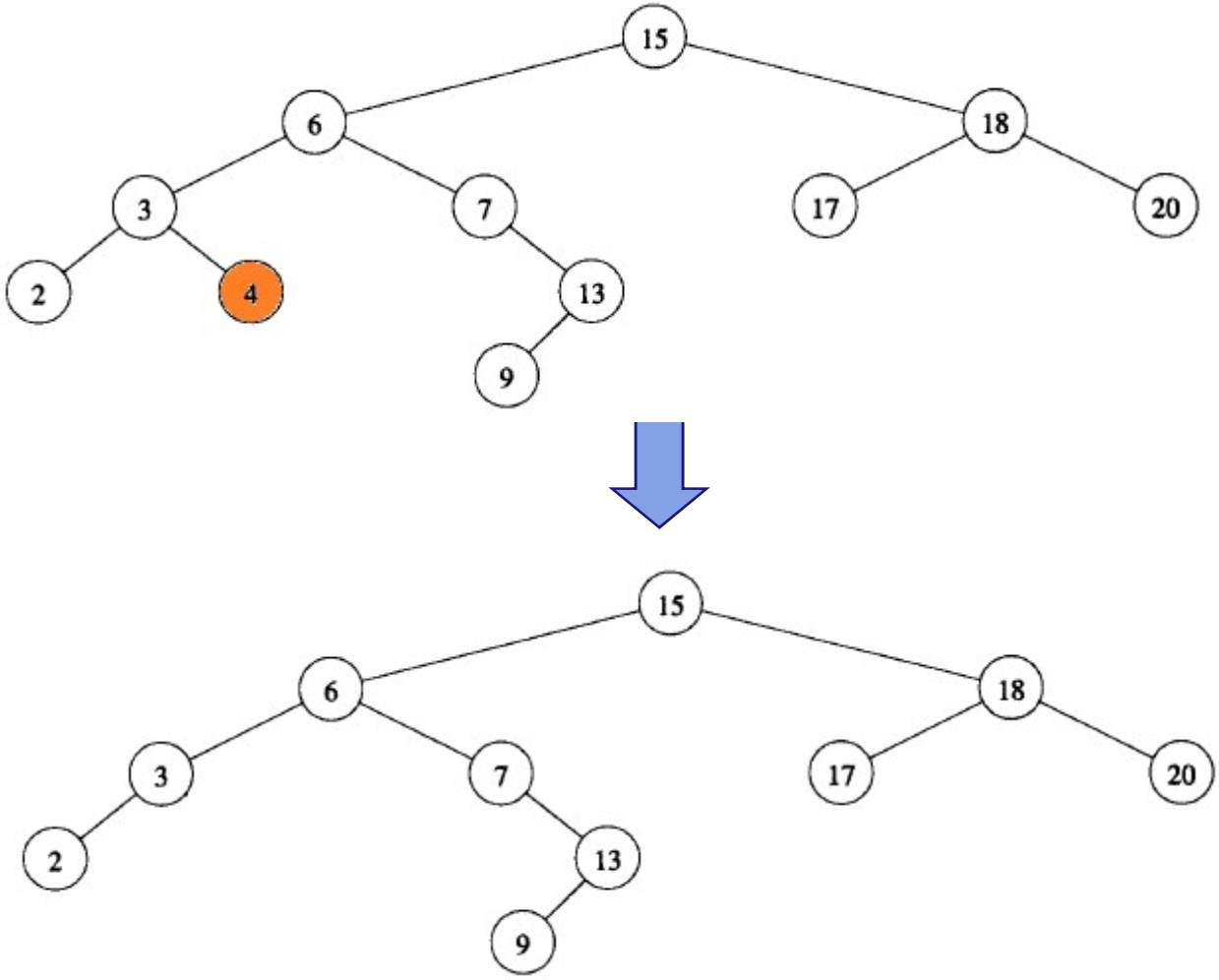


Thêm các key: e,b,d,f,a,g,c

Xóa một node (1)

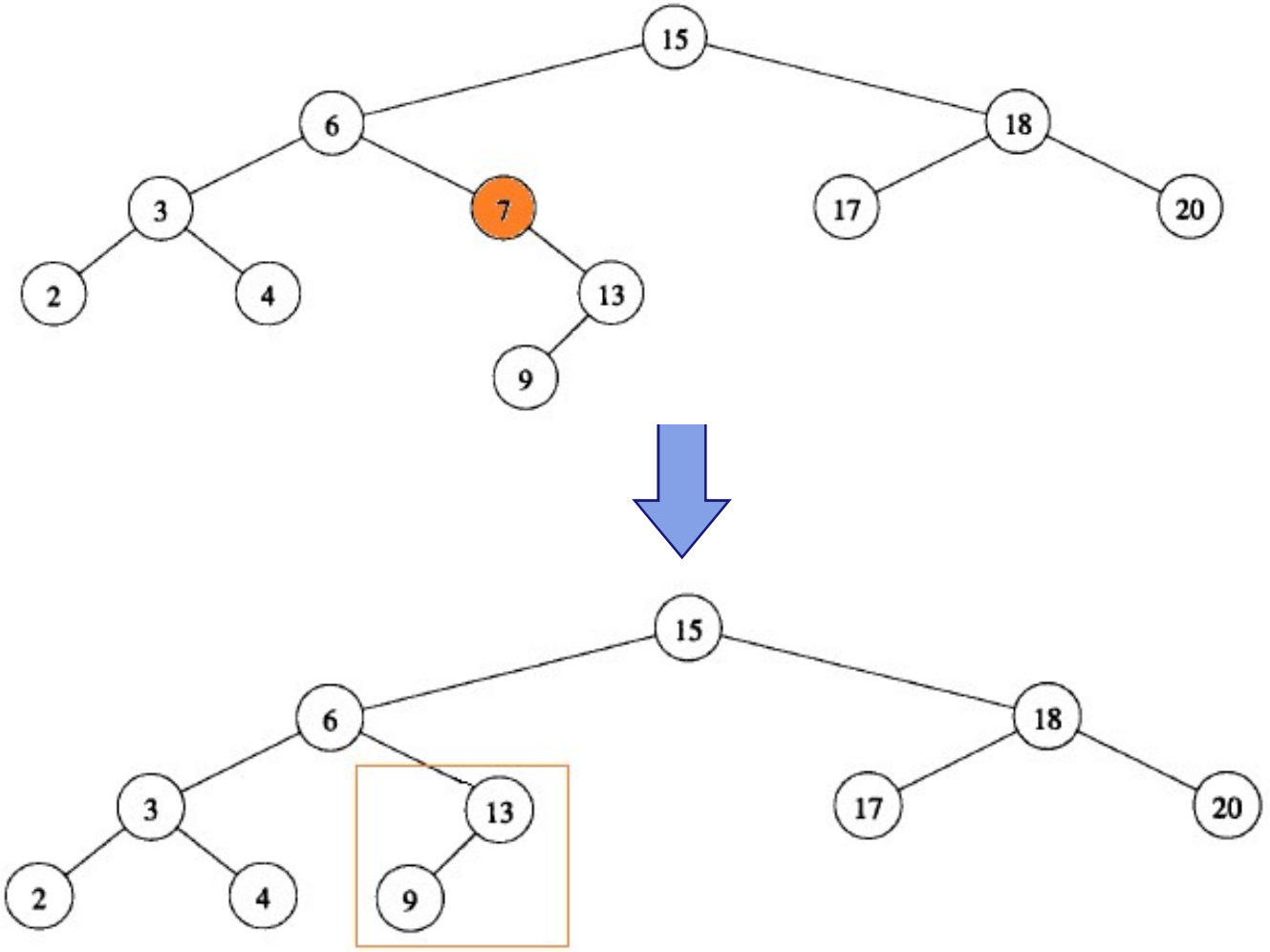
- Các trường hợp xảy ra:
  - Xóa node lá
  - Xóa node chỉ có 1 cây con
  - Xóa node có 2 cây con

Xóa một node (2)



Xóa key = 4 (node lá)

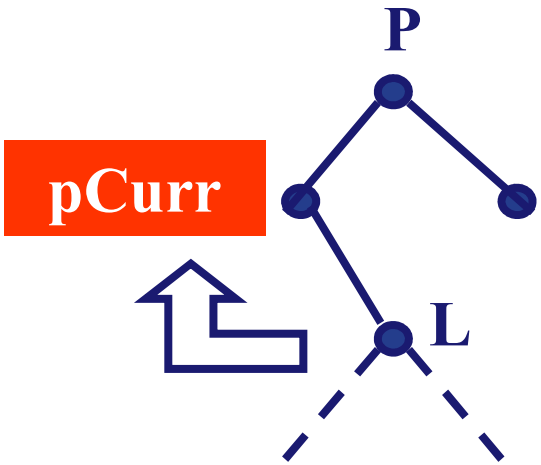
Xóa một node (3)



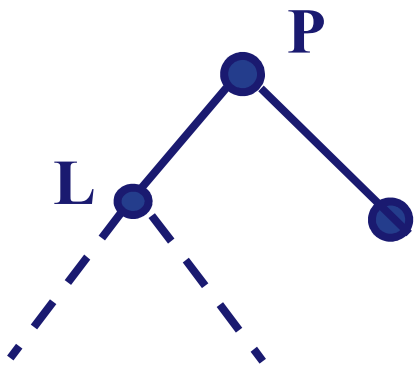
Xóa key = 7 (chỉ có 1 cây con phải)

Xóa một node (4)

- Xoá 1 node chỉ có cây con phải:



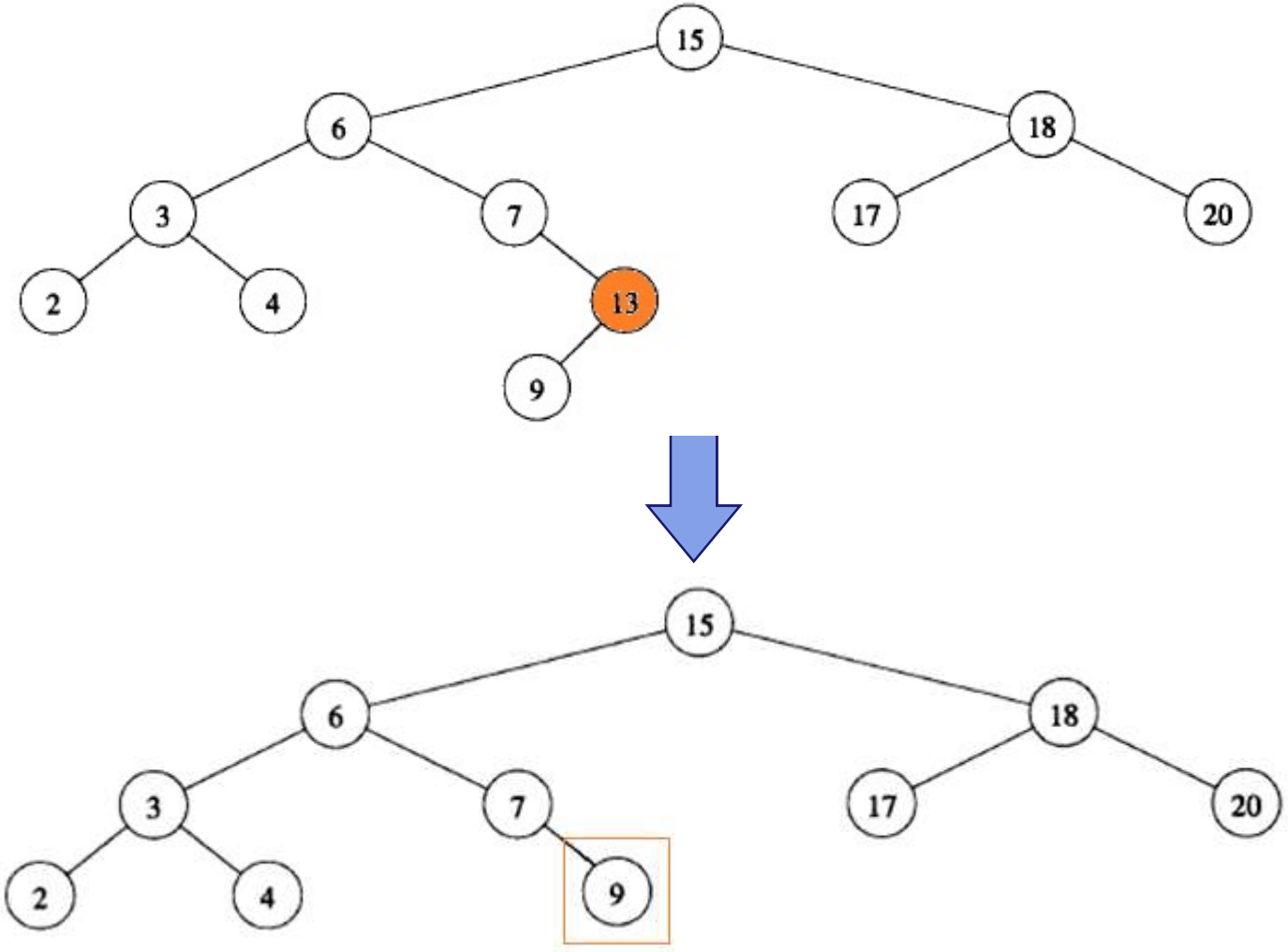
Trước khi xóa pCurr



Sau khi xóa pCurr

```
P->left = pCurr->right;
delete pCurr;
```

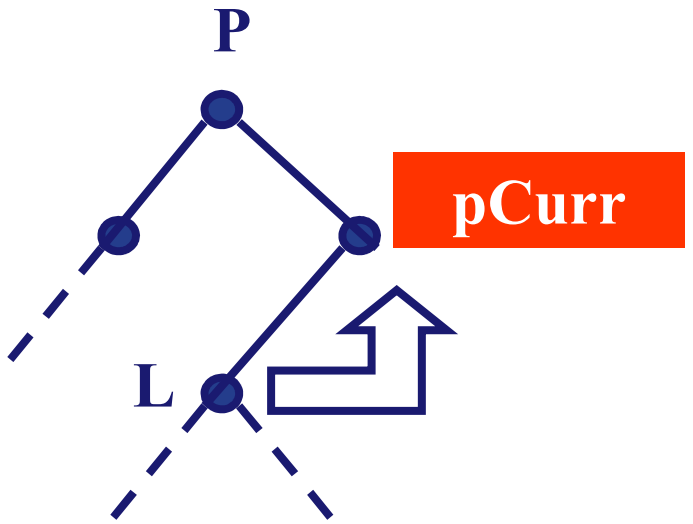
Xóa một node (5)



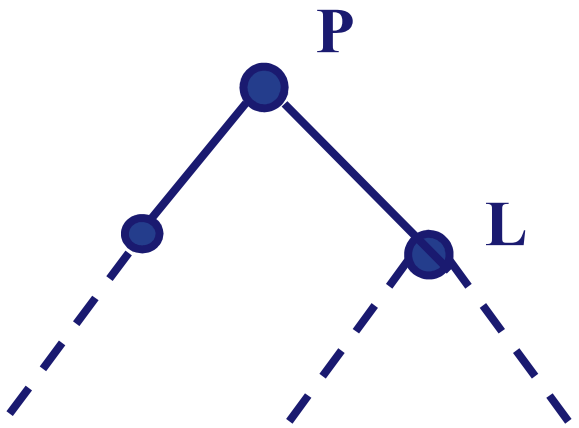
Xóa key = 13 (chỉ có 1 cây con trái)

Xóa một node (6)

- Xoá 1 node chỉ có cây con trái:



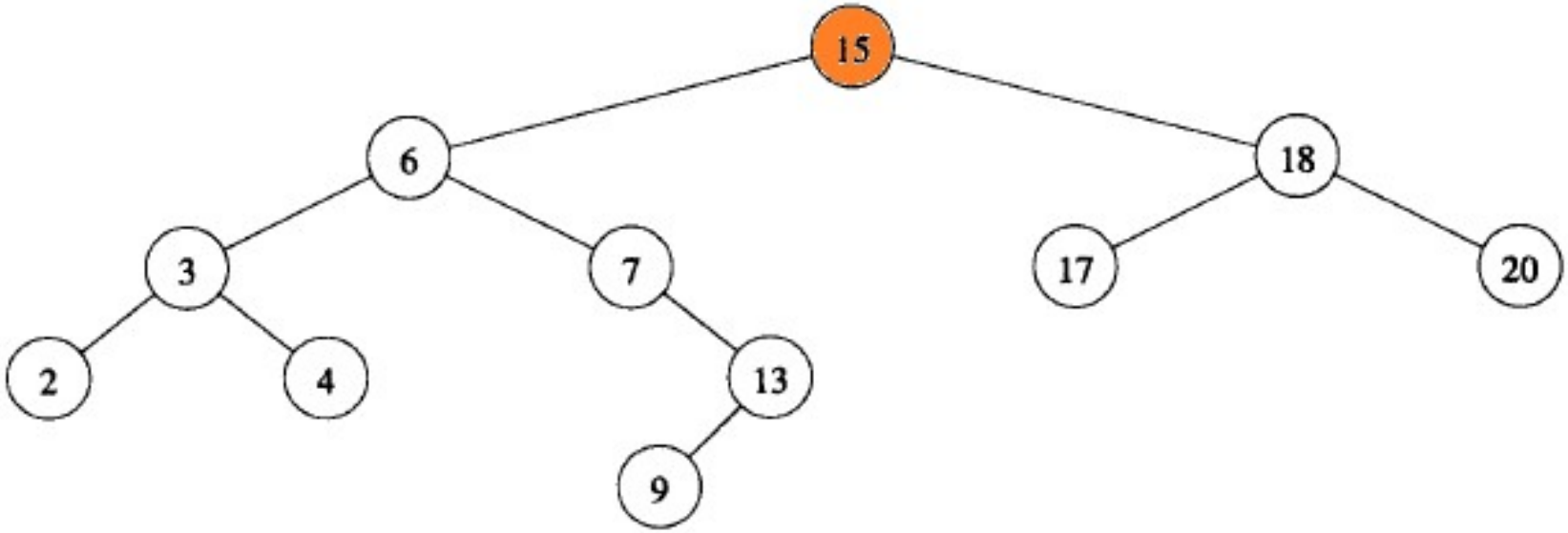
Trước khi xóa pCurr



Sau khi xóa pCurr

```
P->right = pCurr->left;
delete pCurr;
```

Xóa một node (7)



Xóa key = 15 (có 2 cây con)

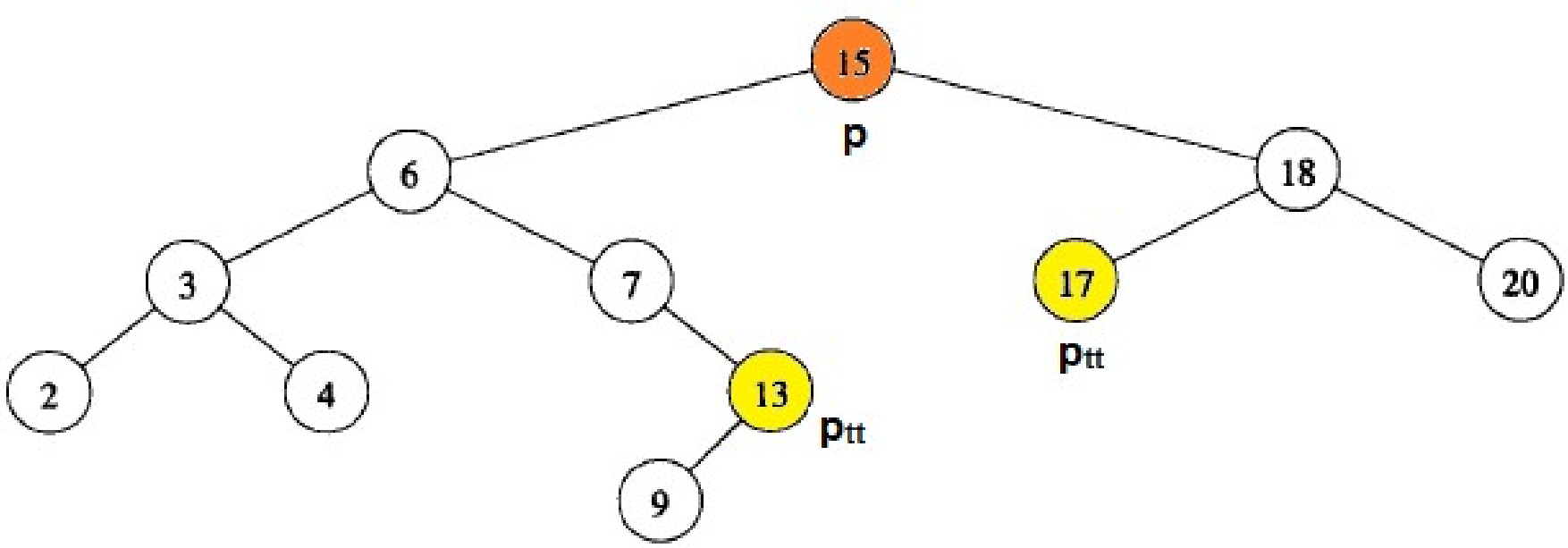
Xóa một node (8)

- Xóa node p có 2 cây con:
  - Thay vì xóa trực tiếp node p, ta (i) tìm 1 phần tử thay thế cho p (gọi là phần tử p_{tt}), (ii) copy nội dung của p_{tt} sang p, (iii) xóa node p_{tt}

- Phần tử thay thế p_{tt}:
  - *Cách 1:* là phần tử lớn nhất trong cây con bên trái p
  - *Cách 2:* là phần tử nhỏ nhất trong cây con bên phải p

→ phần tử p_{tt} sẽ có tối đa 1 cây con

Xóa một node (9)



Hai cách chọn phần tử thay thế cho p

Đánh giá/So sánh (1)

- So sánh cây BST với mảng được sắp thứ tự và Danh sách liên kết ?

Đánh giá/So sánh (2)

Tiêu chí	Cây BST (*)	Mảng sắp thứ tự	Danh sách liên kết
Chi phí tìm kiếm	$O(\log_2 n)$	$O(\log_2 n)$	O(n)
Chi phí thêm phần tử	$O(\log_2 n)$	O(n)	O(1)
Chi phí xóa phần tử	$O(\log_2 n)$	O(n)	O(1)
Bộ nhớ sử dụng cho 1 phần tử	Sizeof(key)+8	Sizeof(key)	Sizeof(key)+4

(*) Xét khi cây cân bằng

Cây nhị phân

- Các khái niệm và thuật ngữ cơ bản
- Cài đặt cấu trúc dữ liệu
- Duyệt cây
- Cây nhị phân tìm kiếm – Binary Search Tree
- Hàng đợi ưu tiên – Priority Queue

Hàng đợi ưu tiên

- Priority Queue ADT
- Cài đặt cấu trúc dữ liệu

Priority Queue ADT (1)

- Trong một số ứng dụng thực tế, tính chất FIFO của queue nhiều khi không phù hợp
- Các ví dụ:
  - Sắp hàng mua vé: ưu tiên người già, phụ nữ có thai,…
  - Trạm thu phí: ưu tiên xe cứu thương, xe cảnh sát, xe cứu hỏa
  - Thang máy: yêu cầu xảy ra sau có thể được thực hiện trước (nếu cùng hướng trên đường thang di chuyển) → tối ưu hiệu suất
  - Process P_2 của HĐH có thể được thực hiện trước process P_1 vì có vai trò quan trọng hơn
  - …

→ cần cấu trúc hàng đợi (có độ) ưu tiên

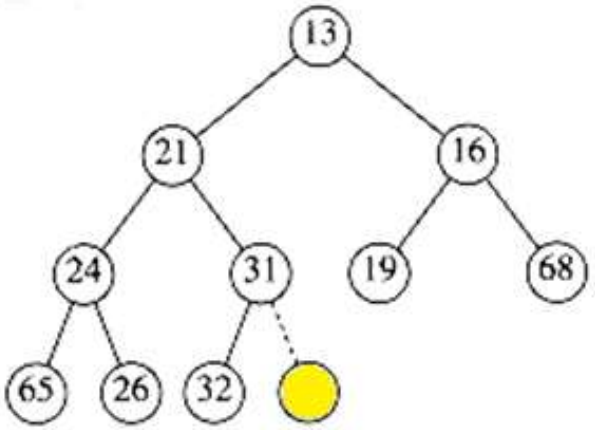
Priority Queue ADT (2)

- Hàng đợi ưu tiên
  - Là một tập hợp nhiều phần tử, thao tác cơ bản là FIFO
  - Mỗi phần tử có một "key", là độ ưu tiên của phần tử đó
  - Khi thêm hay xóa phần tử, queue sẽ được điều chỉnh lại sao cho phần tử có độ ưu tiên cao nhất luôn ở đầu queue
- Các thao tác cơ bản:
  - Khởi tạo hàng đợi rỗng
  - Xóa hàng đợi
  - Thêm 1 phần tử vào queue và hiệu chỉnh vị trí (insert)
  - Lấy phần tử nhỏ nhất (hay lớn nhất) và xóa nó (deleteMin)
  - Lấy phần tử nhỏ nhất (hay lớn nhất) nhưng không xóa nó
  - Kiểm tra queue rỗng

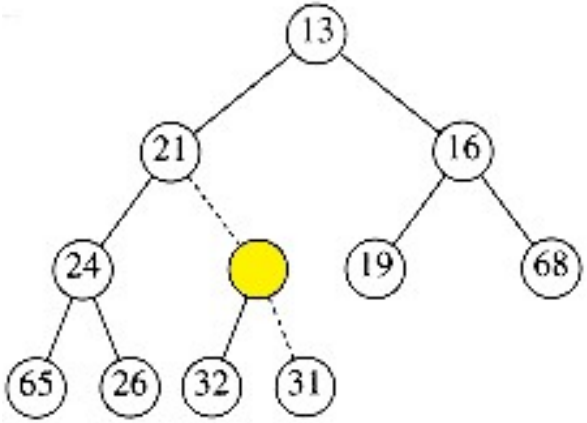
Cài đặt cấu trúc dữ liệu (1)

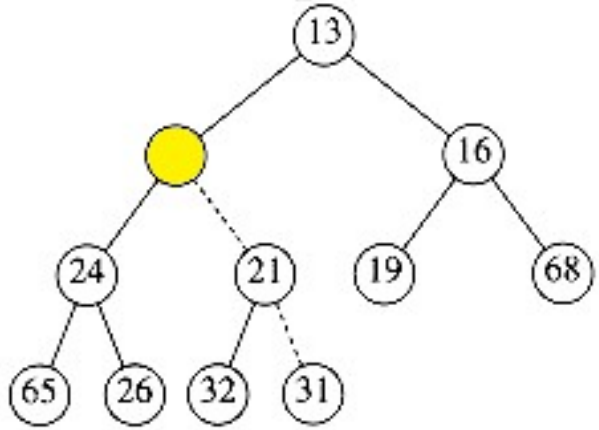
- Sử dụng mảng sắp thứ tự
  - deleteMin: O(1)
  - insert: O(n)
- Sử dụng BST (*)
  - deleteMin: $O(\log_2 n)$
  - insert: $O(\log_2 n)$
- Sử dụng Heap (min heap/max heap)
  - deleteMin: $O(\log_2 n)$
  - insert: $O(\log_2 n)$

Cài đặt cấu trúc dữ liệu (2)

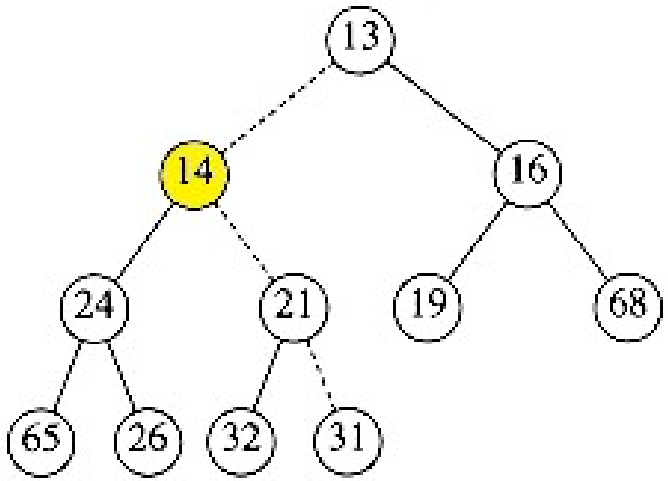


Bước 1: chèn vào cuối heap



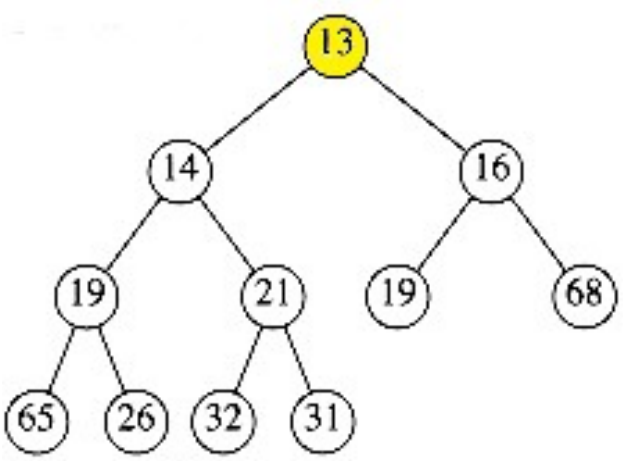


Bước 2: hiệu chỉnh ngược lên trên

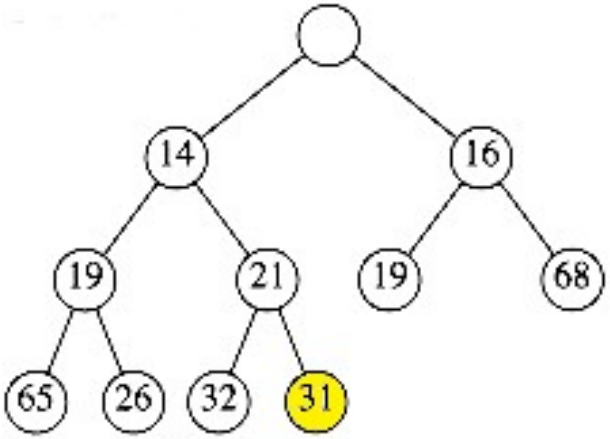


Insert: thêm và hiệu chỉnh vị trí key=14

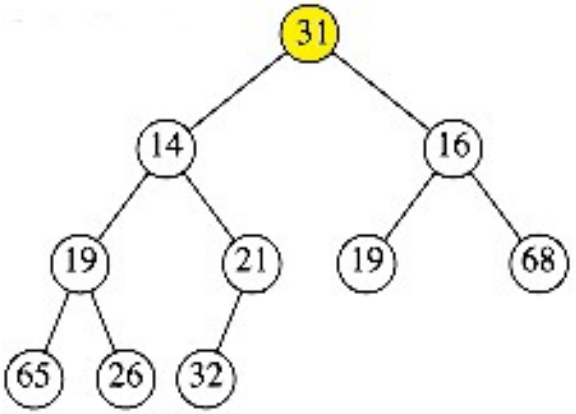
Cài đặt cấu trúc dữ liệu (3)

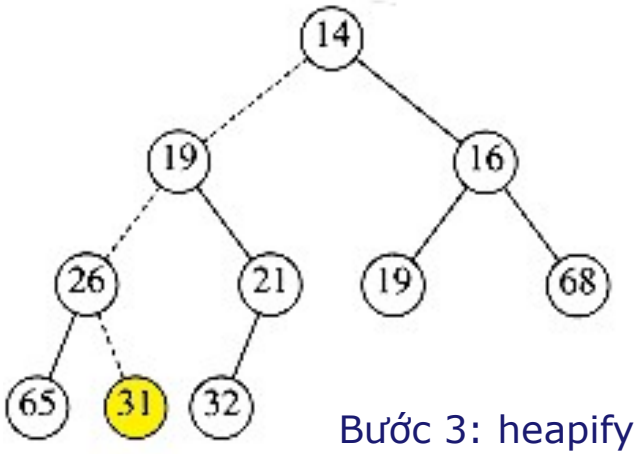


Bước 1: lấy phần tử ở đầu heap



Bước 2: thay phần tử đầu heap bằng phần tử cuối heap





Bước 3: heapify phần tử đầu

deleteMin: xóa phần tử ở đầu heap và Heapify

Cài đặt cấu trúc dữ liệu (4)

```
template <class T> class PRIORITY_QUEUE {
   private:
        T       *items;         // array of queue items
        int     rear;
        int     maxSize;        // maximum size of queue

        void    heapify(int i);         // adjust heap at position "i"

   public:
        PRIORITY_QUEUE(int size);       // create queue with
                                        // 'size' items
        PRIORITY_QUEUE(const PRIORITY_QUEUE &aQueue);
        ~PRIORITY_QUEUE();              // destructor

        // operations
        bool    isEmpty();
        bool    insert(T newItem);
        bool    deleteMin(T &item);
        bool    minValue(T &item);
}; // end class
```