**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP.HCM**

# ĐỀ THI CUỐI KÌ – MÔN ĐẠI SỐ B1

**Các lớp ngành Vật Lý, Hải dương học, Điện tử - Viễn thông (Khóa 2012)**

**Thời gian làm bài: 90 phút (Sinh viên không được sử dụng tài liệu)**

**Bài 1:** Giải và biện luận (theo tham số m) hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + mx_2 + 2x_3 = m \\ mx_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

**Bài 2:** Cho W là không gian con của $R^3$ sinh bởi các vecto $u_1 = (1; 1; 2)$; $u_2 = (1; 2; 1)$; $u_3 = (1; -1; 4)$.

a) Tìm một cơ sở và xác định chiều của không gian W.
b) Xác định m để vecto $u = (m; 4; m + 2)$ thuộc W.



**Bài 3:** Trong không gian $R^3$ cho các vecto $u_1 = (1; 2; 3)$; $u_2 = (1; 3; 2)$; $u_3 = (2; 5; 4)$ và $u = (3; 8; 4)$.

a) Chứng minh tập hợp $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của $R^3$ và xác định tọa độ của vecto u theo cơ sở B.
b) Chứng minh tập hợp $B' = \{u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_1 + u_2 + u_3\}$ cũng là cơ sở của $R^3$ và xác định ma trận chuyển cơ sở từ B sang B'.

**Bài 4:** Cho toán tử tuyến tính $f \in L(R^3)$ xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y - z, 2x + y + 4z).$$



a) Tìm một cơ sở của Im $f$ và một cơ sở của Ker $f$.

b) Xác định ma trận biểu diễn $f$ theo cơ sở $B = \{(1; 0; 1), (0,1,1), (1,1,1)\}$ của $R^3$.

**- - - HẾT - - -**

**<u>Bài 1</u>:** Ta có ma trận: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & 2 & m \\ m & 3 & 3 & 1 \end{array}\right)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ m & 3 & 3 \end{vmatrix} = (3-m).(m-2), \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ m & m & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 4.(m-2)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ m & 1 & 3 \end{vmatrix} = (m+1).(2-m), \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & m \\ m & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2.(m+1).(m-2)$$

- Khi $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m \neq 2 \end{cases}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

$$(x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta};\frac{\Delta_2}{\Delta};\frac{\Delta_3}{\Delta}\right) = \left(\frac{4}{(3-m)};-\frac{(m+1)}{(3-m)};\frac{2(m+1)}{(3-m)}\right)$$

- Khi $\Delta = 0$ thì có hai trường hợp:
  - Với $m = 3$ thì $\Delta_1 = 4 \neq 0$, hệ phương trình vô nghiệm.
  - Với $m = 2$ ta có ma trận: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{chuân hoa}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Longrightarrow$ Hệ phương trình có vô số nghiệm: $(x_1, x_2, x_3) = (-4 ; 3-t ; t)$ với $t \in R$.

<u>Kết luận</u>:
- $m = 3$: Hệ phương trình vô nghiệm.
- $m = 2$: Hệ có vô số nghiệm: $(x_1, x_2, x_3) = (-4 ; 3-t ; t)$ với $t \in R$.
- $m \neq 2$ và $m \neq 3$: Hệ có nghiệm duy nhất: $(x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{4}{(3-m)};-\frac{(m+1)}{(3-m)};\frac{2(m+1)}{(3-m)}\right)$.

**<u>Bài 2</u>:** a) Ta có ma trận: $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{chuan hoa}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Vậy: B = {(1 ; 1 ; 2) ; (0 ; 1 ; –1)} là một cơ sở của W và dim W = 2.

b) Để u thuộc W $\Leftrightarrow$ u phải là tổ hợp tuyến tính của 3 vectơ $u_1$, $u_2$, $u_3$. Ta có ma trận sau:

$$(u_1^T\ u_2^T\ u_3^T | u^T) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & m+2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{chuan hoa}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & -2 & 4-m \\ 0 & 0 & 0 & 6-2m \end{array}\right)$$

u là tổ hợp tuyến tính của $u_1$, $u_2$, $u_3$ $\Leftrightarrow 6 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = 3$.

Vậy: Vecto u thuộc W $\Leftrightarrow$ m = 3.

**<u>Bài 3</u>:** a) • Ta có ma trận: $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

det A = –1 ≠ 0 $\Longrightarrow$ B = {$u_1$, $u_2$, $u_3$} độc lập tuyến tính.

Mà $u_1$, $u_2$, $u_3$ thuộc $R^3$ $\Longrightarrow$ B là cơ sở của $R^3$.

- Ta có ma trận: $(u_1^T\ u_2^T\ u_3^T | u^T) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{chuan hoa}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow [u]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) • Ta có: $\begin{cases} u_1 = (1;2;3) \\ u_2 = (1;3;2) \\ u_3 = (2;5;4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 = (2;5;5) \\ u_2 + u_3 = (3;8;6) \\ u_1 + u_2 + u_3 = (4;10;9) \end{cases}$ $\implies$ Ta có ma trận:

$$A' = \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ u_2 + u_3 \\ u_1 + u_2 + u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 3 & 8 & 6 \\ 4 & 10 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{chuan hoa}} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim B' = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{chuan hoa}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim B = 3$$

$\implies$ dim B = dim B'.

Mặt khác: B' độc lập tuyến tính (det A' = –1 ≠ 0) $\implies$ B' là cơ sở của $R^3$.

• Ta có ma trận:

$$\left( u_1^T \quad u_2^T \quad u_3^T \;\middle|\; (u_1+u_2)^T \quad (u_2+u_3)^T \quad (u_1+u_2+u_3)^T \right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 8 & 10 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{\textit{chuan hoa}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Vậy: $(B \to B') = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$



**<u>Bài 4</u>:** a) Ta có ma trận: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{chuan hoa}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\implies$ Hệ phương trình có vô số nghiệm: $(x_1 ; x_2 ; x_3) = (-3t ; 2t ; t)$ với $t \in R$.

Nghiệm căn bản: u = (–3 ; 2 ; 1) $\implies$ B = {u = (–3 ; 2 ; 1)} là cơ sở của Ker $f$ .

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{chuan hoa}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\implies$ C = $\{u_1, u_2\}$ với $u_1$ = (1 ; 1 ; 2) và $u_2$ = (0 ; 1 ; –1) là cơ sở của Im $f$ .

b) Ta có: B = $\{u_1 = (1 ; 0 ; 1) ; u_2 = (0 ; 1 ; 1); u_3 = (1 ; 1 ; 1)\}$

$\implies$ $f(u_1) = (2 ; 0 ; 6)$ ; $f(u_2) = (2 ; 1 ;5)$ ; $f(u_3) = (3 ; 2 ; 7)$.



Ta có ma trận:

$$\left( u_1^T \quad u_2^T \quad u_3^T \;\middle|\; f(u_1)^T \quad f(u_2)^T \quad f(u_3)^T \right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 5 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\textit{chuan hoa}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Vậy: $[f]_{B,B'} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 & -2 \end{array}\right)$.

**- - - HẾT - - -**