

ĐỀ THI CUỐI KÌ – MÔN ĐẠI SỐ B1

Các lớp ngành Vật Lý, Hải dương học (Khóa 2013)

Thời gian làm bài: 90 phút (Sinh viên không được sử dụng tài liệu)

Bài 1: (2,0 điểm). Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

- Chứng minh A khả nghịch và tìm A^{-1} .
- Tìm ma trận X thỏa mãn điều kiện $XA = B$.

Bài 2: (2,0 điểm). Giải và biện luận (theo tham số m) hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + (m+1)x_3 = 1; \\ x_1 + mx_2 + 2x_3 = 2-m; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Bài 3: (2,0 điểm).

- Cho V là một không gian vector trên $\mathbb{R}$ và $u, v \in V$. Chứng minh rằng $\{u; v\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\{u+v; u-v\}$ độc lập tuyến tính.
- Cho $W = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 | x+2y=3z\}$, $W' = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 | xy=z^2\}$. Kiểm tra W và W' có là không gian con của không gian vector $\mathbb{R}^3$ hay không? Giải thích?

Bài 4: (2,0 điểm). Cho $u_1 = (1; -2; 1)$; $u_2 = (2; 1; 3)$; $u_3 = (1; 2; 2)$ và $u = (2; 5; 3)$.

- Chứng minh tập hợp $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và xác định tọa độ của vector u theo cơ sở B.
- Xác định cơ sở $B' = \{u'_1; u'_2; u'_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ sao cho ma trận chuyển cơ sở B' sang B là:

$$(B' \rightarrow B) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 5: (2,0 điểm). Cho toán tử tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y - z, x + 2y + 2z, 2x + 5y + 7z)$$

- Tìm một cơ sở của không gian $\text{Im} f$ và một cơ sở của $\text{Ker} f$.
- Xác định ma trận biểu diễn f theo cơ sở $B = \{(1, 0, -1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.

--- HẾT ---

(Trong phần này, các phép biến đổi ma trận sẽ không được trình bày, vì đây là các thao tác giải bài tập cơ bản, các bạn đã biết. Mặt khác, mình chỉ cung cấp kết quả - được giải bằng các phần mềm trên máy tính như Maple, Matlab, ... để các bạn tham khảo sau khi tự giải xong)

Câu 1: a) $|A| = -1 \neq 0 \Rightarrow A$ khả nghịch và $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

b) $X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -10 \\ -4 & -7 & 14 \\ 3 & 4 & -8 \end{pmatrix}$

Câu 2: $\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m+1 & 1 \\ 1 & m & 2 & 2-m \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right)$

$|A| = -(m-3)(m-1)$

$|A_2| = (m-1)^2$

$|A_1| = -2(m-1)(2m-1)$

$|A_3| = 2(m-1)$

- Nếu $|A| \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 3 \end{cases}$ thì: Hệ có nghiệm duy nhất $\left(\frac{|A_1|}{|A|}; \frac{|A_2|}{|A|}; \frac{|A_3|}{|A|} \right) = \left(\frac{2(2m-1)}{m-3}; -\frac{m-1}{m-3}; \frac{-2}{m-3} \right)$
- Nếu $m = 1 \Rightarrow |A_1| = |A_2| = |A_3| = 0$ thì: Hệ có vô số nghiệm với dạng $(-t; 1-t; t)$.
- Nếu $m = 3 \Rightarrow |A_1| = -20 \neq 0$ thì: Hệ phương trình vô nghiệm.

Câu 3: a) • Ta có: $\{u, v\}$ độc lập tuyến tính.

Với $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho $a(u+v) + b(u-v) = 0 \Leftrightarrow (a+b)u + (a-b)v = 0$.

Do $\{u, v\}$ độc lập tuyến tính nên $\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=0 \Rightarrow \{u+v; u-v\}$ độc lập tuyến tính.

• Ta có: $\{u+v; u-v\}$ độc lập tuyến tính.

Với $a+b, a-b \in \mathbb{R}$ sao cho $(a+b)u + (a-b)v = 0 \Leftrightarrow a(u+v) + b(u-v) = 0$.

Do $\{u+v; u-v\}$ độc lập tuyến tính nên $a=b=0 \Rightarrow \{u; v\}$ độc lập tuyến tính.

Vậy: $\{u; v\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\{u+v; u-v\}$ độc lập tuyến tính.

b) • $W = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 | x+2y=3z\}$

Xét $c \in \mathbb{R}$ và 2 vector $\begin{cases} u = (x, y, z) \\ v = (x', y', z') \end{cases} \in W \Rightarrow \begin{cases} x+2y=3z \\ x'+2y'=3z' \end{cases}$

Ta có: $u+v = (x+x', y+y', z+z')$

$(x+x') + 2(y+y') = (x+2y) + (x'+2y') = 3z + 3z' = 3(z+z') \Rightarrow u+v \in W$

Lại có: $cu = (cx, cy, cz)$

$cx + 2cy = c(x+2y) = 3cz \Rightarrow cu \in W$

Vậy: W là không gian con của không gian vector $\mathbb{R}^3$.

• $W' = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 | xy = z^2\}$

Xét $c \in \mathbb{R}$ và 2 vector $\begin{cases} u = (x, y, z) \\ v = (x', y', z') \end{cases} \in W' \Rightarrow \begin{cases} xy = z^2 \\ x'y' = z'^2 \end{cases}$

Ta có: $u+v = (x+x', y+y', z+z')$

$(x+x')(y+y') = xy + x'y' + xy' + x'y = z^2 + z'^2 + xy' + x'y \neq (z+z')^2 \Rightarrow u+v \notin W'$

Vậy: W' không phải là không gian con của không gian vector $\mathbb{R}^3$.

Câu 4: a) Ta có: $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow r(A) = 3$ (bằng số vector) nên B độc lập tuyến tính.

Mà $B \subset \mathbb{R}^3$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow B$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Ta có: $(u_1^T \ u_2^T \ u_3^T \ | \ u^T) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right) \Rightarrow [u]_B = \begin{pmatrix} -20 \\ 25 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) Xét ma trận mở rộng:

$(u_1^T \ u_2^T \ u_3^T \ | \ I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -1 & 5 \end{array} \right)$

$\Rightarrow (B \rightarrow B_0) = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & -4 \\ -7 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Ta có: $(B' \rightarrow B) = (B' \rightarrow B_0)(B_0 \rightarrow B) \Rightarrow (B' \rightarrow B_0) = (B' \rightarrow B)(B_0 \rightarrow B)^{-1}$

$\Rightarrow (B' \rightarrow B_0) = (B' \rightarrow B)(B \rightarrow B_0) = \begin{pmatrix} -14 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 \\ -9 & -2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow (B_0 \rightarrow B') = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 9 & -1 & -14 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (B_0 \rightarrow B') = ([u_1']_{B_0} \ [u_2']_{B_0} \ [u_3']_{B_0}) = (u_1'^T \ u_2'^T \ u_3'^T) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 9 & -1 & -14 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Vậy: Tập hợp $\{u_1' = (-2, 9, 0); u_2' = (1, -1, 1); u_3' = (3, -14, 0)\}$ là cơ sở của B' .

Câu 5: a) Ta có ma trận biểu diễn f theo cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Hệ $AX = 0$ có vô số nghiệm dạng $(x_1, x_2, x_3) = (4t, -3t, t) \ \forall t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Nghiệm căn bản là $u = (4; -3; 1) \Rightarrow C = \{u = (4; -3; 1)\}$ là cơ sở của $\text{Ker } f$.

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Hệ $A^T X = 0$ có vô số nghiệm dạng $(x_1, x_2, x_3) = (t, -3t, t) \ \forall t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Nghiệm căn bản là $v = (1; -3; 1) \Rightarrow D = \{v = (1; -3; 1)\}$ là cơ sở của $\text{Im } f$.

b) $f(u_1) = (2; -1; -5)$, $f(u_2) = (2; 3; 7)$, $f(u_3) = (1; 5; 14)$.

$(u_1^T \ u_2^T \ u_3^T \ | \ f(u_1)^T \ f(u_2)^T \ f(u_3)^T) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & -5 & 7 & 14 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 & 10 \end{array} \right)$

$\Rightarrow [f]_B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -5 \\ -2 & 6 & 10 \end{pmatrix}$

--- HẾT ---

Tranpham