TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP.HCM

ĐỀ THI GIỮA KÌ I – MÔN ĐẠI SỐ B1

Các lớp ngành Vật Lý, Hải dương học, Điện tử - Viễn thông (Khóa 2012)

Thời gian làm bài: 60 phút (Sinh viên không được sử dụng tài liệu)

Bài 1: (2 điểm). Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

a) Tính AB và A^{-1}.

b) Tìm ma trận X sao cho $A^2XA^3 = A^3BA^2$.

Bài 2: (3,5 điểm). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 6 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 5 \end{cases}$$

Bài 3: (3,5 điểm). Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ m & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Tìm m để ma trận A khả nghịch.

b) Tìm nghịch đảo của A trong trường hợp m = 2.

Bài 4: (1 điểm). Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $A^2 = A$ và $A \neq I_n$. Chứng minh rằng A không khả nghịch và $A + I_n$ khả nghịch.

- - - HẾT - - -

Bài 1: a)

$* \ AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 18 & 16 \end{pmatrix}$

$* \ (A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

b) Phương trình $A^2XA^3 = A^3BA^2$ có nghiệm: $X = (A^2)^{-1}(A^3BA^2)(A^3)^{-1}$

$$\Leftrightarrow \ X = (A^2)^{-1}A^2ABA^2(A^2A)^{-1} = \left[(A^2)^{-1}A^2\right]AB\left[A^2(A^2)^{-1}\right]A^{-1} = I_2ABI_2A^{-1} = ABA^{-1}.$$

$$\Leftrightarrow \ X = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 18 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -12 & 10 \end{pmatrix}$$

Bài 2: Hệ phương trình có dạng AX = B**,** ta có:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & -3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\implies \begin{cases} x_1 + 3x_3 - x_5 = 2 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_4 - 2x_5 = 3 \end{cases} \implies \text{Hệ có vô số nghiệm xác định bởi: } (a, b \in \mathbb{R}) \ \begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{2}a - 2b + \dfrac{1}{2} \\ x_2 = a \\ x_3 = \dfrac{1}{2}a + b + \dfrac{1}{2} \\ x_4 = 2b + 3 \\ x_5 = b \end{cases}$$

Bài 3: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ m & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 5m^2 - 11m + 6.$

a) A khả nghịch $\Leftrightarrow \ \det(A) \neq 0 \ \Leftrightarrow \ 5m^2 - 11m + 6 \neq 0 \ \Leftrightarrow \ m \neq \frac{6}{5}$ và $m \neq 1.$

b) $m = 2 \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Bài 4: Theo giả thuyết: $A^2 = A$.

Lấy định thức 2 vế: $\det(A^2) = \det A \ \Leftrightarrow \ (\det A)^2 - \det A = 0 \ \Leftrightarrow \ \left\{\begin{array}{l} \det A = 1 \\ \det A = 0 \end{array}\right.$

Với $\det A = 1 \neq 0 \implies \exists A^{-1}$. Nhân 2 vế phương trình $A^2 = A$ cho A^{-1} ta được:

$A^2A^{-1} = AA^{-1} \ \Leftrightarrow \ A = I_n$ (trái với giả thuyết đề bài $A \neq I_n \implies$ Loại $\det A = 1$).

$\implies \det A = 0 \implies$ Ma trận A không khả nghịch.

Ta có: $\det(A + I_n) = \det A + \det I_n = 0 + 1 = 1 \neq 0 \implies$ Ma trận $(A + I_n)$ khả nghịch.

- - - HẾT - - -

Ivanpham