Ch□ơng 7
LÝ THUYẾT CHUỖI

§1. □□I C□□NG VỦ CHU□I S□

I. KHÁI NIỆM CHUỖI SỐ VÀ TỔNG CỦA CHUỖI SỐ

a. Khái niệm chuỗi số

Cho một dãy số vô hạn

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ \ldots \tag{1.1}$$

Định nghĩa: Biểu thức

$$x_1 + x_2 + \ldots + \ x_n + \ldots \tag{1.2}$$

đ- ợc gọi là *chuỗi số,* gọi tắt là *chuỗi*. Các số trong dãy số (1.1) đ- ợc gọi là các *số hạng* của chuỗi số (1.2). Hàm số đối số tự nhiên đặt t- ơng ứng mỗi số tự nhiên n với số hạng thứ n của chuỗi (1.2) đ- ợc gọi là *số hạng tổng quát* của chuỗi số đó.

Thay cho cách viết (1.2) ta có thể dùng ký hiệu tổng $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ để biểu diễn chuỗi số[1]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \ldots + \ x_n + \ldots$$

Mỗi dãy số vô hạn (1.1) cho t- ơng ứng một chuỗi số (1.2). Tr- ớc hết, biểu thức (1.2) trong định nghĩa nêu trên chỉ mang ý nghĩa ký hiệu hình thức để chỉ "tổng" các số hạng của một dãy số vô hạn. Sau đây ta sẽ gán nghĩa cho tổng loại này thông qua phép toán giới hạn.

b. Tổng của chuỗi số. Chuỗi hội tụ và chuỗi phân kỳ

Với mỗi số tự nhiên n ta tính tổng n số hạng đầu của chuỗi số (1.2):

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + \ x_n .$$

Ta gọi S_n là *tổng riêng thứ n* của chuỗi số (1.2). Nh- vậy, mỗi chuỗi số (1.2) cho t- ơng ứng một dãy số

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$$

đ- ợc gọi là *dãy tổng riêng* của nó.

Định nghĩa 1: Nếu dãy tổng riêng S_n có giới hạn (hữu hạn hoặc vô hạn):

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = S$$

thì giới hạn S đ- ợc gọi là *tổng của chuỗi số (1.2)*.

Để nói rằng S là tổng của chuỗi số (2.1) ta viết $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$, hoặc

---

[1] Thông th- ờng, các số hạng của chuỗi số đ- ợc đánh số thứ tự bắt đầu từ 1. Để cho tiện, đôi khi ta có thể đánh số các số hạng bắt đầu từ 0, hoặc một số tự nhiên nào đó.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots = S$$

Định nghĩa 2: Một chuỗi số có tổng là một số thực đ- ợc gọi là *chuỗi hội tụ*. Ng- ợc lại, nếu tổng của một chuỗi số không tồn tại hoặc bằng $\pm\infty$ thì chuỗi số đó đ- ợc gọi là *chuỗi phân kỳ*.

Sau đây là một số ví dụ.

Ví dụ 1: Xét chuỗi số:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots \qquad (1.3)$$

Tổng riêng thứ n của chuỗi này là:

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Dãy tổng riêng S_n có giới hạn hữu hạn: $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$. Nh- vậy, chuỗi số (1.3) là chuỗi hội tụ và tổng của nó bằng 1:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = 1.$$

Ví dụ 2: Xét chuỗi số:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 \ldots + aq^{n-1} + \ldots (a \neq 0)^{(2)} \qquad (1.4)$$

Chuỗi số này đ- ợc gọi là *chuỗi số nhân với công bội bằng q*.

Ta có:

$$S_n = a + aq + aq^2 \ldots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q} \text{ khi } q \neq 1.$$

Chuyển qua giới hạn khi $n \to +\infty$ dễ dàng ta thấy:

Tr- ờng hợp $|q| < 1$: $S_n \to \frac{a}{1-q}$, chuỗi (1.4) hội tụ và có tổng bằng $\frac{a}{1-q}$;

Tr- ờng hợp $|q| > 1$: Dãy tổng riêng S_n có giới hạn vô hạn; chuỗi (1.4) phân kỳ;

Tr- ờng hợp $q = -1$: Dãy tổng riêng S_n không có giới hạn; chuỗi (1.4) phân kỳ.

Còn lại tr- ờng hợp $q = 1$, $S_n = na \to \pm\infty$ tuỳ theo $a > 0$, hay $a < 0$; chuỗi (1.4) phân kỳ.

---

(2) Với $a = 0$, chuỗi hội tụ và có tổng = 0, do $S_n = 0$, $\forall n \in N$,

Tóm lại, *với $a \neq 0$, Chuỗi số nhân (1.4) hội tụ khi và chỉ khi công bội có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 1.*

Ví dụ 3: Xét chuỗi số:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} + \ldots \qquad (1.5)$$

Ta có:

$$S_n = \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} = \ln\frac{2.3.4\ldots(n+1)}{2.3\ldots n} = \ln(n+1) \to +\infty \quad \text{khi } n \to \infty .$$

Chuỗi (1.5) phân kỳ.

II. CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN VỀ CHUỖI SỐ HỘI TỤ

Định lý 1: Nếu chuỗi số (1.2) hội tụ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. Nói cách khác, *điều kiện cần để một chuỗi số hội tụ là số hạng tổng quát của nó có giới hạn bằng 0.*

Chứng minh: Gọi S_n là tổng riêng thứ n của chuỗi (1.2), ta có

$$x_n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n) - (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}) = S_n - S_{n-1}.$$

Nếu chuỗi (1.2) hội tụ và có tổng bằng S thì

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Định lý đã đ- ợc chứng minh.

Với mỗi số tự nhiên m cố định ta gọi *phần d□sau số hạng thứ m* của chuỗi (1.2) là chuỗi

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{m+k} = x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_{m+k} + \ldots \qquad (1.6)$$

Định lý 2: Nếu chuỗi (1.2) hội tụ thì mọi phần d- của nó hội tụ. Ng- ợc lại, nếu chuỗi (1.2) có một phần d- hội tụ thì bản thân nó cũng hội tụ. Nói cách khác, *sự hội tụ hay phân kỳ của một chuỗi số không thay đổi nếu thêm vào hoặc bớt đi một số hữu hạn số hạng đầu.*

Chứng minh:

Gọi S_n là tổng riêng thứ n của chuỗi (1.2), S'_k là tổng riêng thứ k của chuỗi (1.6), ta có:

$$S_{m+k} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_m) + (x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_{m+k}) = S_m + S'_k$$

$$\Rightarrow S'_k = S_{m+k} - S_m$$

Với m là một số tự nhiên cố định S_m là một hằng số. Nếu chuỗi (1.2) hội tụ và có tổng bằng S thì

$$\lim_{k\to+\infty} S'_k = \lim_{k\to+\infty}(S_{m+k} - S_m) = S - S_m,$$

chứng tỏ chuỗi (1.6) hội tụ và có tổng bằng $S - S_m$.

Ng- ợc lại, giả sử với m là một số tự nhiên cố định, chuỗi (1.6) hội tụ và có tổng bằng α_m. Khi đó, với n > m ta có:

$$S_n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_m) + (x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_{m+n-m}) = S_m + S'_{n-m}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}(S_m + S'_{n-m}) = S_m + \alpha_m,$$

chứng tỏ chuỗi (1.2) hội tụ và có tổng $S = S_m + \alpha_m$.

Định lý 3: Nếu chuỗi số (1.2) hội tụ thì tổng α_m của phần d- sau số hạng thứ m của nó có giới hạn bằng 0 khi $m \to +\infty$.

Chứng minh: Trên đây ta đã chỉ ra rằng nếu chuỗi số (1.2) hội tụ và có tổng bằng S thì, với mỗi số tự nhiên m, ta có

$$S = S_m + \alpha_m, \text{ hay } \alpha_m = S - S_m.$$

trong đó S_m là tổng riêng thứ m của nó. Từ đây suy ra

$$\lim_{m\to+\infty} \alpha_m = \lim_{m\to+\infty}(S - S_m) = S - S = 0.$$

Định lý 4: Nếu các chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \quad (1.7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \quad (1.8)$$

hội tụ và có tổng t- ơng ứng bằng U, V thì chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) + \ldots \quad (1.9)$$

cũng hội tụ và có tổng bằng U ± V.

Chứng minh:

Gọi U_n, V_n, S_n theo thứ tự là tổng riêng thứ n của các chuỗi (17), (1.8), (1.9). ta có

$$S_n = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n)$$
$$= (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) \pm (v_1 + v_2 + \ldots + v_n) = U_n \pm V_n.$$

Từ giả thiết về các chuỗi (1.7), (1.8) suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}(U_n \pm V_n) = U \pm V,$$

chứng tỏ chuỗi (1.9) hội tụ và có tổng bằng U ± V.

Định lý 5:

Nếu chuỗi số (1.7) hội tụ và có tổng bằng U thì, với α là số thực bất kỳ, chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n = \alpha u_1 + \alpha u_2 + \ldots + \alpha u_n + \ldots \quad (1.10)$$

cũng hội tụ và có tổng bằng αU.

Chứng minh:

Gọi U_n, U'_n theo thứ tự là tổng riêng thứ n của các chuỗi (17), (1.10). ta có

$$U'_n = \alpha u_1 + \alpha u_2 + \ldots + \alpha u_n = \alpha(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = \alpha U_n.$$

Từ giả thiết về chuỗi (1.7) suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} U'_n = \alpha \lim_{n\to+\infty} U_n = \alpha U,$$

chứng tỏ chuỗi (1.10) hội tụ và có tổng bằng αU.

§2. S□ H□I T□ C□A CHU□I S□ D□□NG

I. TIÊU CHUẨN HỘI TỤ CỦA CHUỖI SỐ D□ƠNG

Sau đây chúng ta sẽ xem xét các dấu hiệu cho phép xác định sự hội tụ hay phân kỳ của một chuỗi số. Để làm cơ sở cho việc xét chuỗi số bất kỳ, tr- ớc hết ta xét các chuỗi số với các số hạng không âm. Các chuỗi nh- vậy đ- ợc gọi là *chuỗi số d□ơng*.

Giả sử chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{2.1}$$

là một chuỗi d- ơng, tức là $a_n \geq 0$ với mọi n = 1, 2, 3, …Hiển nhiên là dãy các tổng riêng của chuỗi số d- ơng (2.1), ký hiệu là A_n, là dãy đơn điệu tăng (ít nhất theo nghĩa rộng):

$$A_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geq A_n \ \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$

Theo tính chất của dãy số đơn điệu, dãy số A_n có giới hạn hữu hạn nếu nó bị chặn trên, và có giới hạn $+\infty$ khi nó không bị chặn trên.

Nh- vậy, *một chuỗi số d□ơng hội tụ khi và chỉ khi dãy các tổng riêng của nó bị chặn trên.*

Ví dụ 1: Xét chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \tag{2.2}$$

Chuỗi số này có tên gọi là *chuỗi điều hoà*.

Ta sẽ chỉ ra rằng dãy các tổng riêng của chuỗi điều hoà không bị chặn trên. Thật vậy với m là số tự nhiên bất kỳ ta có

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{2m} > m.\frac{1}{2m} = \frac{1}{2}. \tag{2.3}$$

Tổng riêng thứ 2^n của chuỗi (2.2) có thể viết d- ới dạng

$$A_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots$$
$$+ \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right).$$

□p dụng bất đẳng thức (2.3) cho các tổng trong các dấu ngoặc, với m = 2, 2^2, 2^3, .., 2^{n-1}, ta có

$$A_{2^n} > 1 + \frac{n}{2} \to +\infty \ \text{ khi } n \to +\infty.$$

Điều này chứng tỏ dãy tổng riêng của chuỗi số (2.2) không bị chặn trên, do đó *chuỗi số điều hoà là chuỗi phân kỳ*.

Ví dụ 2: Xét chuỗi số:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots \qquad (2.4)$$

với s là một hằng số. Ta gọi chuỗi số này là *chuỗi điều hoà tổng quát*.

Dễ dàng thấy rằng với s < 1, tổng riêng thứ n của chuỗi (2.4) lớn hơn tổng riêng thứ n của chuỗi điều hoà (2.2) (do $\frac{1}{n^s} > \frac{1}{n}$ $\forall n = 1,2,3,\ldots$). Trên đây ta đã chứng minh rằng dãy các tổng riêng của chuỗi (2.2) không bị chặn trên, do đó trong tr- ờng hợp s < 1, dãy các tổng riêng của chuỗi (2.4) cũng không bị chặn trên, chứng tỏ chuỗi (2.4) phân kỳ khi s < 1.

Ta xét chuỗi (2.4) với s > 1. T- ơng tự nh- bất đẳng thức (2.3), với mọi số tự nhiên m ta có

$$\frac{1}{(m+1)^s} + \frac{1}{(m+2)^s} + \ldots + \frac{1}{(2m)^s} < m.\frac{1}{m^s} = \frac{1}{m^\alpha}\ , \qquad (2.5)$$

trong đó $\alpha = s - 1$ là một hằng số d- ơng.

Gọi S_n là tổng riêng thứ n của chuỗi số (2.4). Với mỗi số tự nhiên k ta có

$$S_{2^k} = 1 + \frac{1}{2^s} + \left(\frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s}\right) + \left(\frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s}\right) + \left(\frac{1}{9^s} + \frac{1}{10^s}. + \ldots + \frac{1}{16^s}\right) + \ldots$$
$$+ \left(\frac{1}{(2^{k-1}+1)^s} + \frac{1}{(2^{k-1}+2)^s}. + \ldots + \frac{1}{(2^k)^s}\right)$$

□p dụng bất đẳng thức (2.5) ta thấy tổng của các biểu thức quây bằng dấu ngoặc đơn nhỏ hơn tổng các số hạng của cấp số nhân lùi vô hạn

$$\frac{1}{2^\alpha}, \frac{1}{(2^\alpha)^2}, \ldots, \frac{1}{(2^\alpha)^{k-1}} + \ldots,$$

do đó

$$S_{2^k} < 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{(2^\alpha)^2} + \ldots + \frac{1}{(2^\alpha)^{k-1}} + \ldots = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{\frac{1}{2^\alpha}}{1 - \frac{1}{2^\alpha}} = M.$$

Hiển nhiên là với mọi số tự nhiên n đều tồn tại k sao cho $2^k \geq n$, do đó $A_n \leq A_{2^k} < M$. Nh- vậy, với s > 1, dãy các tổng riêng của chuỗi (2.4) bị chặn trên, do đó chuỗi này hội tụ.
Tóm lại, *chuỗi điều hoà tổng quát (2.4) hội tụ khi s > 1, phân kỳ khi s ≤1*.

II. CÁC DẤU HIỆU SO SÁNH

Các dấu hiệu so sánh d- ới đây cho phép ta nhận biết một chuỗi số d- ơng hội tụ hay phân kỳ thông qua một chuỗi số d- ơng khác mà ta đã biết nó hội tụ hay phân kỳ.
Xét hai chuỗi số d- ơng:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (A)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \qquad (B)$$

Định lý 1: Giả sử bắt đầu từ một chỗ nào đó trở đi (tức là với mọi $n \geq n_0$) thoả mãn bất đẳng thức:

$$a_n \leq b_n \qquad (1.6)$$

Khi đó:

- Nếu chuỗi (B) hội tụ thì chuỗi (A) cũng hội tụ;
- Nếu chuỗi (A) phân kỳ thì chuỗi (B) cũng phân kỳ.

Chứng minh: Ta chỉ cần chứng minh định lý khi bất đẳng thức (1.6) thoả mãn với mọi số tự nhiên n (sự hội tụ hay phân kỳ của một chuỗi số không thay đổi khi bớt một số hữu hạn số hạng đầu). Gọi A_n, B_n theo thứ tự là tổng riêng thứ n của các chuỗi (A) và (B), từ giả thiết (1.6) ta có:

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq b_1 + b_2 + \ldots + b_n = B_n \ \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$

Từ đây suy ra rằng nếu B_n bị chặn trên thì A_n cũng bị chặn trên; nếu A_n không bị chặn trên thì B_n cũng không bị chặn trên. Theo tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số d- ơng ta có điều phải chứng minh.

Khi điều kiện (1.6) thoả mãn, ta nói chuỗi (B) lớn hơn chuỗi (A), hay chuỗi (A) nhỏ hơn chuỗi (B). Định lý 1 có thể phát biểu nh- sau: *Nếu một chuỗi số d□ơng hội tụ thì mọi chuỗi số d□ơng nhỏ hơn nó đều hội tụ; Nếu một chuỗi số d□ơng phân kỳ thì mọi chuỗi lớn hơn nó đều phân kỳ.*

Định lý 2: Giả sử bắt đầu từ một chỗ nào đó trở đi thoả mãn bất đẳng thức:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \qquad (1.6^*)$$

Khi đó: Nếu chuỗi (B) hội tụ thì chuỗi (A) cũng hội tụ. Nếu chuỗi ((A) phân kỳ thì chuỗi (B) cũng phân kỳ.

Chứng minh: Ta chỉ cần chứng minh khi bất đẳng thức (1.6*) thoả mãn với mọi số tự nhiên n. Với giả thiết đó ta có:

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1}, \ \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2}, \ldots, \ \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Nhân các vế t- ơng ứng của các bất đẳng thức này với nhau ta đ- ợc

$$\frac{a_n}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_1} \Rightarrow a_n \leq \frac{a_1}{b_1} b_n.$$

Do chuỗi (B) và chuỗi với số hạng tổng quát $c_n = \frac{a_1}{b_1} b_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ, áp dụng định lý 1 ta có điều phải chứng minh.

Định lý 3: Giả sử tồn tại giới hạn (hữu hạn hoặc vô hạn):

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \ .$$

Khi đó:

- Với $0 \le L < +\infty$, nếu chuỗi (B) hội tụ thì chuỗi (A) cũng hội tụ;
- Với $0 < L \le +\infty$, nếu chuỗi (B) phân kỳ thì chuỗi (A) cũng phân kỳ.

Kết hợp hai điều nêu trên, nếu $0 < L < +\infty$ thì hai chuỗi số d- ơng (A) và (B) cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Chứng minh

• Giả sử $0 \le L < +\infty$. Với $\varepsilon > 0$ là một số d- ơng cố định bất kỳ ta có t- ơng ứng số tự nhiên n_0 sao cho bắt đầu từ khi $n \ge n_0$ thoả mãn bất đẳng thức

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon \quad \forall n \ge n_0.$$

Từ đây suy ra

$$a_n < (L + \varepsilon)b_n \ \forall n \ge n_0.$$

Nếu chuỗi (B) hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(L+\varepsilon)b_n$ hội tụ, do đó, theo định lý 1, chuỗi (A) cũng hội tụ.

• Nếu $0 < L \le +\infty$ thì $0 \le \lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{L} < +\infty$ (khi $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = +\infty$ ta có $\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_n} = 0$). Theo chứng minh trên, nếu chuỗi (A) hội tụ thì chuỗi (B) cũng hội tụ, do đó nếu chuỗi (B) phân kỳ thì chuỗi (A) phân kỳ.

Ví dụ 1: Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ (a > 0).

Dễ dàng thấy rằng, với $0 < a \le 1$ chuỗi số này phân kỳ do điều kiện cần để một chuỗi số hội tụ bị vi phạm. Tr- ờng hợp $a > 1$, chuỗi đã cho hội tụ do $\frac{1}{1+a^n} < \left(\frac{1}{a}\right)^n$ và chuỗi số nhân $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n$ hội tụ.

Ví dụ 2: Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ hội tụ do chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ hội tụ và

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n!}{2^n n!}\cdot\frac{1.2.3....n}{1.3.5...(2n-1).} < \frac{1}{2^n}.$$

Ví dụ 3: So sánh với chuỗi điều hoà tổng quát ta có:

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ phân kỳ, do $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ.

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ hội tụ do $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{n^{3/2}}$ và chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ hội tụ.

Ví dụ 4: Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-2n+1}{2n^3+3n-1}$ phân kỳ, do chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ và

$$\frac{3n^2-2n+1}{2n^3+3n-1}:\frac{1}{n}\to\frac{3}{2}\text{ khi } n\to+\infty .$$

Ví dụ 5: Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{x}{n^s}$ $(0 < x < \pi)$.

Dễ dàng thấy rằng $\left(\sin\frac{x}{n^s}\right):\frac{1}{n^s}\to x$ khi $n\to+\infty$, do đó chuỗi đã cho hội tụ nếu $s > 1$ và phân kỳ nếu $s \le 1$.

III. MỘT SỐ DẤU HIỆU SỬ DỤNG DÃY SỐ HỖ TRỢ

a. Dấu hiệu Cauchy

Xét chuỗi số d- ơng

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad \text{(A)}$$

Từ các số hạng của chuỗi (A) ta lập dãy số $\mathscr{C}_n = \sqrt[n]{a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

Định lý (*Dấu hiệu Cauchy*):

Giả sử tồn tại giới hạn (hữu hạn hoặc vô hạn):

$$\lim_{n\to+\infty}\mathscr{C}_n = \mathscr{C}.$$

Khi đó, chuỗi số d- ơng (A) hội tụ nếu $\mathscr{C} < 1$ và phân kỳ nếu $\mathscr{C} > 1$.

Chứng minh:

Nếu $\mathscr{C} < 1$ ta chọn bất kỳ một số d- ơng q trong khoảng giữa $\mathscr{C}$ và 1 ($\mathscr{C} < q < 1$). Theo tính chất của dãy số hội tụ, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho

$$\mathscr{C}_n = \sqrt[n]{a_n} < q \text{, hay } a_n < q^n, \forall n > n_0.$$

So sánh với chuỗi số nhân với công bội bằng q ta suy ra chuỗi (A) hội tụ.

Nếu $\mathscr{C} > 1$ hoặc $= +\infty$ tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho

$$\mathscr{C}_n = \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow a_n > 1, \forall n > n_0,$$

suy ra chuỗi (A) phân kỳ do vi phạm điều kiện cần (a_n không thể có giới hạn bằng 0 khi $n\to+\infty$) .

Chú ý: Tr- ờng hợp $\mathscr{C} = 1$ không cho kết luận gì về sự hội tụ của chuỗi (A).

Ví dụ: Sử dụng dấu hiệu Cauchy ta thấy ngay:

- Chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$ hội tụ do $\mathscr{C}_n = \frac{1}{\ln n}$, $\mathscr{C} = \lim_{n\to+\infty}\mathscr{C}_n = 0$;

- Chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{n}\right)^n$ (a > 0) hội tụ do $\mathscr{C}_n = \frac{a}{n}$, $\mathscr{C} = \lim_{n\to+\infty}\mathscr{C}_n = 0$;

b. Dấu hiệu d' Alambert

Để xét sự hội tụ của chuỗi số (A) với $a_n > 0$, ta lập dãy số $\mathscr{D}_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (n = 1, 2, 3,…). Dãy số này đ- ợc gọi là dãy số d' Alambert.

Định lý (*Dấu hiệu d' Alambert*):

Giả sử tồn tại giới hạn (hữu hạn hoặc vô hạn):

$$\lim_{n\to+\infty}\mathscr{D}_n = \mathscr{D}.$$

Khi đó, chuỗi số d- ơng (A) hội tụ nếu $\mathscr{D} < 1$ và phân kỳ nếu $\mathscr{D} > 1$.

Chứng minh:

Nếu $\mathscr{D} < 1$ ta chọn bất kỳ một số d- ơng q trong khoảng giữa $\mathscr{D}$ và 1 ($\mathscr{D} < q < 1$). Theo tính chất của dãy số hội tụ, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho

$$\mathscr{D}_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} < q \text{, hay } a_{n+1} < qa_n \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Từ bất đẳng thức này suy ra $a_{n_0+1} < q a_{n_0}$, $a_{n_0+2} < q a_{n_0+1} < q^2 a_{n_0}$, …Bằng ph- ơng pháp quy nạp ta ta dễ dàng chứng minh $a_{n_0+k} < q^k a_{n_0}$ $\forall$ k =1,2, 3, …Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_0} q^n$ hội tụ, do đó chuỗi (A) cũng hội tụ theo dấu hiệu so sánh.

T- ơng tự nh- cách chứng minh dấu hiệu Cauchy, tr- ờng hợp $\mathscr{D} > 1$ hoặc $\mathscr{D} = +\infty$ ta dễ dàng chỉ ra rằng a_n không thể có giới hạn bằng 0, do đó chuỗi (A) phân kỳ.

Chú ý: Tr- ờng hợp $\mathscr{D} = 1$ ta không cho kết luận gì về sự hội tụ của chuỗi (A).

Ví dụ 1: Sử dụng dấu hiệu d' Alambert ta thấy:

- Với a > 0, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n!}$ hội tụ do $\mathscr{D}_n = \frac{a}{n+1}$, $\mathscr{D} = \lim_{n\to+\infty}\mathscr{D}_n = 0$;
- Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$ phân kỳ , do $\mathscr{D}_n = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.\frac{n^n}{3^n n!} = \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$, $\mathscr{D} = \lim_{n\to+\infty}\mathscr{D}_n = \frac{3}{e} > 1$;
- Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ hội tụ , do $\mathscr{D}_n = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.\frac{n^n}{2^n n!} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$, $\mathscr{D} = \lim_{n\to+\infty}\mathscr{D}_n = \frac{2}{e} < 1$;

Ví dụ 2: Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, với x > 0.

Ta có: $\mathscr{D}_n = \frac{(n+1)x}{n}$, $\mathscr{D} = \lim_{n\to+\infty} \mathscr{D}_n = x$. Theo dấu hiệu d'Alambert, chuỗi này hội tụ khi x < 1, phân kỳ khi x > 1. Tr- ờng hợp x = 1, mặc dù dấu hiệu d'Alambert không cho kết luận gì, nh- ng ta dễ dàng thấy rằng chuỗi này phân kỳ do vi phạm điều kiện cần.

Ví dụ 3: Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, với x > 0.

Ta có: $\mathscr{D}_n = x.\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$, $\mathscr{D} = \lim_{n\to+\infty} \mathscr{D}_n = x$. Theo dấu hiệu d'Alambert, chuỗi này hội tụ khi x < 1, phân kỳ khi x > 1. Tr- ờng hợp x = 1, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ là chuỗi hội tụ.

c. Dấu hiệu Raabe

Để xét sự hội tụ của chuỗi số d- ơng

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{A}$$

ta lập dãy số

$$\mathscr{R}_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Định lý (*Dấu hiệu Raabe*): Giả sử tồn tại giới hạn (hữu hạn hoặc vô hạn)

$$\lim_{n\to+\infty} \mathscr{R}_n = \mathscr{R}.$$

Khi đó, chuỗi số d- ơng (A) hội tụ nếu $\mathscr{R} > 1$ và phân kỳ nếu $\mathscr{R} < 1$.

Chứng minh:

Nếu $\mathscr{R} > 1$ ta chọn bất kỳ một số d- ơng r trong khoảng giữa 1 và $\mathscr{R}$ ($1 < r < \mathscr{R}$). Theo tính chất của dãy số hội tụ (nếu $\mathscr{R} = +\infty$ thì theo định nghĩa dãy số có giới hạn $+\infty$), bắt đầu từ một chỗ nào đó trở đi ta có

$$\mathscr{R}_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > r \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{r}{n}\ .$$

Lấy bất kỳ một số s trong khoảng giữa 1 và r ($1 < s < r$) có

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} = s < r.$$

Theo tính chất của dãy số hội tụ, với n đủ lớn ta cũng có

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s-1}{\frac{1}{n}} < r \text{ , hay } \left(1+\frac{1}{n}\right)^s < 1+\frac{r}{n}.$$

Nh- vậy bắt đầu từ một chỗ nào đó trở đi ta có

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^s \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^s = \frac{\frac{1}{(n+1)^s}}{\frac{1}{n^s}}.$$

Từ đây suy ra chuỗi (A) hội tụ theo dấu hiệu so sánh (định lý 2).

Tr- ờng hợp $\mathscr{R} < 1$, bắt đầu từ một chỗ nào đó trở đi ta có

$$\mathscr{R}_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) < 1 \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1+\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}.$$

So sánh với chuỗi điều hoà suy ra chuỗi (A) phân kỳ.

Ví dụ: Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)...(x+n)}$ với $x > 0$.

Trong tr- ờng hợp này ta không thể áp dụng dấu hiệu d' Alambert vì $\mathscr{D} = 1$. Tuy nhiên , ta có:

$$\mathscr{R}_n = n\left(\frac{x+n+1}{n+1}-1\right) = \frac{nx}{n+1} \to x \text{ khi } n \to +\infty, \text{ tức là } \mathscr{R} = x .$$

Theo dấu hiệu Raabe, chuỗi hội tụ khi $x > 1$, phân kỳ khi $x < 1$. Khi $x = 1$ chuỗi đã cho là chuỗi phân kỳ (chuỗi điều hoà bỏ số hạng đầu).

IV. DẤU HIỆU TÍCH PHÂN

Xét chuỗi số d- ơng

$$\sum_{n=1}^{n} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots$$

với số hạng thứ n là giá trị tại n của một hàm số f xác định trên khoảng $[1; +\infty)$.

Định lý (MacLaurin-Cauchy)**:** Giả sử f(x) là một hàm số d- ơng, liên tục và đơn điệu giảm trên khoảng $[1; +\infty)$. Khi đó, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ hội tụ khi và chỉ khi nguyên hàm F(x) của hàm số f(x) có giới hạn hữu hạn khi $x \to +\infty$.

Chứng minh: Xét chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} [F(n+1) - F(n)] \tag{2.7}$$

trong đó F(x) là một nguyên hàm của f(x).

Do F'(x) = f(x) > 0 $\forall x \in [1; +\infty)$ nên F(x) là hàm số đơn điệu tăng. Theo tính chất của hàm số đơn điệu, F(x) có giới hạn khi $n \to +\infty$ (giới hạn đó là một số hữu hạn hay $+\infty$ tuỳ theo F(x) bị chặn trên hay không bị chặn trên). Dễ dàng thấy rằng tổng riêng thứ n của chuỗi (2.7) bằng F(n + 1) – F(1), do đó chuỗi (2.7) hội tụ khi và chỉ khi F(x) có giới hạn hữu hạn khi $x \to +\infty$.

Theo công thức số gia hữu hạn, với mọi số tự nhiên n ta có:

$$F(n+1) - F(n) = F'(c) = f(c), \text{ với } n < c < n+1.$$

Vì f(x) là hàm đơn điệu giảm nên

$$f(n+1) < F(n+1) - F(n) < f(n).$$

□p dụng dấu hiệu só sánh ta có điều phải chứng minh: nếu F(x) có giới hạn hữu hạn thì chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n+1)$ hội tụ do chuỗi (2.7) hội tụ; nếu F(x) có giới hạn $+\infty$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ phân kỳ do chuỗi (2.7) phân kỳ.

Ví dụ 1: Với $f(x) = \frac{1}{x^s}$ $(x \geq 1)$ ta có

$$F(x) = \frac{1}{(1-s)x^{s-1}} \text{ khi } s \neq 1;\ F(x) = \ln x \text{ khi } s = 1.$$

Giới hạn của F(x) khi $x \to +\infty$: $F(x) \to 0$ nếu $s > 1$; $F(x) \to +\infty$ nếu $s \leq 1$.
Theo dấu hiệu tích phân ta có đ- ợc kết quả đã chứng minh ở đầu §2: chuỗi điều hoà tổng quát $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ hội tụ nếu $s > 1$ và phân kỳ nếu $s \leq 1$.

Ví dụ 2: Chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ hội tụ theo dấu hiệu tích phân:

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x},\ F(x) = -\frac{1}{\ln x} \to 0 \text{ khi } x \to +\infty.$$

Ví dụ 3: Chuỗi $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(\ln n)}$ phân kỳ theo dấu hiệu tích phân:

$$f(x) = \frac{1}{x \ln(\ln x)},\ F(x) = \ln[\ln(\ln x)] \to +\infty \text{ khi } x \to +\infty.$$

§3. S□ H□I T□ C□A CHU□I S□ V□I CỸC S□ H□NG □□I DỔU

I. SỰ HỘI TỤ CỦA CHUỖI ĐAN DẤU

Các dấu hiệu hội tụ của chuỗi số d- ơng có thể áp dụng để xét sự hội tụ của các chuỗi số âm (chuỗi với tất cả các số hạng ≤ 0), bởi vì hai chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} (-x_n)$. Nó chung, các dấu hiệu đó có thể sử dụng để xét sự hội tụ của các chuỗi số có các số hạng luuôn luôn d- ơng, hoặc luôn âm bắt đầu từ một chỗ nào đó trở đi. Sau đây ta sẽ xét các chuỗi số với vô số các số hạng d- ơng và vô số các số hạn âm. Tr- ớc hết ta xét tr- ờng hợp chuỗi có các số hạng d- ơng và các số hạng âm xen kẽ nhau, gọi là *chuỗi đan dấu*. Một chuỗi số đan dấu có dạng tổng quát nh- sau[3]

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + (-1)^{n-1}c_n + \ldots, \tag{3.1}$$

trong đó $c_n > 0$ là giá trị tuyệt đối của số hạng thứ n: $x_n = (-1)^{n-1}c_n$.

Định lý Leibnitz: Chuỗi đan dấu (3.1) hội tụ nếu nó có các số hạng giảm dần về giá trị tuyệt đối:

$$c_1 > c_2 > \ldots > c_n > c_{n+1} > \ldots$$

và có giới hạn 0: $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$.

Chứng minh: Goi S_n là tổng riêng thứ n của chuỗi (3,.1), ta có

$$S_{2m} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \ldots + (c_{2m-1} - c_{2m}).$$

Do c_n đơn điệu giảm nên các hiệu số trong dấu ngoặc đơn d- ơng, suy ra S_{2m} tăng khi m tăng. Măt khác, ta có

$$S_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) + (c_4 - c_5) + \ldots + (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m} < c_1.$$

Nh- vậy dãy số S_{2m} đơn điệu tăng và bị chặn trên, do đó nó có giới hạn hữu hạn:

$$\lim_{m\to+\infty} S_{2m} = S. \tag{3.2}$$

Ta lại có $S_{2m-1} = S_{2m+1} + c_{2m}$, do đó

$$\lim_{m\to+\infty} S_{2m-1} = \lim_{m\to+\infty}(S_{2m+1} + c_{2m}) = S + 0 = S. \tag{3.3}$$

Từ (3.2) và (3.3) suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, chứng tỏ chuỗi (3.1) hội tụ.

Ví dụ: Các chuỗi số sau đây hội tụ theo định lý Lebnitz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots \left(c_n = \frac{1}{n} \text{ đơn điệu giảm và } c_n \to 0\right);$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \ldots + \frac{(-1)^{n}}{\ln n} + \ldots \left(c_n = \frac{1}{\ln n} \text{ đơn điệu giảm và } c_n \to 0\right).$$

II. SỰ HỘI TỤ CỦA CHUỖI SỐ BẤT KỲ

a. Tiêu chuẩn hội tụ

Xét chuỗi số bất kỳ

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots, u_n + \ldots \tag{U}$$

[3] Việc bớt đi một số hạn đầu không làm thay đổi tính hội tụ hay phân kỳ, do đó ta xét chuỗi đan dấu với số hạng đầu là số d- ơng.

Việc xét sự hội tụ của chuỗi (U) đ- ợc thực hiện thông qua dãy tổng riêng:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy, dãy số S_n hội tụ khi và chỉ khi: với mọi số d- ơng ε đều tồn tại t- ơng ứng số tự nhiên n_0 sao cho bất đẳng thức

$$\left| S_{n+p} - S_n \right| < \varepsilon$$

thoả mãn với mọi số tự nhiên $n > n_0$ và mọi số tự nhiên p.

Biểu diễn S_{n+p} và S_n qua các số hạng của chuỗi (U), ta có

$$S_{n+p} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}.$$

Từ mối liên hệ này, tiêu chuẩn Cauchy đ- ợc áp dụng cho chuỗi số nh- sau:

Định lý (*Tiêu chuẩn Cauchy*): Điều kiện cần và đủ để chuỗi số (U) hội tụ là: Với mọi số $\varepsilon > 0$ (bé tuỳ ý) đều tồn tại t- ơng ứng số tự nhiên n_0 (đủ lớn sao cho bắt đầu từ khi $n > n_0$ bất đẳng thức

$$\left| u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} \right| < \varepsilon \tag{3.4}$$

thoả mãn với mọi số tự nhiên p.

Chú ý rằng bất đẳng thức (3.4) với p = 1 có nghĩa là $u_{n+1} \to 0$ (với mọi $\varepsilon > 0$, $\left| u_{n+1} \right| < \varepsilon$ bắt đầu từ một chỗ nào đó trở đi). Đây mới chỉ đơn thuần là một điều kiện cần để chuỗi hội tụ! Tiêu chuẩn hội tụ (điều kiện cần và đủ) đòi hỏi nhiều hơn: *bắt đầu từ một chỗ nào đó trở đi, mọi tổng của một số hữu hạn các số hạng liên tiếp có giá trị tuyệt đối bé tuỳ ý.*

Trở lại chuỗi số điều hoà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, với mọi số tự nhiên n ta có

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Nh- vậy, với $\varepsilon < \frac{1}{2}$ bất đẳng thức (3.4) không thoả mãn khi p = n, không phụ thuộc vào n lớn đến mức nào. Do đó, theo tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi này phân kỳ.

b. Sự hội tụ tuyệt đối

Ta lại tiếp tục xét chuỗi số bất kỳ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{U}$$

Trên đây chúng tôi đã trình bày một loạt các dấu hiệu dễ sử dụng nhất để xét sự hội tụ của các chuỗi số d- ơng (chuỗi số có các số hạng ≥ 0). Để xét sự hội tụ của chuỗi (U), với các số hạng bất kỳ, ta có thể sử dụng các dấu hiệu đó thông qua chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n \right| = \left| u_1 \right| + \left| u_2 \right| + \ldots + \left| u_n \right| + \ldots \tag{U*}$$

Để cho tiện ta gọi chuỗi (U*) là *chuỗi giá trị tuyệt đối* của chuỗi (U).

Chú ý rằng đối với chuỗi số d- ơng thì chuỗi giá trị tuyệt đối (U*) chính là (U), còn đối với chuỗi số âm (chuỗi với các số hạng ≤ 0) thì chuỗi (U*) là chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)u_n$ có cùng tính chất hội tụ hay phân kỳ với chuỗi (U). Hơn nữa, nếu chuỗi (U) chỉ có một số hữu hạn các số hạng âm (hoặc chỉ có một số hữu hạn các số hạng d- ơng) thì sau khi bỏ đi một số hữu hạn các số hạng đầu ta đ- ợc chuỗi số d- ơng (chuỗi số âm) có cùng tính chất hội tụ hay phân kỳ với nó. Do đó, *việc xem xét chuỗi giá trị tuyệt đối chỉ thực sự có ý nghĩa đối với các chuỗi có vô số các số hạng d□ơng cùng với vô số các số hạng âm.*

Định lý: Nếu chuỗi giá trị tuyệt đối (U*) hội tụ thì chuỗi (U) cũng hội tụ.

Chứng minh: Với n và p là hai số tự nhiên bất kỳ, ta có:

$$\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\dots+u_{n+p}\right| \le \left|u_{n+1}\right| + \left|u_{n+2}\right| + \dots + \left|u_{n+p}\right|.$$

Nếu chuỗi (U*) hội tụ thì , với mọi ε > 0, tổng ở vế phải nhỏ hơn ε bắt đầu từ khi $n \ge n_0$, kéo theo tổng ở vế trái cũng nhỏ hơn ε khi $n \ge n_0$. Theo tiêu chuẩn hội tụ Cauchy, chuỗi (U) là chuỗi hội tụ.

Chú ý: Ng- ợc lại, nếu chuỗi (U) hội tụ thì ch- a chắc chuỗi giá trị tuyệt đối (U*) hội tụ. Chẳng hạn, với 0 <s ≤ 1 chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ hội tụ (theo dấu hiệu Leibnitz), nh- ng chuỗi giá trị tuyệt đối $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ là chuỗi phân kỳ.

Định nghĩa: Chuỗi số (U) đ- ợc gọi là *chuỗi hội tụ tuyệt* đối nếu chuỗi giá trị tuyệt đối (U*) hội tụ. Chuỗi số (U) đ- ợc gọi là *chuỗi hội tụ không tuyệt* đối nếu bản thân chuỗi đó hội tụ nh- ng chuỗi giá trị tuyệt đối (U*) phân kỳ.

Chú ý: Để xét sự hội tụ tuyệt đối của một chuỗi số với các số hạng thay đổi dấu ta có thể sử dụng các dấu hiệu hội tụ của chuỗi d- ơng để xét sự hội tụ của chuỗi giá trị tuyệt đối của nó. Điều đáng l- u ý là bạn cần thận trọng trong tr- ờng hợp chuỗi giá trị tuyệt đối (U*) phân kỳ: trong tr- ờng hợp này chuỗi (U) vẫn có thể hội tụ (hội tụ không tuyệt đối). Tuy nhiên, nếu chuỗi (U*) phân kỳ theo dấu hiệu Cauchy hoặc dấu hiệu d'Alambert ($\mathscr{C} > 1$, hoặc $\mathscr{D} > 1$) thì chuỗi (U) cũng phân kỳ, bởi vì trong tr- ờng hợp này $|u_n|$ không thể có giới hạn bằng 0, do đó u_n cũng không thể có giới hạn bằng 0 (vi phạm điều kiện cần để chuỗi hội tụ). Từ nhận xét này ta có thể áp dụng dấu hiệu d'Alambert và dấu hiệu Cauchy cho chuỗi bất kỳ nh- sau:

Dấu hiệu d' Alambert: Giả sử dãy số $\mathscr{D}_n^* = \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ có giới hạn: $\mathscr{D}^* = \lim_{n\to\infty}\mathscr{D}_n^*$. Khi đó, chuỗi (U) hội tụ tuyệt đối nếu $\mathscr{D}^* < 1$, phân kỳ nếu $\mathscr{D}^* > 1$.

Dấu hiệu Cauchy: Giả sử dãy số $\mathscr{C}_n^* = \sqrt[n]{|u_n|}$ có giới hạn: $\mathscr{C}^* = \lim_{n\to\infty}\mathscr{C}_n^*$. Khi đó, chuỗi (U) hội tụ tuyệt đối nếu $\mathscr{C}^* < 1$, phân kỳ nếu $\mathscr{C}^* > 1$.

Ví dụ 1: Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$.

Khi x = 0 hiển nhiên chuỗi hội tụ. Với x ≠ 0, ta có $\mathscr{D}_n^* = \frac{(n+1)|x|}{n}$; $\mathscr{D}^* = \lim_{n\to\infty} \mathscr{D}_n^* = |x|$.

Theo dấu hiệu d'Alambert, chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối khi − 1 < x < 1, phân kỳ khi x > 1 hoặc x < −1. Tại x = ±1, dấu hiệu d'Alambert không cho kết luận gì, nh- ng ta thấy ngay chuỗi phân kỳ do vi phạm điều kiện cần.

Ví dụ 2: Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ (x ≠ ±1).

Khi x = 0 hiển nhiên chuỗi hội tụ. Với x ≠ 0, ta có

$$\mathscr{D}_n^* = \left|\frac{x-x^{n+1}}{1-x^{n+1}}\right|;\quad \mathscr{D}^* = \lim_{n\to\infty} \mathscr{D}_n^* = \begin{cases} |x|, & \text{nếu } -1 < x < 1 \\ 1, & \text{nếu } x > 1 \text{ hoặc } x < -1 \end{cases}.$$

Theo dấu hiệu d'Alambert, chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối khi − 1 < x < 1. Khi x > 1 hoặc x < − 1, dấu hiệu d'Alambert không cho kết luận gì, nh- ng bằng cách xét trực tiếp ta thấy chuỗi phân kỳ do vi phạm điều kiện cần.

III. TÍNH CHẤT CỦA CÁC CHUỖI SỐ HỘI TỤ

Khái niệm tổng của chuỗi số xuất phát từ các tổng hữu hạn (các tổng riêng), kết hợp với phép toán giới hạn. Đối với các tổng hữu hạn ta có thể nhóm các số hạng một cách tuỳ ý (tính chất kết hợp) và cũng có thể đổi chỗ các số hạng một cách tuỳ ý (tính chất giao hoán). Vấn đề đặt ra là các tính chất đó còn đúng cho các tổng vô hạn (tổng của chuỗi số hội tụ) hay không? Chúng ta sẽ xem xét vấn đề này.

a. Tính chất kết hợp

Xét chuỗi số bất kỳ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad \text{(U)}$$

Nhóm các số hạng của chuỗi (U) theo một cách bất kỳ ta đ- ợc chuỗi

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = v_1 + v_2 + \ldots + v_k + \ldots, \qquad \text{(V)}$$

trong đó:

$v_1 = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n_1}$, $v_2 = u_{n_1+1} + u_{n_1+2} + \ldots + u_{n_2}$, $v_3 = u_{n_2+1} + u_{n_2+2} + \ldots + u_{n_3}$, …

Định lý: Nếu chuỗi (U) hội tụ và có tổng bằng U thì chuỗi (V) cũng hội tụ và có tổng bằng U, tức là *tính chất kết hợp thoả mãn đối với tổng của chuỗi số hội tụ bất kỳ*.

Chứng minh: Dễ dàng thấy rằng tổng riêng thứ k của chuỗi (V) chính là tổng riêng thứ n_k của chuỗi (U), do đó ta có ngay điều phải chứng minh.

b. Tính chất giao hoán

Đổi chỗ các số hạng của chuỗi (U) một cách tuỳ ý ta đ- ợc chuỗi

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_k} = u_{n_1} + u_{n_2} + \dots u_{n_k} + \dots \qquad (U')$$

Định lý: Nếu chuỗi (U) hội tụ tuyệt đối và có tổng bằng U thì chuỗi (U') cũng hội tụ và có tổng bằng U, tức là *tính chất giao hoán thoả mãn đối với các chuỗi hội tụ tuyệt đối* .

Chứng minh: Tr- ớc hết ta xét tr- ờng hợp chuỗi (U) là chuỗi số d- ơng. Gọi U_n là tổng riêng thứ n của chuỗi (U) và U'_k là tổng riêng thứ k của chuỗi (U'). Dễ dàng thấy rằng dãy số U'_k bị chặn trên. Thật vậy, gọi n' là số lớn nhất trong các chỉ số $n_1, n_2, \dots, n_k$, ta có:

$$U'_k = u_{n_1} + u_{n_2} + \dots u_{n_k} \le u_1 + u_2 + \dots + u_{n'} = U_{n'} \le U.$$

Từ đây suy ra chuỗi (U') hội tụ và có tổng bằng U' ≤ U. Do chuỗi (U) cũng nhận đ- ợc từ chuỗi (U') bằng cách đổi chỗ các số hạng nên U ≤ U', suy ra U' = U.

Với (U) là một chuỗi hội tụ tuyệt đối bất kỳ, chuỗi giá trị tuyệt đối

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \qquad (U^*).$$

là một chuỗi số d- ơng hội tụ. Việc đổi chỗ các số hạng của (U*) không làm ảnh h- ởng đến tính hội tụ và tổng của nó. Gọi $p_1, p_2, \dots, p_m, \dots$là dãy các số hạng d- ơng và $q_1, q_2, \dots, q_k, \dots$là dãy giá trị tuyệt đối của các số hạng âm xếp thứ tự theo trình tự có mặt trong dãy số $u_1, u_{,2}, \dots, u_n, \dots$ Gọi U_n, U^*_n theo thứ tự là tổng riêng thứ n của các chuỗi (U), (U*); P_m là tổng riêng thứ m của chuỗi d- ơng $\sum_{m=1}^{\infty} p_m$; Q_k là tổng riêng tứ k của chuỗi d- ơng $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$.

Dễ dàng thấy rằng U_n, U^*_n có thể biểu diễn d- ới dạng

$$U^*_n = P_m + Q_k \,;\; U_n = P_m - Q_k. \qquad (3.5)$$

Do chuỗi (U*) hội tụ nên dãy số U^*_n bị chặn trên. Từ hệ thức $U^*_n = P_m + Q_k$ dễ dàng suy ra rằng các dãy số P_m và Q_k cũng bị chặn trên, do đó các chuỗi số d- ơng $\sum_{m=1}^{\infty} p_m$, $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ hội tụ. Gọi P và Q theo thứ tự là tổng của các chuỗi này, từ hệ thức $U_n = P_m - Q_k$ suy ra U = P – Q. Việc đổi chỗ các số hạng của chuỗi (U) kéo theo việc đổi chỗ các số hạng của các chuỗi số d- ơng $\sum_{m=1}^{\infty} p_m$, $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ không làm thay đổi tổng của chúng, do đó chuỗi (U') cũng hội tụ và có tổng bằng U' = P – Q.

Trên đây ta đã chỉ ra rằng *tính chất giao hoán thoả mãn đối với các chuỗi số hội tụ tuyệt đối*. Tr- ờng hợp chuỗi hội tụ không tuyệt đối, tính chất này không còn đúng nữa. Cụ thể hơn, ng- ời ta đã chứng minh định lý sau đây:

Định lý Riemann: Nếu chuỗi số (U) hội tụ không tuyệt đối thì, với S là một số thực bất kỳ cho tr- ớc hoặc S = ± ∞ , bằng cách đổi chỗ các số hạng của nó ta có thể nhận đ- ợc một chuỗi có tổng đúng bằng S.

§4. CHU□I HÀM

I. ĐẠI C□ƠNG VỀ DÃY HÀM VÀ CHUỖI HÀM

Xét một dãy vô hạn

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \tag{4.1}$$

với các số hạng là các hàm số đối số x có miền xác định chung không rỗng. Tại mỗi điểm x cố định thuộc miền xác định chung đó chuỗi (4.1) là một chuỗi số và chuỗi số đó có thể hội tụ hoặc không hội tụ. Thuật ngữ *dãy hàm* đ- ợc sử dụng để gọi các dãy loại này, khi ta xét sự phụ thuộc của nó vào biến số x. Để khỏi dài dòng về ký hiệu, ta có thể gọi dãy (4.1) là *dãy hàm $f_n(x)$*.

Tập hợp X gồm tất cả các điểm x mà tại đó dãy (4.1) hội đ- ợc gọi là *miền hội tụ* của dãy đó. Tại mỗi điểm x thuộc miền hội tụ X, giới hạn của dãy (4.1) là một số thực xác định, ký hiệu là f(x). Nh- vậy, khi x biến thiên trên miền X, giới hạn f(x) của dãy (4.1) là một hàm số đối số x. Ta gọi hàm số f(x) là *hàm giới hạn của dãy hàm (4.1)*.

Ví dụ:

- Miền hội tụ của dãy hàm $f_n(x) = x^n$ là khoảng (−1; 1]. Hàm giới hạn của nó là hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ khi } -1 < x < 1; \\ 1, \text{ khi } x = 1. \end{cases}$$

- Miền hội tụ của dãy hàm $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ là ¡ . Hàm giới hạn của nó là f(x) = 0 $\forall x \in$ ¡ .

T- ơng tự nh- dãy hàm, ta gọi *chuỗi hàm* là chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{4.2}$$

mà mỗi số hạng $u_n(x)$ của nó là một hàm số đối số x, có miền xác định chung là một tập hợp không rỗng. Tại mỗi điểm x cố định thuộc miền xác định chung của các hàm số $u_n(x)$, chuỗi số (4.2) là một chuỗi số hội tụ hoặc phân kỳ. Tập hợp cả các điểm x mà tại đó chuỗi (4.2) hội tụ đ- ợc gọi là *miền hội tụ* của nó. Tại mỗi điểm x thuộc miền hội tụ, tổng của chuỗi (4.2) là một số thực xác định, ký hiệu là f(x). Hàm số f(x) đ- ợc gọi là *hàm tổng của chuỗi hàm (4.2)*.

Chú ý rằng hàm tổng của chuỗi hàm (4.2) chính là hàm giới hạn của dãy hàm

$$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x).$$

Ng- ợc lại, hàm giới hạn của một dãy hàm $f_n(x)$ chính là hàm tổng của chuỗi hàm (4.2), với các số hạng $u_1(x) = f_1(x)$, $u_2(x) = f_2(x) - f_1(x)$, …, $u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$, …*Điều này cho phép ta xét các dãy hàm thông qua các chuỗi hàm hoặc ng□ợc lại.*

II. SỰ HỘI TỤ ĐỀU

Các tính chất hàm số của hàm giới hạn của một dãy hàm cũng nh- hàm tổng của một chuỗi hàm không những chỉ phụ thuộc vào tính chất hàm số của các số hạng, mà còn phụ thuộc đáng kể vào đăc tr- ng của sự hội tụ. Chẳng hạn, các số hạng của các dãy hàm

$f_n(x) = x^n$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ ở ví dụ nêu trên đều là các hàm liên tục, nhưng hàm giới hạn của dãy thứ nhất không liên tục, trong khi hàm giới hạn của dãy thứ hai liên tục trong miền hội tụ của nó. Một đặc trưng của sự hội tụ giữ vai trò quan trọng trong việc xem xét tính chất hàm số của hàm giới hạn của một dãy hàm cũng như hàm tổng của một chuỗi hàm là sự hội tụ đều.

a. Khái niệm hội tụ đều

Giả sử dãy hàm $f_n(x)$ hội tụ tại mọi điểm thuộc một miền $X \subset \mathbb{R}$ và f(x) là hàm giới hạn của nó. Tại mỗi điểm cố định $x \in X$, theo mỗi số $\varepsilon > 0$ ta tìm được tương ứng một số tự nhiên n_0 sao cho bất đẳng thức

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{4.3}$$

thoả mãn với mọi $n > n_0$.

Khi xét riêng lẻ tại từng điểm, mốc "đủ lớn" n_0 của n để bất đẳng thức (4.3) thoả mãn không những chỉ phụ thuộc ε, mà còn phụ thuộc vào điểm x mà ta xét. Một câu hỏi đặt ra là với mọi $\varepsilon > 0$ có thể tìm được hay không một số n_0 chung cho mọi điểm $x \in X$, tức là n_0 chỉ phụ thuộc ε, để khi $n > n_0$ bất đẳng thức (4.3) thoả mãn với mọi $x \in X$? Trường hợp tồn tại số n_0 như vậy được quan tâm đặc biệt khi xét các tính chất hàm số của hàm giới hạn của dãy hàm (tổng của chuỗi hàm).

Định nghĩa: Giả sử tại mọi điểm x thuộc miền X dãy hàm $f_n(x)$ hội tụ đến f(x). Ta nói dãy hàm $f_n(x)$ *hội tụ đều đến hàm f(x) trên miền X* khi và chỉ khi: với mọi số $\varepsilon > 0$ đều tồn tại tương ứng số tự nhiên $n_0 = n_0(\varepsilon)$ (n_0 chỉ phụ thuộc ε) sao cho bắt đầu từ khi $n > n_0$ bất đẳng thức (4.3) thoả mãn với mọi $x \in X$.

Ví dụ 1: Xét dãy hàm $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ trên miền $X = \mathbb{R}$. Hàm giới hạn của dãy hàm này là f(x) = 0. Với mọi số tự nhiên n ta có:

$$|f_n(x) - 0| = \frac{|x|}{1+n^2x^2} = \frac{1}{2n}\cdot\frac{2n|x|}{1+n^2x^2} \le \frac{1}{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

do đó, với ε là số dương bất kỳ, khi $n > \dfrac{1}{2\varepsilon}$ bất đẳng thức $0 \le f_n(x) - 0 < \varepsilon$ thoả mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$. Như vậy, theo mỗi số $\varepsilon > 0$, số $n_0 = [1/2\varepsilon]$ (phần nguyên của số $1/2\varepsilon$) thoả mãn điều nêu trong định nghĩa nói trên, tức là dãy hàm đã cho hội tụ đều đến hàm giới hạn f(x) = 0 trên miền $X = \mathbb{R}$.

Ví dụ 2: Xét dãy hàm $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ trên $\mathbb{R}$. Hàm giới hạn của dãy hàm này là f(x) = 0.

Trong trường hợp này với mọi số tự nhiên n ta có $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}$, do đó với $\varepsilon < \dfrac{1}{2}$, bất đẳng thức $|f_n(x) - 0| < \varepsilon$ không thể thoả mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$, bất kể n lớn đến mức nào. Như vậy, dãy hàm này hội tụ, nhưng không hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

Tuy nhiên, nếu xét dãy hàm này hạn chế trên khoảng $[1; +\infty)$ thì nó hội tụ đều đến f(x) = 0. Thật vậy, với mọi $x \ge 1$ ta có

$$\left| f_n(x) - 0 \right| = \frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} < \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ khi } n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Với mọi $\varepsilon > 0$, số tự nhiên $n_0 = [1/\varepsilon]$ đáp ứng điều kiện $\left| f_n(x) - 0 \right| < \varepsilon$ với mọi $x \geq 1$, khi $n > n_0$.

Khái niệm dãy hàm hội tụ đều đ- ợc chuyển qua ngôn ngữ chuỗi hàm nh- sau:

Định nghĩa: Ta nói *chuỗi hàm*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (4.4)$$

hội tụ đều trên một miền $X \subset$ ¡ khi và chỉ khi nó hội tụ tại mọi điểm $x \in X$ và dãy tổng riêng

$$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$$

của nó hội tụ đều trên miền X đến hàm tổng $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Gọi $\alpha_n(x)$ là tổng của phần d- sau số hạng thứ n của chuỗi (4.4) tại mỗi điểm $x \in X$, ta có:

$$\alpha_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+k}(x) + \ldots = f(x) - f_n(x).$$

Theo tính chất của chuỗi số hội tụ, tại mỗi điểm $x \in X$ dãy $\alpha_n(x)$ có giới hạn 0 khi $n \to +\infty$. Nh- vậy, trên miền X, $\alpha_n(x)$ là một dãy hàm có hàm giới hạn là hàm số nhận giá trị không đổi bằng 0. Định nghĩa chuỗi hàm hội tụ đều có thể phát biểu t- ơng đ- ơng nh- sau:

Chuỗi hàm (4.4) hội tụ đều trên miền X khi và chỉ khi dãy phần d sau số hạng thứ n của nó hội tụ đều đến 0 trên miền đó.

b. Tiêu chuẩn hội tụ đều

Tiêu chuẩn hội tụ Cauchy đối với dãy số có thể phát triển thành tiêu chuẩn hội tụ đều đối với dãy hàm nh- sau:

Định lý: Điều kiện cần và đủ để dãy hàm $f_n(x)$ có hàm giới hạn và hội tụ đều trên miền X đến hàm giới hạn của nó là: Với mọi số $\varepsilon > 0$, tồn tại t- ơng ứng số tự nhiên n_0 không phụ thuộc x sao cho bắt đầu từ khi $n > n_0$ bất đẳng thức

$$\left| f_{n+p}(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon \qquad (4.5)$$

thoả mãn với mọi $x \in X$ và với mọi số tự nhiên p.

Chứng minh:

• Giả sử dãy hàm $f_n(x)$ có hàm giới hạn f(x) và hội tụ đều trên miền X tới hàm f(x). Khi đó, theo số $\varepsilon > 0$ bất kỳ, ta tìm đ- ợc số tự nhiên $n_0 = n_0(\varepsilon)$ không phụ thuộc x sao cho khi $n > n_0$ ta có

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in X.$$

Khi đó, với $n > n_0$ và p là số tự nhiên bất kỳ ta cũng có

$$\left| f_{n+p}(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in X.$$

Do $f_{n+p}(x) - f_n(x) = [f_{n+p}(x) - f(x)] + [f(x) - f_n(x)]$, từ hai bất đẳng thức trên suy ra

$$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| \le \left|f_{n+p}(x) - f(x)\right| + \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon\ \forall x \in X \text{ (khi } n > n_0,\ p \in \mathbb{N}\text{)}.$$

• Ngược lại, giả sử với mọi số $\varepsilon > 0$, tồn tại chỉ số $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sao cho khi $n > n_0$ bất đẳng thức (4.5) thoả mãn với mọi $x \in X$. Khi đó tại mỗi điểm cố định $x_0 \in X$, dãy số $f_n(x_0)$ hội tụ, do đó dãy hàm $f_n(x)$ có hàm giới hạn là một hàm số $f(x)$ xác định trên X. Chuyển qua giới hạn khi $p \to +\infty$, từ (4.5) suy ra

$$\left|f(x) - f_n(x)\right| \le \varepsilon\ \ \forall\ x \in X \text{ (bắt đầu từ khi } n > n_0\text{)}.$$

Điều này chứng tỏ dãy hàm $f_n(x)$ hội tụ đều trên miền X đến hàm $f(x)$.

Từ tiêu chuẩn hội tụ đều đối với dãy hàm ta dễ dàng suy ra tiêu chuẩn hội tụ đều đối với chuỗi hàm:

Định lý: Điều kiện cần và đủ để chuỗi hàm (4.4) hội tụ đều trên miền X là: Với mọi số $\varepsilon > 0$, tồn tại t- ơng ứng số tự nhiên n_0 không phụ thuộc x sao cho bắt đầu từ khi $n > n_0$ bất đẳng thức

$$\left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon$$

thoả mãn với mọi $x \in X$ và với mọi số tự nhiên p.

c. Dấu hiệu Weierstrass

Sau đây là một dấu hiệu t- ơng đối đơn giản để các định tính hội tụ đều của một chuỗi hàm:

Dấu hiệu Weierstrass: Nếu tại mọi điểm x thuộc miền X các số hạng của chuỗi hàm (4.4) thoả mãn bất đẳng thức

$$\left|u_n(x)\right| \le a_n \ (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

với a_n là các số hạng của một chuỗi số d- ơng hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, thì chuỗi hàm đó hội tụ đều trên miền X.

Chứng minh: Từ giả thiết ta dễ dàng suy ra:

$$\left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)\right| \le a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}\ \forall x \in X.$$

Do chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nên với mọi số $\varepsilon > 0$, tồn tại t- ơng ứng số tự nhiên $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sao cho

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} < \varepsilon\ \forall n > n_0 \text{ và } \forall p \in \mathbb{N},$$

kéo theo

$$\left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon\ \forall n > n_0 \text{ và } \forall p \in \mathbb{N}.$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi hàm (4.4) hội tụ đều trên miền X.

Ví dụ: Với $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ là một chuỗi số hội tụ tuyệt đối, sử dụng dấu hiệu Weierstras ta dễ dàng suy ra rằng các chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin nx, \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx, \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{arctg} nx, \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{arcotg} nx$$

hội tụ đều trên ¡ .

III. TÍNH CHẤT HÀM SỐ CỦA HÀM TỔNG

Xét chuỗi hàm với các số hạng $u_n(x)$ xác định trên khoảng [a; b], với giả thiết chuỗi đó hội tụ và có tổng bằng f(x) tại mọi điểm $x \in [a; b]$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (4.6)$$

Các định lý d- ới đây cho biết một số tính chất cơ bản của hàm tổng f(x).

Định lý 1: Nếu tất cả các số hạng $u_n(x)$ của chuỗi hàm (4.6) là các hàm số liên tục trên khoảng [a; b] và chuỗi hàm đó hội tụ đều trên [a; b] thì hàm tổng của nó là một hàm số liên tục trên [a; b].

Chứng minh: Gọi $f_n(x)$ là tổng riêng thứ n và $\alpha_n(x)$ là tổng của phần d- sau số hạng thứ n của chuỗi (4.6), ta có:

$$f(x) = f_n(x) + \alpha_n(x).$$

Với x_0 là một điểm cố định bất kỳ thuộc khoảng [a; b] ta có

$$f(x) - f(x_0) = [f_n(x_0) - f_n(x_0)] + \alpha_n(x) - \alpha_n(x_0).$$

Từ đây suy ra

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f_n(x) - f_n(x_0)| + |\alpha_n(x)| + |\alpha_n(x_0)|. \qquad (4.7)$$

Vì các số hạng của chuuôĩ (4.6) là các hàm số liên tục trên [a; b] nên các hàm số

$$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$$

liên tục tại điểm x_0. Với ε là một số d- ơng bất kỳ cho tr- ớc, tồn tại số $\delta > 0$ đủ nhỏ sao cho $V = (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset [a; b]$ ($V = [a; a + \delta)$ nếu $x_0 = a$; $V = (b - \delta; b]$ nếu $x_0 = b$) và

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \ \forall x \in V.$$

Mặt khác, do dãy hàm $\alpha_n(x)$ hội tụ đều trên [a; b] đến 0 ta tìm đ- ợc số tự nhiên n_0 sao cho khi $n > n_0$

$$|\alpha_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \ \forall x \in [a; b]. \qquad (4.8)$$

Kết hợp các bất đẳng thức (4.7) và (4.8) ta có

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \ \forall x \in V.$$

Điều này chứng tỏ $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, tức là hàm tổng f(x) liên tục tại điểm x_0 bất kỳ trên khoảng [a; b]. Định lý đã đ- ợc chứng minh.

Định lý 2: Nếu tất cả các số hạng $u_n(x)$ của chuỗi hàm (4.6) là các hàm số liên tục trên khoảng [a; b] và chuỗi hàm đó hội tụ đều trên [a; b] thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx$ hội tụ và có tổng bằng $\int_a^b f(x)dx$:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)dx + \ldots, \qquad (4.9)$$

tức là *ta có thể lấy tích phân của chuỗi (4.6) theo từng số hạng.*

Chứng minh: Tr- ớc hết ta chú ý rằng, theo định lý 1, hàm tổng f(x) liên tục trên [a; b], do đó tích phân $\int_a^b f(x)dx$ tồn tại. Gọi $f_n(x)$ là tổng riêng thứ n của chuỗi hàm (4.6) và S_n là tổng riêng thứ n của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx$, ta có:

$$S_n - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

$$= \int_a^b [f_n(x) - f(x)]dx \text{ , suy ra}$$

$$\left| S_n - \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)]\, dx \right| \le \int_a^b \left| f_n(x) - f(x) \right| dx \quad \forall x \in [a; b].$$

Do dãy hàm $f_n(x)$ hội tụ đều trên [a; b] đến f(x) nên, với ε là một số d- ơng bất kỳ, tồn tại n_0 sao cho khi $n > n_0$

$$\left| f(x) - f(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{b - a} \quad \forall x \in [a; b],$$

kéo theo

$$\left| S_n - \int_a^b f(x)dx \right| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b - a} dx = \varepsilon \ \forall n > n_0.$$

Điều này chứng tỏ S_n hội tụ đến $\int_a^b f(x)dx$ và ta có đẳng thức (4.9).

Định lý 3: Nếu tất cả các số hạng $u_n(x)$ của chuỗi hàm (4.6) là có đạo hàm liên tục trên khoảng [a; b] và chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ hội tụ đều trên [a; b] thì hàm tổng f(x) của chuỗi (4.6) có đạo hàm trên [a; b] và

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \cdots + u'_n(x) + \cdots$$

tức là *ta có thể lấy đạo hàm của chuỗi (4.6) theo từng số hạng.*

Chứng minh: Các số hạng của chuỗi (4.6) có thể viết d- ới dạng

$$u_n(x) = \int_a^x u_n'(t)dt + u_n(a) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Gọi f*(x) là tổng của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$. Theo định lý 1, f*(x) là hàm số liên tục trên [a; b]. Hiển nhiên là nếu một chuỗi hàm hội tụ đều trên một miền X nào đó thì nó hội tụ trên mọi miền con của miền X, do đó, với mỗi $x \in [a; b]$ cố định, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)$ hội tụ đều trên [a; x] đến hàm f*(t). Theo định lý 2 ta có

$$\int_a^x f^*(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n'(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(a)].$$

Mặt khác, theo tính chất của các chuỗi số hội tụ ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(a)] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = f(x) - f(a).$$

Vậy $\int_a^x f^*(t)dt = f(x) - f(a)$, hay $f(x) = \int_a^x f^*(t)dt + f(a)$, suy ra

$$f'(x) = \left[\int_a^x f^*(t)dt + f(a)\right]_x' = f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Đây chính là điều phải chứng minh.

§5. CHU□I LU□ TH□A

I. MIỀN HỘI TỤ CỦA CHUỖI LUỸ THỪA

Xét chuỗi hàm dạng "đa thức vô hạn"[(4)]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \qquad (5.1)$$

Ta gọi chuỗi hàm loại này là *chuỗi luỹ thừa*.

Hiển nhiên là chuỗi (5.1) hội tụ và có tổng bằng a_0 khi x = 0. Để tìm hiểu về miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa, tr- ớc hết ta chứng minh bổ đề sau đây:

Bổ đề Abel: Nếu chuỗi luỹ thừa (5.1) hội tụ khi $x = x_0 \neq 0$ thì nó hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm thuộc khoảng $(-|x_0|; |x_0|)$.

[(4)] Khi sử dụng ký hiệu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ta quy - ớc $x^0 = 1$, kể cả khi x = 0.

Chứng minh: Từ giả thiết chuỗi (5.1) hội tụ khi $x = x_0$ suy ra dãy số $u_n = a_n x_0^n$ có giới hạn 0, do đó nó bị chặn:

$$|a_n x_0^n| \le K \text{ (K là hằng số; n = 0, 1, 2, 3, …).}$$

Khi $0 < |x| < |x_0|$ ta có

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| . \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le K . \left|\frac{x}{x_0}\right|^n .$$

Chuỗi số dương với số hạng tổng quát ở vế phải là một chuỗi số nhân có công bội không âm và nhỏ hơn 1, do đó nó hội tụ. Theo dấu hiệu so sánh thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ cũng hội tụ, tức là chuỗi (5.1) hội tụ tuyệt đối.

Để xác định miền hội tụ ta xét tập số

$$\overline{X} = \{ |\bar{x}| : \bar{x} \neq 0 \text{ và chuỗi (5.1) hội tụ khi } x = \bar{x} \}.$$

Loại trừ trường hợp chuỗi (5.1) phân kỳ tại mọi điểm $x \neq 0$, $\overline{X}$ là một tập hợp không rỗng. Nếu tập hợp $\overline{X}$ không bị chặn trên thì chuỗi (5.1) hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm. Thật vậy, trong trường hợp này, với mọi $x \in \mathbb{R}$ tồn tại $|\bar{x}| \in \overline{X}$ sao cho $|x| < |\bar{x}|$. Khi đó, theo bổ đề Borel, chuỗi (5.1) hội tụ tuyệt đối tại điểm x.

Trường hợp tập hợp $\overline{X}$ bị chặn trên $\rho = \sup \overline{X}$ là một số dương, theo tính chất của cận trên đúng, kết hợp với bổ đề Borel, ta dễ dàng suy ra được rằng chuỗi luỹ thừa (5.1) hội tụ tuyệt đối khi $|x| < \rho$ và phân kỳ khi $|x| > \rho$.

Như vậy, *loại trừ trường hợp chuỗi luỹ thừa (5.1) phân kỳ tại mọi điểm $x \neq 0$, tồn tại số $\rho > 0$, hoặc $\rho = +\infty$, sao cho chuỗi đó hội tụ tuyệt đối khi $|x| < \rho$ và phân kỳ khi $|x| > \rho$.*

Ta gọi ρ là *bán kính hội tụ* và khoảng (−ρ; ρ) là *khoảng hội tụ* của chuỗi luỹ thừa (5.1). Trường hợp chuỗi luỹ thừa phân kỳ tại mọi điểm $x \neq 0$ ta nói nó có bán kính hội tụ $\rho = 0$.

Như vậy, *miền hội tụ của một chuỗi luỹ thừa là một trong các khoảng* số [−ρ ; ρ], (−ρ; ρ), [−ρ ; ρ), (−ρ ; ρ], *tuỳ theo sự hội tụ của nó tại các đầu mút của khoảng hội tụ.*

Việc xác định miền hội tụ của một chuỗi luỹ thừa có thể thực hiện dễ dàng nếu ta tìm được bán kính hội tụ của nó. Để tìm bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa (5.1) bạn có thể sử dụng các công thức:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|; \tag{5.2}$$

hoặc

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} . \tag{5.3}$$

Các công thức (5.2), (5.3) có thể chứng minh dễ dàng bằng cách sử dụng dấu hiệu d'Alambert và dấu hiệu Cauchy, với giả thiết giới hạn ở vế phải tồn tại (hữu hạn hoặc bằng $+\infty$).

Chú ý: Chuỗi luỹ thừa còn đ- ợc xét d- ới dạng tổng quát hơn (x_0 là một hằng số):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots \quad (5.1^*)$$

Tuy nhiên, ta có thể chuyển chuỗi (5.1*) về dạng (5.1) bằng cách đổi qua biến $y = x - x_0$. Khoảng hội tụ của chuỗi (5.1*) là khoảng $(x_0 - \rho\,;\, x_0 + \rho)$, còn miền hội tụ của nó là một trong các khoảng $[x_0 - \rho\,;\, x_0 + \rho]$, $(x_0 - \rho\,;\, x_0 + \rho)$, $[x_0 - \rho\,;\, x_0 + \rho)$, $(x_0 - \rho\,;\, x_0 + \rho]$.

Ví dụ 1: Xét chuỗi : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

Trong tr- ờng hợp này $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$; $\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1$. Tại x =1 chuỗi phân kỳ (chuỗi điều hoà tổng quát), còn tại x = – 1 chuỗi hội tụ theo dấu hiệu Leibnitz. Vậy, miền hội tụ của chuỗi đã cho là khoảng [–1; 1).

Từ kết quả này ta suy ra miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{\sqrt{n}}$ là khoảng $[x_0 - 1;\, x_0 + 1)$.

Ví dụ 2: Xét chuỗi : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

Trong tr- ờng hợp này $a_n = \frac{1}{n^2}$; $\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = 1$. Tại x = ± 1 chuỗi hội tụ tuyệt đối. Vậy, miền hội tụ của chuỗi đã cho là khoảng [–1; 1].

Ví dụ 2: Xét chuỗi : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$.

Trong tr- ờng hợp này $a_n = \frac{1}{n^n}$; $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$. Vậy, miền hội tụ của chuỗi đã cho là khoảng (–∞ ; +∞).

II. TÍNH CHẤT HÀM SỐ CỦA CHUỖI LUỸ THỪA

Xét chuỗi luỹ thừa (5.1) trong khoảng hội tụ (–ρ; ρ). Gọi f(x) là hàm tổng của nó:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \quad (5.1)$$

Định lý 1: Với mọi số d- ơng r < ρ, chuỗi luỹ thừa (5.1) hội tụ đều trên khoảng [–r; r].

Chứng minh: Với mọi x∈[–r ; r], ta có

$$|a_n x^n| = |a_n|.|x|^n \le |a_n|.r^n .$$

Chuỗi (5.1) hội tụ tại mọi điểm thuộc khoảng hội tụ (–ρ; ρ), do đó chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.r^n$ hội tụ.

Theo dấu hiệu Weierstrass, chuỗi (5.1) hội tụ đều trên [–r ; r].

Sử dụng định lý 1, kết hợp với các định lý đã chứng minh về tính chất hàm số của chuỗi hàm, ta dễ dàng chứng minh các tính chất cơ bản của hàm tổng f(x).

Định lý 2: Hàm tổng f(x) của chuỗi luỹ thừa (5.1) là một hàm số liên tục trong khoảng hội tụ của nó.

Chứng minh: Gọi x_0 là một điểm bất kỳ thuộc khoảng hội tụ $(-\rho; \rho)$. Lấy bất kỳ số r trong khoảng giữa $|x_0|$ và ρ ($|x_0| < r < \rho$), ta có $x_0 \in [-r ; r]$. Chuỗi (5.1) hội tụ đều trên $[-r ; r]$, do đó f(x) là hàm số liên tục trên $[-r ; r]$, trong đó có điểm x_0.

Định lý 3: Với mọi x thuộc khoảng hội tụ $(-\rho; \rho)$, ta có thể lấy tích phân của chuỗi hàm (5.1) theo từng số hạng nh- sau:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n\,dt = a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \ldots + \frac{a_{n-1}x^n}{n} + \ldots \tag{5.4}$$

Chứng minh: Từ định lý 1 ta dễ dàng suy ra rằng chuỗi hàm (5.1) hội tụ đều trên mọi khoảng đóng $[a; b] \subset (-\rho; \rho)$, do đó ta có thể lấy tích phân của chuỗi (5.1) theo từng số hạng:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_n t^n\,dt .$$

Với a = 0, b = x ta có công thức (5.4).

Định lý 4: Trong khoảng hội tụ $(-\rho; \rho)$ hàm tổng của chuỗi luỹ thừa (5.1) có đạo hàm và ta có thể lấy đạo hàm của nó theo từng số hạng của chuỗi đó:

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^3 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots \tag{5.5}$$

Chứng minh: Với mọi $x \in (-\rho; \rho)$ ta lấy một số d-ơng $\bar{r}$ trong khoảng giữa $|x|$ và ρ, tức là $|x| < \bar{r} < \rho$. Số hạng tổng quát của chuỗi hội tụ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\bar{r}^n$ có giới hạn bằng 0 nên nó bị chặn:

$$|a_n|\,\bar{r}^n \le L \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots (\text{L là hằng số}).$$

Ta có:

$$n.|a_n|.|x|^{n-1} = \frac{1}{\bar{r}}\,n.|a_n|.\bar{r}^n.\left|\frac{x}{\bar{r}}\right|^{n-1}. \le \frac{L}{\bar{r}}.n.\left|\frac{x}{\bar{r}}\right|^{n-1}. \tag{5.6}$$

Chuỗi với số hạng tổng quát ở vế phải của bất đẳng thức (5.6) hội tụ theo dấu hiệu dAlambert (bạn hãy tự kiểm tra!), do đó chuỗi (5.5) hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm x thuộc khoảng $(-\rho; \rho)$. Điều này chứng tỏ bán kính hội tụ ρ' của chuỗi (5.5) không nhỏ hơn bán kính hội tụ của chuỗi (5.1): $\rho' \ge \rho$.

Với mọi số d-ơng $r < \rho$ ta có đồng thời $r < \rho'$, do đó chuỗi (5.5) hội tụ đều trên $[-r ; r]$. Theo định lý đã chứng minh ở §4 của ch-ơng này, trên khoảng $[-r; r]$ ta có thể lấy đạo hàm của chuỗi (5.1) theo từng số hạng, do đó ta có công thức (5.5). Do r có thể lấy gần ρ một cách tuỳ ý, điều này cũng đúng trong khoảng $(-\rho; \rho)$.

Hệ quả: Trong khoảng hội tụ $(-\rho;\ \rho)$ chuỗi luỹ thừa (5.1), hàm tổng f(x) của nó có đạo hàm mọi cấp và ta có thể lấy đạo hàm cấp k của nó bằng cách lấy đạo hàm cấp k theo từng số hạng:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n x^n)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!a_n}{(n-k)!}x^{n-k}$$

$$= k!a_k + \frac{k!a_{k+1}}{1!}x + \frac{k!a_{k+2}}{2!}x^2 + \ldots + \frac{n!a_{k+2}}{k!}x^{n-1} + \ldots$$

Chú ý: Tất cả các mệnh đề chứng minh trên đây có thể áp dụng cho chuỗi luỹ thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

trong khoảng hội tụ $(x_0 - \rho\ ;\ x_0 + \rho)$.

III. KHAI TRIỂN HÀM SỐ THÀNH CHUỖI LUỸ THỪA

Chuỗi luỹ thừa (5.1) có các tổng riêng là các đa thức. Hơn nữa, nh- đã chỉ ra ở trên, hàm tổng của nó có những tính chất t- ơng tự nh- đa thức. Do đó việc biểu diễn hàm số d- ới dạng chuuỗi luỹ thừa có vai trò rất quan trọng trong giải tích toán học cũng nh- trong các lĩnh vực ứng dụng.

a. Chuỗi Taylor

Giả sử hàm số f(x) có đạo hàm mọi cấp trên khoảng $[x_0 - h\ ;\ x_0 + h]$, hoặc trên một trong các khoảng $[x_0\ ;\ x_0 + h]$, $[x_0 - h\ ;\ x_0]$. Khi đó ta có thể biểu diễn f(x) theo công thức Taylor hữu hạn, với n lớn tuỳ ý:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x). \qquad (5.7)$$

Điều này khiến ta nghĩ đến chuỗi luỹ thừa:

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots \qquad (5.8)$$

với các hệ số

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},\ \ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ \ldots$$

Các hệ số này đ- ợc gọi l*à hệ số Taylor*. Chuỗi (5.8), bất kể tổng của nó có bằng f(x) hay không, đ- ợc gọi là *chuỗi Taylor của hàm số f(x)*.

Ng- ời ta th- ờng xét chuỗi Taylor trong tr- ờng hợp $x_0 = 0$:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \qquad (5.9)$$

Chuỗi (5.9) còn đ- ợc gọi là *chuỗi MacLaurin.*

b. Khai triển hàm số thành chuỗi Taylor

Nếu trong một lân cận nào đó của điểm x_0 chuỗi (5.7) hội tụ và có tổng bằng f(x) thì ta có công thức

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \quad (5.10)$$

Công thức (5.10) đ- ợc gọi là *công thức khai triển Taylor của hàm số f(x).*

Liên hệ với công thức Taylor hữu hạn (5.7) ta có định lý sau đây:

Định lý 5: Hàm số f(x) trên khoảng $[x_0 - h ; x_0 + h]$ có thể khai triển đ- ợc thành chuỗi Taylor (5.10) khi và chỉ khi tại mọi điểm $x \in [x_0 - h ; x_0 + h]$ phần d- $r_n(x)$ của công thức Taylor hữu hạn (5.7) có giới hạn bằng 0 khi $n \to +\infty$.

Hệ quả: Nếu trên khoảng $[x_0 - h ; x_0 + h]$ hàm số f(x) có đạo hàm mọi cấp và giá trị tuyệt đối của đạo hàm tất cả các cấp của nó bị chặn bởi một hằng số chung

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le L \quad \forall x \in [-h ; h] \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(L hằng số L không phụ thuộc n) thì trên khoảng đó hàm số f(x) có thể khai triển thành chuỗi Taylor (5.10).

Thật vậy, sử dụng công thức phần d- dạng Lagrange, ta có

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

trong đó c là một điểm trung gian nào đó giữa x_0 và x. Hiển nhiên là $c \in [-h ; h]$, do đó

$$\left|r_n(x)\right| = \left|f^{(n+1)}(c)\right| \cdot \frac{\left|x - x_0\right|}{(n+1)!} \le \frac{Lh^{n+1}}{(n+1)!} \quad \forall x \in [-h ; h].$$

Chuỗi với số hạng tổng quát $\frac{Lh^{n+1}}{(n+1)!}$ hội tụ theo dấu hiệu d'Alambert, do đó $\frac{Lh^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ khi $n \to +\infty$, từ đây suy ra $\lim_{n \to +\infty} r_n(x) = 0$ với mọi $x \in [-h ; h]$.

Định lý 6: Nếu trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$ hàm số f(x) khai triển đ- ợc thành chuỗi luỹ thừa

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots \quad (5.11)$$

thì chuỗi luỹ thừa đó chính là chuỗi Taylor của hàm f(x).

Chứng minh: Theo hệ quả của định lý 4, trong khoảng hội tụ của nó chuỗi (1.11) có đạo hàm mọi cấp và ta có thể lấy đạo hàm theo từng số hạng, do đó

$f'(x) = 1!\, a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots$
$f''(x) = 2!.a_2 + +3.2.\, a_3(x - x_0) + 4.3.a_4(x - x_0)^2 + \ldots$
....
$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n + 1).n..2(x - x_0) + \ldots$
....

Tại điểm $x = x_0$ ta có:

$f(x_0) = a_0$, $f'(x_0) = 1!\, a_1$, $f''(x_0) = 2!\, a_2$, .., $f^{(n)}(x_0) = n!\, a_n$.

Từ đây suy ra

$$a_0 = f(x_0),\ \ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!},\ \ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},\ \ \dots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ \dots$$

chứng tỏ chuỗi (5.11) là chuỗi Taylor của hàm f(x).

Thông th- ờng ng- ời ta hay sử dụng các công thức khai triển hàm số theo luỹ thừa của x, tức là sử dụng chuỗi MacLaurin (tr- ờng hợp đặc biệt của chuỗi Taylor, khi $x_0 = 0$):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

IV. KHAI TRIỂN MỘT SỐ HÀM CƠ BẢN

a. Khai triển hàm số mũ và các hàm l□ợng giác cơ bản

- Hàm số $f(x) = e^x$ có đạo hàm mọi cấp trên ¡ và đạo hàm cấp n bất kỳ của nó bị chặn trên đoạn [– r ; r] bất kỳ (r là số d- ơng bất kỳ) bởi một hằng số không phụ thuộc n:

$$0 < f^{(n)}(x) = e^x \le e^r\ \forall x \in ¡ .$$

  Theo hệ quả của định lý 5 ta có công thức khai triển (Các hệ số Taylor đã đ- ợc tính khi lập công thức Taylor hữu hạn, §4, ch- ơng 3):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \qquad (5.12)$$

  Vì r là số d- ơng bất kỳ, có thể lấy lớn tuỳ ý, nên công thức khai triển (5.12) có thể áp dụng với mọi x∈ ¡ .

- T- ơng tự, các hàm sinx, cosx có đạo hàm mọi cấp trên ¡ và

$$\left|(\sin x)^{(n)}\right| = \left|\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right| \le 1;\ \ \left|(\cos x)^{(n)}\right| = \left|\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right| \le 1\ \ \forall x \in ¡ .$$

  Theo hệ quả của định lý 5, với các hệ số Taylor đã tính ở §4, ch- ơng 3, ta có các công thức khai triển:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{n!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{n!} + \dots$$

b. Chuỗi nhị thức

Ta đã biết công thức Taylor hữu hạn đối với hàm số $f(x) = (1 + x)^\alpha$ ($\alpha \notin$ ¥):

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n + r_n(x).$$

Chuỗi Taylor của hàm số này là.

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots \qquad (5.13)$$

Chuỗi (5.13) đ- ợc gọi là *chuỗi nhị thức*. Sử dụng công thức (5.2) ta dễ dàng xác định đ- ợc bán kính hội tụ $\rho = 1$. Có thể chứng minh đ- ợc rằng Trong khoảng hội tụ $(-1; 1)$ phần d- $r_n(x)$ của công thức Taylor hữu hạn có giới hạn 0 khi $n \to +\infty$, do đó ta có công thức khai triển:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

c. Khai triển hàm số logarit

Với $-1 < x < 1$, chuỗi số nhân với số hạng đầu bằng 1 và công bội $q = -x$ hội tụ và có tổng bằng $\frac{1}{1+x}$:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots$$

Lấy tích phân theo từng số hạng (tích phân từ 0 đến x) ta đ- ợc công thức khai triển hàm số $\ln(1 + x)$ trong khoảng $(-1, 1)$:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots \qquad (5.14)$$

Chú ý: Abel đã chứng minh rằng nếu tại đầu mút ρ (hoặc $-\rho$) của khoảng hội tụ chuỗi luỹ thừa hội tụ thì hàm tổng của nó liên tục bên phải (bên trái) tại đầu mút đó. Do đó công thức khai triển (5.14) có thể áp dụng với $-1 < x \le 1$.

BÀI TỐP CH□□NG 7

1. Tính tổng của các chuỗi số

a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$ c) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$

2. Sử dụng các dấu hiệu so sánh hãy xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

a) $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$

b) $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\ldots$

d) $\frac{1}{\sqrt{1.3}}+\frac{1}{\sqrt{3.5}}+\frac{1}{\sqrt{5.7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}+\ldots$

e) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}+\ldots$

f) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n^2+3n+1}$ g) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^4+4n^3-1}}$ h) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$

i) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2n^2+3n+1}$ k) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{2n^2+3n+1}$ l) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3+2n-1}{3n^4+4n^2+1}$

3. Sử dụng dấu hiệu Dalamber, hãy xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}$ c) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{3^n}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2.5\ldots(3n-1)}{1.5.9\ldots(4n-3)}$ e) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1000^n}{n!}$ f) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

g) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ h) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$ i) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}}$

4. Sử dụng dấu hiệu Cauchy, hãy xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{(2n+1)^n}$ c) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(5n^2+n-1)^n}{(4n^2+3)^n}$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}2^{-n}$ e) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}3^{-n}$ f) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{n+1}}{(3n+2)^n}$

5. Sử dụng dấu hiệu tích phân, hãy xét sự hội tụ của chuỗi số:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$

6. Chứng minh rằng nếu các chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2$ và $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n^2$ hội tụ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n b_n|$ cũng hội tụ.

7. Xét sự hội tụ của chuỗi số và, trong tr- ờng hợp chuỗi hội tụ, hãy chỉ rõ đặc điểm hội tụ (hội tụ tuyệt đối hay hội tụ t- ơng đối):

a) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+\ldots$

b) $1-\frac{1}{9}+\frac{1}{25}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$

c) $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)} + \ldots$

d) $\sin x + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 3x}{9} - \ldots + \frac{\sin nx}{n^2} + \ldots$

e) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2^2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\frac{1}{2^n} + \ldots$

f) $\frac{1}{2} - \frac{8}{4} + \frac{27}{8} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n} + \ldots$

8. Tìm miền hội tụ của các chuỗi sau:

a) $\ln x + \ln^2 x + \ldots + \ln^n x + \ldots$

b) $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^3} + \ldots + \frac{1}{1+x^n} + \ldots$

c) $1.2.x + 2.3.x^2 + \ldots + n(n+1)x^n + \ldots$

d) $\frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^4} + \frac{x^3}{1+x^6} + \ldots + \frac{x^n}{1+x^{2n}} + \ldots$

9. Xét sự hội tụ đều của các chuỗi hàm sau:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$ $\quad -\infty < x < +\infty$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ $\quad -\infty < x < +\infty$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{1+nx}}$ $\quad 0 \le x < +\infty$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$ $\quad [a; +\infty)$ (a là một hằng số lớn hơn 1]

10. Hãy khai triển các hàm số sau thành chuỗi Mac-Laurin

a) $f(x) = \text{arctg}x$ b) $f(x) = \arcsin x$

c) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ d) $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$

11. Tính tổng của các chuỗi sau:

a) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$

b) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$

c) $x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n + \ldots$

d) $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \ldots + (-1)^{n+1}n^2x^n + \ldots$