CHƯƠNG 1

TẬP HỢP VÀ LÝ THUYẾT SỐ THỰC

§ 1. TẬP HỢP

1/ 1.1 Khái niệm và ký hiệu

Tập hợp là một khái niệm cơ bản của toán học. Một cách trực quan, ta có thể hiểu tập hợp là một nhóm các đối tượng bất kỳ. Thông thường tập hợp được gọi tắt là "tập".

Cho trước một tập không rỗng X. Nếu một đối tượng x là phần tử của tập X, ta thường ký hiệu $x \in X$ và đọc là *x thuộc* X. Tập không có phần tử nào gọi là *tập rỗng*, và được ký hiệu là $\emptyset$.

Một tập hợp A được gọi là *bị chứa trong* X hoặc *là tập con* của X, ta ký hiệu

$$A \subseteq X \text{ hoặc } X \supseteq A$$

khi và chỉ khi tất cả các phần tử của A đều là phần tử của X. Đôi khi ta còn gọi là X *chứa* A. Ký hiệu $A = B$ có nghĩa là $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$. Khi đó, ta nói A và B là hai tập *bằng nhau*.

Phương pháp chính để xác định một tập hợp là chỉ ra điều kiện mà các phần tử thuộc tập đó thỏa mãn. Ký hiệu $\{x : P\}$ có nghĩa đây là tập hợp của tất cả x thỏa mãn tính chất P. Ví dụ, $\{x : (x-4)^2 = 4\} = \{2, 6\} = \{6, 2\}$.

Tuy nhiên, việc định nghĩa tập hợp qua điều kiện có thể dẫn tới những mâu thuẫn nếu không cẩn thận. Ví dụ, lấy $R = \{X : X \notin X\}$. Khi đó $R \notin R$ suy ra $R \in R$ và ngược lại (nghịch lý của Bertrand Russell).

Chúng ta quy ước chung là dấu gạch chéo trên một ký hiệu có nghĩa là "không", chẳng hạn $a \neq b$, có nghĩa "a không bằng b", ký tự "$\notin$" có nghĩa "không phải là một phần tử của". Như vậy $x \notin A$ có nghĩa x không phải là một phần tử của A, như $3 \notin \{1, 2\}$.

Cho hai tập hợp bất kỳ X và Y, *tích Des Cartes* của chúng, ký hiệu $X \times Y$ là tập hợp của tất cả các cặp có thứ tự (x, y) với x thuộc X và y thuộc Y. Ta hiểu khái niệm cặp có thứ tự theo nghĩa: $(x,y) = (x',y')$ nếu và chỉ nếu $x = x', y = y'$.

$$X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Ví dụ 1.1. Với $X = \{x,y,z\}, Y = (a,b)$, ta có

$$X \times Y = \{(x,a),(x,b),(y,a),(y,b),(z,a),(z,b)\};$$
$$Y \times X = \{(a,x),(b,x),(a,y),(b,y),(a,z),(b,z)\}.$$

Tích Des Cartes của n tập hợp được định nghĩa và ký hiệu tương tự.

[1/] 1.2 Các phép toán tập hợp

Sau đây là các phép toán thông dụng đối với tập hợp.

- Phép hợp. Ta gọi *hợp* của A và B là tập $A \cup B = \{x : x \in A$ hoặc $x \in B\}$, tương tự:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists i \in I, x \in A_i\}.$$

- Phép giao. *Giao* hoặc *tích* của A và B là tập $A \cap B = \{x : x \in A$ và $x \in B\}$, tương tự:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

  Đôi khi người ta dùng ký hiệu $AB(\prod_{i \in I} A_i)$ thay cho $A \cap B$ $(\bigcap_{i \in I} A_i)$.

  Nếu $AB = \emptyset$ thì ta nói A và B *rời nhau*, và khi đó ta có thể viết $A + B$ thay cho $A \cup B$.

- Phép trừ. *Hiệu* của A đối với B là tập $A \setminus B = \{x : x \in A$ nhưng $x \notin B\}$.

- Phép lấy phần bù. *Phần bù* của tập A là tập $A^c = X \setminus A = \{x : x \notin A\}$.

- Hiệu đối xứng. *Hiệu đối xứng* của A và B là tập $A \triangle B = A \setminus B + B \setminus A$.

Các phép toán tập hợp có một số tính cơ bản sau:

- Tính giao hoán:

$$A \cup B = B \cup A; AB = BA; A \triangle B = B \triangle A.$$

- Tính kết hợp:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); (AB)C = A(BC); A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C.$$

- Tính phân phối:

$$A(B \cup C) = AB \cup AC; A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C); A(B \triangle C) = (AB) \triangle (AC).$$

- Công thức De Morgan:

$$\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c; \quad \Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c.$$

* Chú ý: $(A \setminus B) \cup B = A$ chỉ đúng khi $B \subset A$, $(A \cup B) \setminus B = A$ chỉ đúng khi $AB = \varnothing$.

Ví dụ 1.2. Ta có

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (0, 1 - 1/n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (0, 1 - 1/n] = (0, 1)$$

và

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [1 - 1/n, 2) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (1 - 1/n, 2) = [1, 2).$$

1/ 1.3 Lớp tập hợp và dãy tập hợp

Tập hợp mà mỗi phần tử của nó là tập con của X được gọi là một *lớp* (các tập con của X). Ta dùng các chữ hoa $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \ldots$ để ký hiệu các lớp.

Lớp gồm tất cả các tập con của X được ký hiệu là 2^X:

$$2^X = \{A \mid A \subset X\}.$$

Chú ý là 2^X chứa cả tập $\varnothing$ và X. Hiển nhiên nếu tập X hữu hạn gồm n phần tử thì 2^X có 2^n phần tử.

Như vậy, ta thấy: $B \subset A \Leftrightarrow B \in 2^A$.

Ví dụ 1.3. Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3\}$.

- $\mathscr{A} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ là lớp các tập chỉ gồm 1 phần tử trong X.

- $2^X = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Câu hỏi: Ký hiệu $\mathbb{N}$ là tập số tự nhiên $\{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{Q}$ là tập số hữu tỷ, liệu $\mathbb{N}$ có là phần tử của $2^{\mathbb{Q}}$ không ?

Lớp $\mathscr{C}$ gồm các tập rời nhau được gọi là *phân hoạch* của tập X nếu $\bigcup_{C \in \mathscr{C}} C = X$.

Ví dụ 1.4. Lớp gồm các tập $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\}, C = \{5\}$ là một phân hoạch của tập $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Lớp gồm một số đếm được các tập con $\{A_n, n = 1, 2, \dots\}$ được gọi là *dãy* (các tập). Ta nói dãy các tập $\{A_n\}$ là *đơn điệu tăng (giảm)* và viết $A_n \uparrow$ $(A_n \downarrow)$, nếu $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ $(A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots)$.

Trong trường hợp dãy tập hợp $\{A_n\}$ đơn điệu tăng (giảm) và $\bigcup_n A_n = A$ $(\bigcap_n A_n = A)$ thì ta ký hiệu là $A_n \uparrow A$ $(A_n \downarrow A)$.

Ví dụ 1.5. Với $X = \{1, 2, 3, \dots\}$, khi đó $\mathscr{B} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \dots\}$ là một dãy đơn điệu tăng các tập con của X.

Giả sử $\{A_n\}$ là dãy các tập con của X. Ta gọi *giới hạn trên* và *giới hạn dưới* của dãy này là các tập tương ứng sau đây:

$$\overline{\lim} A_n = \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

$$\underline{\lim} A_n = \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Ta thấy rằng $x \in \limsup A_n$ khi và chỉ khi có vô số A_n chứa x; $x \in \liminf A_n$ khi và chỉ khi tồn tại k (phụ thuộc x) sao cho với mọi $n \geq k$, A_n chứa x. Do đó

$$\liminf A_n \subset \limsup A_n.$$

Nếu giới hạn trên và giới hạn dưới của dãy $\{A_n\}$ bằng nhau thì ta nói dãy $\{A_n\}$ *có giới hạn* và viết:

$$\lim A_n = \limsup A_n = \liminf A_n.$$

Có thể thấy rằng

$$\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ nếu } A_n \uparrow; \qquad \lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \text{ nếu } A_n \downarrow.$$

Nếu $A_n \downarrow$ và $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$ thì ta viết $A_n \downarrow A$. Nếu $A_n \uparrow$ và $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ thì ta viết $A_n \uparrow A$.

Ví dụ 1.6. Với A, B là các tập cho trước, xét dãy $A_n = A$ nếu n lẻ và $A_n = B$ nếu n chẵn. Ta có

$$\overline{\lim} A_n = A \cup B; \quad \underline{\lim} A_n = A \cap B.$$

§ 2. TẬP HỢP SỐ THỰC

1/2.1 Khái niệm tập hợp số thực

1.1 Định nghĩa. Tập hợp số thực $\mathbb{R}$ là tập hợp các phần tử $x, y, z, \dots$ trên đó có hai phép tính cộng, nhân và quan hệ thứ tự thoả mãn các tiên đề dưới đây, gọi là *hệ các tiên đề về số thực*.

(I) CÁC TIÊN ĐỀ ĐỐI VỚI PHÉP CỘNG

Phép toán

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

(phép cộng) được định nghĩa bằng cách gán mỗi cặp có thứ tự (x, y) gồm hai phần tử x, y thuộc $\mathbb{R}$ với một phần tử $x + y \in \mathbb{R}$ nào đó, được gọi là tổng của x và y. Phép toán này phải thoả mãn các điều kiện sau:

1_+. Tồn tại phần tử trung hòa hoặc đồng nhất 0 (đọc là không) sao cho

$$x + 0 = 0 + x = x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

2_+. Với mọi phần tử $x \in \mathbb{R}$ tồn tại một phần tử $-x \in \mathbb{R}$ được gọi là đối của x sao cho

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

3_+. Phép cộng có tính kết hợp, tức là biểu thức

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

4_+. Phép cộng là giao hoán, nghĩa là

$$x + y = y + x, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Nếu một phép toán được định nghĩa trên một tập G thoả mãn các tiên đề $1_+, 2_+$, và 3_+, chúng ta nói là một *cấu trúc nhóm* được định nghĩa trên G hoặc G là một *nhóm*. Nếu phép toán này được gọi là phép cộng thì nhóm được gọi là nhóm *cộng*. Nếu ta cũng biết rằng phép toán là giao hoán, tức là điều kiện 4_+ là đúng, nhóm sẽ được gọi là *giao hoán* hoặc *Abel*.

Do vậy, các Tiên đề $1_+ - 4_+$ khẳng định $\mathbb{R}$ là một nhóm cộng Abel.

(II) CÁC TIÊN ĐỀ ĐỐI VỚI PHÉP NHÂN

Một phép toán

$$\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

(phép nhân) được định nghĩa bằng cách gán mỗi cặp có thứ tự (x, y) gồm hai phần tử x, y thuộc $\mathbb{R}$ với một phần tử $x \cdot y \in \mathbb{R}$ nào đó, được gọi là tích của x và y. Phép toán này phải thoả mãn các điều kiện sau:

$1_\bullet$. Tồn tại phần tử trung hòa hoặc đồng nhất $1 \in \mathbb{R} \setminus 0$ (gọi là một) sao cho

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$2_\bullet$. Với mọi phần tử $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tồn tại một phần tử $x^{-1} \in \mathbb{R}$ được gọi là nghịch đảo của x sao cho

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

$3_\bullet$. Phép nhân $\bullet$ có tính kết hợp, nghĩa là

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

$4_\bullet$. Phép nhân $\bullet$ có tính giao hoán, nghĩa là

$$x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Chú ý là đối với phép nhân, tập hợp $\mathbb{R} \setminus 0$, có thể được kiểm tra, là một nhóm (*nhân*).

(I, II) LIÊN HỆ GIỮA PHÉP CỘNG VÀ PHÉP NHÂN

Phép nhân có tính phân phối đối với phép cộng, nghĩa là

$$(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Lưu ý là do tính giao hoán của phép nhân, đẳng thức này vẫn đúng nếu thứ tự các nhân tử được hoán đổi ở mỗi vế.

Nếu hai phép toán thoả mãn các tiên đề này được xác định trên một tập G thì G được gọi là một *trường*.

(III) CÁC TIÊN ĐỀ THỨ TỰ

Giữa các phần tử của $\mathbb{R}$ tồn tại một quan hệ $\leq$, nghĩa là với các phần tử $x, y \in \mathbb{R}$ có thể xác định xem liệu $x \leq y$ hoặc không. Ở đây các điều kiện sau phải đúng:

$1_{\leq}$. $\forall x \in \mathbb{R}\ (x \leq x)$.

$2_{\leq}$. $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (x = y)$.

$3_{\leq}$. $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$.

$4_{\leq}$. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}\ (x \leq y) \vee (y \leq x)$.

Quan hệ $\leq$ trên $\mathbb{R}$ được gọi là *không bằng nhau (bất đẳng thức)*.

Một tập trên đó tồn tại một quan hệ giữa các cặp phần tử thoả mãn các tiên đề $1_{\leq}, 2_{\leq}$, và $3_{\leq}$, như ta biết, được gọi là *được sắp từng phần*. Nếu có thêm tiên đề $4_{\leq}$, nghĩa là có thể so sánh hai phần tử bất kỳ, tập hợp là *được sắp tuyến tính*. Do đó tập các số thực được sắp tuyến tính do quan hệ không bằng nhau giữa các phần tử.

(I, III) LIÊN HỆ GIỮA PHÉP CỘNG VÀ THỨ TỰ TRÊN $\mathbb{R}$

Nếu x, y, z là các phần tử thuộc $\mathbb{R}$, thì

$$(x \leq y) \Rightarrow (x+z \leq y+z).$$

(II, III) LIÊN HỆ GIỮA PHÉP NHÂN VÀ THỨ TỰ TRÊN $\mathbb{R}$

Nếu x và y là các phần tử thuộc $\mathbb{R}$, thì

$$(0 \leq x) \wedge (0 \leq y) \Rightarrow (0 \leq x\cdot y).$$

(IV) TIÊN ĐỀ VỀ CẬN TRÊN

Mọi tập $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ bị chặn trên có cận trên đúng.

Trên đây, ta đề cập đến khái niệm tập bị chặn trên. Khái niệm tập bị chặn được định nghĩa như sau (các quan hệ $<, \geq, >$ được hiểu theo nghĩa thông thường).

1.2 Định nghĩa. Ta nói rằng tập $A \subset \mathbb{R}$ *bị chặn trên* nếu tồn tại $z \in \mathbb{R}$ sao cho $x \leq z$ với mọi $x \in A$; phần tử z như thế được gọi là *cận trên* của tập A.

Ta nói rằng tập $A \subset \mathbb{R}$ *bị chặn dưới* nếu tồn tại $z \in \mathbb{R}$ sao cho $x \geq z$ với mọi $x \in A$; phần tử z như thế gọi là *cận dưới* của tập A.

1.3 Định nghĩa. Ta nói rằng M là *phần tử lớn nhất* của tập A nếu $M \in A$ và $x \leq M$ với mọi $x \in A$. Khi đó ta viết

$$M = \max A.$$

Tương tự ta nói m là *phần tử bé nhất* của tập A nếu $m \in A$ và $x \geq m$ với mọi $x \in A$. Khi đó ta viết

$$m = \min A.$$

1.4 Định nghĩa. Giả sử A bị chặn trên, z được gọi là *cận trên đúng* của A, nếu:

+) z là cận trên của A, tức là $x \leq z, \forall x \in A$.

+) z là cận trên bé nhất của A, tức là nếu $y < z$ thì y không phải là cận trên của A.

Cận trên đúng của A ký hiệu là $\sup A$.

Giả sử A bị chặn dưới, z được gọi là *cận dưới đúng* của A, nếu:

+) z là cận dưới của A, tức là $x \geq z, \forall x \in A$.

+) z là cận dưới lớn nhất của A, tức là nếu $y > z$ thì y không phải là cận dưới của A.

Cận dưới đúng của A ký hiệu là $\inf A$.

Như vậy theo định nghĩa ta có

$$M = \sup A = \min\{c \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A\ (x \leq c)\}$$
$$m = \inf A = \max\{c \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A\ (x \geq c)\}$$

Chú ý. Nếu A có phần tử lớn nhất $\max A$ thì $\sup A = \max A$. Nếu A có phần tử bé nhất $\min A$ thì $\inf A = \min A$.

Ví dụ 1.7. Cho $A = \{1, 5, 7, 14\} \Rightarrow \sup A = \max A = 14$.

Như vậy theo tiên đề về cận trên thì mọi tập $A \subset \mathbb{R}$ bị chặn trên đều có cận trên đúng và do đó mọi tập bị chặn dưới đều có cận dưới đúng. Tuy nhiên A chưa chắc có phần tử lớn nhất hoặc nhỏ nhất. Ta hãy xét ví dụ sau

Ví dụ 1.8. Cho $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$. Ta có $\inf A = 0$. Thật vậy, trước hết 0 là một cận dưới của A. Với $y > 0$ bất kỳ, luôn tồn tại số n thoả mãn $\frac{1}{n} < y$ và $\frac{1}{n} \in A$. Vậy y không thể là cận dưới của A hay 0 là cận dưới lớn nhất của A. Vậy $0 = \inf A$.

Tuy nhiên A không có phần tử nhỏ nhất bởi nếu tồn tại $\min A$ thì $\inf A = \min A = 0 \notin A$. Mâu thuẫn với định nghĩa về min.

Ví dụ 1.9. Tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ không có phần tử lớn nhất nhưng do A bị chặn trên nên tồn tại $\sup A = 1$.

Trên đây, chúng ta đã xem xét cụ thể về các tiên đề xây dựng lên tập số thực. Nhiều khái niệm của mục này có thể tiếp cận qua chương 1, phần 1, giáo trình "Toán cao cấp cho các nhà kinh tế". Dưới đây ta sẽ xem xét thêm một số tính chất cần thiết về số thực để sử dụng sau này.

1/2.2 Các tính chất cơ bản của tập hợp số thực

Ta gọi *số dương* là những số thực $a > 0$; *số âm* là những số thực $a < 0$, và đặt $|x| = x$ nếu $0 \leq x$, $|x| = -x$ nếu $x < 0$. Một số $a \in \mathbb{R}$ được gọi là *giới hạn* của dãy số $x_n \in \mathbb{R}$, ký hiệu $\lim x_n = a$, nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : |x_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Từ điều kiện thứ hai trong định nghĩa về cận trên cho ta thấy nếu $M = \sup A$ thì $\forall M' < M, \exists x \in A : M' < x$. Tương tự nếu $m = \inf A$ thì $\forall m' > m, \exists x \in A : x < m'$. Với các nhận xét trên ta dễ dàng có định lý sau:

1.5 Định lý. *Cho tập hợp $A \subset \mathbb{R}$ và $M = \sup A$, khi đó tồn tại dãy $x_n \in A$ (các x_n có thể trùng nhau) thoả mãn*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = M.$$

Tương tự ta cũng có với $m = \inf A$, khi đó tồn tại dãy $y_n \in A$ (các y_n có thể trùng nhau) thoả mãn

$$\lim_{n\to\infty} y_n = m.$$

1.6 Nguyên lý (Weierstrass). *Mọi dãy đơn điệu tăng (giảm) và bị chặn trên (dưới) đều hội tụ.*

Chứng minh. Cho $\{x_n\}$ là một dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên. Theo tiên đề về cận trên đúng, tập $\{x_n\}$ có $M = \sup x_n$; theo định nghĩa supremum, với mọi số dương ε có một n_ε sao cho $M - \varepsilon < x_{n_\varepsilon}$, và do tính đơn điệu tăng của dãy x_n ta có $x_{n_\varepsilon} \leq x_n$ với mọi $n \geq n_\varepsilon$. Vậy $M - x_n < \varepsilon$ với mọi $n \geq n_\varepsilon$, nghĩa là $\lim x_n = M$. ■

Ví dụ 1.10. Dãy $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ là dãy đơn điệu tăng. Ngoài ra ta có

$$x_n < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{n} < 2,$$

nên dãy x_n bị chặn. Theo nguyên lý Weierstrass, dãy x_n là hội tụ.

Các phần tử của $\mathbb{R}$: $1, 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, \ldots$ gọi là các *số tự nhiên*, ký hiệu là $\mathbb{N}$. Tập các *số nguyên* là các số $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, ký hiệu là $\mathbb{Z}$. Tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ không có cận trên và không có cận dưới, vì nếu $\mathbb{Z}$ có cận trên thì dãy $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ phải có một giới hạn M; lúc đó $M - 1 < p$ với một $p \in \mathbb{Z}$ và ta sẽ có $M < p + 1$: vô lý.

Số hữu tỉ là số có dạng $\frac{m}{n} = m \cdot n^{-1}$, $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. Ký hiệu $\mathbb{Q}$ là tập các số hữu tỉ.

Số vô tỉ là số thực mà không phải số hữu tỉ.

1.7 Nguyên lý (Archimede). *Với các số thực a dương và b bất kỳ luôn tồn tại số nguyên dương n sao cho $a(n-1) \leq b < na$.*

Chứng minh. Do $\mathbb{N}$ không có cận trên nên phải có số nguyên dương m nào đó sao cho $m > \frac{b}{a}$.

Từ đó thấy rằng $S = \{m \in \mathbb{N} : m > \frac{b}{a}\}$ là tập các số tự nhiên khác rỗng, và theo nguyên lý cận dưới đúng, tập đó có cận dưới đúng n và cũng là phần tử nhỏ nhất. Điều đó chứng tỏ $n - 1 \leq \frac{b}{a} < n$. Kết thúc chứng minh. ∎

Rõ ràng, tập số hữu tỉ là trù mật, tức là giữa hai số hữu tỉ $a < b$ luôn tồn tại số hữu tỉ q thoả mãn $a < q < b$ (chẳng hạn $q = \frac{a+b}{2}$).

Ngoài ra, ta còn có một định lý quan trọng sau đây.

1.8 Định lý. *Tập hợp các số hữu tỉ và các số vô tỉ là trù mật trong* $\mathbb{R}$. *Cụ thể hơn, giữa hai số thực phân biệt bất kỳ luôn tồn tại một số hữu tỉ và một số vô tỉ.*

Chứng minh. Giả sử rằng $x, y \in \mathbb{R}$ và $x < y$.

a) Chúng ta sẽ chứng tỏ rằng tồn tại $r \in \mathbb{Q}$ thoả mãn $x < r < y$. Đầu tiên, ta giả sử $x > 0$. Theo nguyên lý Archimede, tồn tại $q \in \mathbb{N}$ nào đó thoả mãn $q > 1/(y-x)$, hay $q(y-x) > 1$. Xét số thực dương qx. Lại theo nguyên lý Archimede, tồn tại $p \in \mathbb{N}$ để $p > qx \geq p - 1$. Từ đó ta suy ra

$$qx < p = (p-1) + 1 \leq qx + q(y-x) = qy,$$

nên

$$x < \frac{p}{q} < y.$$

Trường hợp $x \leq 0$. Theo nguyên lý Archimede, tồn tại $k \in \mathbb{N}$ thoả mãn $k > -x$, hay $k + x > 0$. Khi đó, sẽ tồn tại $s \in \mathbb{Q}$ thoả mãn $x + k < s < y + k$, nên $x < s - k < y$.

Rõ ràng, $r = s - k \in \mathbb{Q}$.

b) Chúng ta cần chứng tỏ tồn tại $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ thoả mãn $x < z < y$.

Theo a), tồn tại $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ mà $x < r_1 < r_2 < y$. Số

$$z = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\sqrt{2}}$$

rõ ràng là số vô tỉ và thoả mãn $r_1 < z < r_2$. ∎

Tập $\{x : a < x < b\}$ được gọi là *khoảng* (a, b); tập $\{x : a \leq x \leq b\}$ được gọi là *đoạn* $[a, b]$.

Một dãy đoạn $[a_n, b_n]$ được gọi là *thắt lại* nếu $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ và $\lim(b_n - a_n) = 0$.

1.9 Nguyên lý (Cantor). *Một dãy đoạn thắt lại có một phần tử chung duy nhất.*

Chứng minh. Cho $\{[a_n, b_n]\}$ là một dãy đoạn thắt lại. Dãy $\{a_n\}$ đơn điệu tăng và bị chặn trên (bởi b_1 chẳng hạn) nên theo nguyên lý Weierstrass có một giới hạn ξ. Ta có $\xi \in [a_n, b_n]$ với mọi n. Thật vậy, rõ ràng $a_n \leq \xi$ với mọi n; nếu tồn tại n_0 nào đó mà

$\xi \notin [a_{n_0}, b_{n_0}]$ thì $b_{n_0} < \xi$ hay $b_{n_0} - \xi > 0$; nhưng vì ξ là giới hạn của dãy tăng a_n, nên với n đủ lớn $\xi - a_n < \xi - b_{n_0}$, tức là $b_{n_0} < a_n$: vô lý.

Mặt khác, nếu tồn tại một phần tử ξ' chung cho mọi đoạn $[a_n, b_n]$ thì $|\xi - \xi'| < b_n - a_n$ với mọi n, mà $\lim(b_n - a_n) = 0$, do đó $\xi = \xi'$. ∎

Ta nói một dãy $\{x_n\}$ là *bị chặn* (*hay giới nội*) nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới, tức là $\exists a : \forall n, |x_n| \leq a$.

1.10 Nguyên lý (Bolzano-Weierstrass). *Mọi dãy vô hạn bị chặn $\{x_n\}$ đều chứa một dãy con hội tụ.*

Chứng minh. Theo giả thiết $\forall n$ ta có $-a \leq x_n \leq a$. Trong hai đoạn $[-a, 0]$ và $[0, a]$ phải có một đoạn chứa vô số các phần tử x_n (nếu không thì dãy chỉ có hữu hạn phần tử). Ta gọi đoạn này là $[a_1, b_1]$, và đặt $c_1 = (a_1 + b_1)/2$. Trong hai đoạn $[a_1, c_1]$ và $[c_1, b_1]$ lại phải có một đoạn chứa vô số phần tử x_n. Ta gọi đoạn này là $[a_2, b_2]$ và đặt $c_2 = (a_2 + b_2)/2$ .... Tiếp tục quá trình đó ta được một dãy đoạn thắt lại $[a_k, b_k], k = 1, 2, \ldots$ vì $b_k - a_k = a/2^k \to 0$. Theo nguyên lý Cantor, chúng có một phần tử chung ξ. Vì mỗi đoạn $[a_k, b_k]$ chứa vô số phần tử x_n nên ta có thể chọn (đánh số lại, nếu cần) một $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$, $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ với $n_2 > n_1$, một $x_{n_3} \in [a_3, b_3]$ với $n_3 > n_2$ .... Khi đó $|x_{n_k} - \xi| \leq b_k - a_k \to 0$, vậy $\lim x_{n_k} = \xi$. ∎

Ví dụ 1.11. Xét dãy $x_n = (-1)^n$. Dãy bị chặn và có 2 dãy con hội tụ tới 1 và -1.

Một dãy $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ được gọi là dãy *cơ bản* (hay dãy *Cauchy*) nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ sao cho } |x_n - x_m| < \varepsilon, \forall n, m \geq n_0.$$

1.11 Nguyên lý (Cauchy). *Mọi dãy cơ bản đều hội tụ.*

Chứng minh. Xét một dãy cơ bản $\{x_n\}$. Theo định nghĩa, tồn tại n_1 sao cho $|x_n - x_{n_1}| < \frac{1}{2}$ với mọi $n \geq n_1$. Đặt $a_1 = x_{n_1} - 1, b_1 = x_{n_1} + 1$. Sau đó, lấy $n_2 > n_1$ sao cho $|x_n - x_{n_2}| < \frac{1}{4}$ với mọi $n \geq n_2$. Đặt $a_2 = x_{n_2} - \frac{1}{2}$, $b_2 = x_{n_2} + \frac{1}{2}$. Vì $|x_{n_2} - x_{n_1}| < \frac{1}{2}$ nên $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$. Lấy $n_3 > n_2$ sao cho $|x_n - x_{n_3}| < \frac{1}{8}$ với mọi $n \geq n_3$ và đặt $a_3 = x_{n_3} - \frac{1}{4}$, $b_3 = x_{n_3} + \frac{1}{4}$ .... Tiếp tục mãi như vậy, ta được một dãy đoạn $[a_k, b_k]$ thắt lại vì $b_k - a_k < \frac{1}{2^{k-1}} < \frac{1}{k-1} \to 0$. Theo nguyên lý Cantor, dãy đoạn này có một phần tử chung duy nhất ξ. Với $n \geq n_k$ ta có $x_n \in [a_k, b_k]$, vậy $|\xi - x_k| < b_k - a_k$, từ đó ta suy ra $\lim x_n = \xi$. ∎

Ví dụ 1.12. Dãy số có số hạng tổng quát

$$x_n = \frac{\cos 1}{1.2} + \frac{\cos 2}{2.3} + \cdots + \frac{\cos n}{n.(n+1)}$$

là một dãy cơ bản.

Chứng minh. Thật vậy, với $m > n$:

$$|x_m - x_n| = \left|\frac{\cos n}{n.(n+1)} + \cdots + \frac{\cos m}{m.(m+1)}\right| \leq \left|\frac{1}{n.(n+1)} + \cdots + \frac{1}{m.(m+1)}\right| < \frac{1}{n}.$$

Như vậy cho trước $\varepsilon > 0$, ta chỉ cần chọn n_0 thoả mãn $n_0 > 1/\epsilon$ thì rõ ràng $|x_n - x_m| < \varepsilon, \forall n, m \geq n_0$.

Theo nguyên lý Cauchy, dãy x_n hội tụ. ■

1/2.3 Giới hạn trên và giới hạn dưới

Ta đưa thêm vào $\mathbb{R}$ hai phần tử mới $+\infty$ và $-\infty$, gọi là các *số vô cực* (dương vô cực và âm vô cực). Cùng với nó, ta đưa ra qui ước thứ tự và các phép tính đại số giữa các số vô cực và số a hữu hạn như sau:

$$-\infty < a < +\infty; |\pm\infty| = +\infty,$$
$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = a + (\pm\infty) = (\pm\infty) + a = \pm\infty,$$
$$a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \begin{cases} \pm\infty & \text{nếu } a > 0 \\ 0 & \text{nếu } a = 0 \\ \mp\infty & \text{nếu } a < 0, \end{cases}$$
$$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty, (\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty,$$
$$\frac{a}{\pm\infty} = 0, \infty^r = \infty \text{ với } r > 0.$$

Ký hiệu: $\lim x_n = +\infty$ ($\lim x_n = -\infty$), nghĩa là

$$\forall a > 0, \exists n_0 : x_n > a, \forall n \geq n_0 \quad (\forall a < 0, \exists n_0 : x_n < a, \forall n \geq n_0).$$

Tập hợp số thực, có thêm $+\infty$ và $-\infty$, với những quy ước trên, được gọi là *tập số thực mở rộng* và ký hiệu là $\overline{\mathbb{R}}$.

Cho một dãy vô hạn $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$. Với mỗi n, đặt

$$\begin{aligned} u_n &= \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} = \sup_{k\geq 0} x_{n+k}, \\ v_n &= \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} = \inf_{k\geq 0} x_{n+k}. \end{aligned}$$

Rõ ràng dãy $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu giảm, còn dãy $\{v_n\}$ là dãy đơn điệu tăng cho nên mỗi dãy có một giới hạn (hữu hạn hoặc vô cực). Dĩ nhiên $\lim u_n = \inf\{u_n\}$ và $\lim v_n = \sup\{v_n\}$. Các giới hạn đó gọi là *giới hạn trên* và *giới hạn dưới* của dãy $\{x_n\}$ và được ký hiệu lần lượt là $\overline{\lim}\, x_n$ và $\underline{\lim}\, x_n$.

Như vậy:

$$\overline{\lim}\, x_n = \lim \big(\sup_{k\geq 0} x_{n+k}\big), \qquad \text{và} \qquad \underline{\lim}\, x_n = \lim \big(\inf_{k\geq 0} x_{n+k}\big).$$

Với định nghĩa như trên thì mọi dãy số bất kỳ đều có giới hạn trên và dưới. Dễ thấy $\underline{\lim}\, x_n$ là giới hạn riêng nhỏ nhất và $\overline{\lim}\, x_n$ là giới hạn riêng lớn nhất của dãy x_n; đồng thời $\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$.

Ta lấy một số ví dụ đơn giản về hai loại giới hạn này như sau.

Ví dụ 1.13. Dãy $x_k = (-1)^k, \ \ k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{k\to\infty} x_k &= \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} (-1)^k = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1,\\ \overline{\lim}_{k\to\infty} x_k &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} (-1)^k = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.\end{aligned}$$

Ví dụ 1.14. Dãy $x_k = k^{(-1)^k}, \ \ k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{k\to\infty} k^{(-1)^k} &= \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} k^{(-1)^k} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,\\ \overline{\lim}_{k\to\infty} k^{(-1)^k} &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} k^{(-1)^k} = \lim_{n\to\infty} (+\infty) = +\infty.\end{aligned}$$

Ví dụ 1.15. Dãy $x_k = \frac{(-1)^k}{k}, \ \ k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{(-1)^k}{k} &= \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{n\to\infty} \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{với } n = 2m+1 \\ -\frac{1}{n+1}, & \text{với } n = 2m \end{cases} = 0,\\ \overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{(-1)^k}{k} &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{n\to\infty} \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{với } n = 2m \\ \frac{1}{n+1}, & \text{với } n = 2m+1 \end{cases} = 0.\end{aligned}$$

Ta có các kết quả sau (chứng minh được dành cho phần bài tập).

1.12 Định lý. *Một số ℓ là giới hạn của dãy $\{x_n\}$ khi và chỉ khi $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = \ell$.*

1.13 Định lý.

a) $\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \leq \underline{\lim}(x_n + y_n) \leq \underline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$.

b) $\underline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n \leq \overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$.

§ 3. LỰC LƯỢNG CỦA TẬP HỢP

1.14 Định nghĩa. Hai tập hợp X và Y được nói là có *cùng lực lượng* nếu và chỉ nếu tồn tại một song ánh từ X vào Y.

Chúng ta thường nói rằng hai tập hợp như vậy có "cùng số lượng phần tử", nhưng với các tập hợp vô hạn, sẽ rất khó hiểu "số lượng" là gì. Ngoài ra ta còn rất quan tâm đến trường hợp một tập là "đông" hơn một tập khác. Khái niệm này khá dễ hiểu với tập hữu hạn nhưng không dễ đối với các tập vô hạn.

Một tập hợp X được gọi là *hữu hạn* khi và chỉ khi nó có cùng lực lượng với tập con $\{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$ nào đó, khi đó nó có n phần tử, ký hiệu $|X| = n$. Trường hợp còn lại X là tập có vô hạn phần tử, ký hiệu $|X| = \infty$. Tập X được gọi là *đếm được* nếu và chỉ nếu tồn tại một hàm toàn ánh f từ $\mathbb{N}$ vào X, là *vô hạn đếm được* nếu X cũng là vô hạn. Một tập hợp là *không đếm được* nếu và chỉ nếu nó không phải là đếm được.

Có thể chứng minh được một tập vô hạn đếm được tương đương với khẳng định nó cùng lực lượng với tập $\mathbb{N}$.

Ví dụ 1.16. $\mathbb{N}$ là tập vô hạn đếm được. Tập các số chẵn là vô hạn đếm được.

$\mathbb{Z}$ là tập vô hạn đếm được. Ta xét hàm số $f(n) := \frac{n-1}{2}$ nếu n lẻ và $-\frac{n}{2}$ nếu n chẵn.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ là tập vô hạn đếm được. Thật vậy đặt $f(m, n) := 2^{m-1}(2n - 1)$. Khi đó f là song ánh từ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vào $\mathbb{N}$.

Dễ thấy mọi tập đếm được (vô hạn hay hữu hạn) đều có thể biểu diễn bằng cách đánh số các phần tử như sau:

$$X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

1.15 Mệnh đề. *Mọi tập con của tập đếm được cũng đếm được.*

Chứng minh. Giả sử tập A là đếm được và B là tập con của A, nếu B là hữu hạn thì ta không cần chứng minh gì nên ta sẽ giả sử B là vô hạn. Khi đó hiển nhiên A là vô hạn đếm được nên $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Gọi b_1 là phần tử đầu tiên trong dãy $\{a_n\}$ thuộc B, b_2 là phần tử thứ hai trong dãy thuộc B, ... Khi đó dễ thấy B chính là tập $C = \{b_1, b_2, \ldots\}$. Thật vậy, rõ ràng $C \subset B$. Ngược lại, giả sử $a_k \in B$ và từ a_1 đến a_{k-1} có h phần tử thuộc B, khi đó a_k chính là $b_{h+1} \in C$. Vậy $B \subset C$ nên $B = C$. ∎

Như vậy chúng ta có thể tạo ra một tập đếm được bằng cách "cắt bớt" một tập đếm được. Ngược lại ta cũng có thể bổ sung cho một tập đếm được để tạo ra một tập đếm được khác. Tổng quát, chúng ta có kết quả sau.

1.16 Mệnh đề. *Hợp của một họ đếm được các tập đếm được cũng là tập đếm được.*

Trước tiên, ta chứng minh bổ đề sau đây.

1.17 Bổ đề. *Hợp của một họ đếm được các tập rời nhau và có hữu hạn phần tử cũng là tập đếm được.*

Chứng minh. Giả sử dãy tập $B_n, n = 1, 2, \ldots$ đều có hữu hạn phần tử được đánh số thứ tự như sau:

$$B_n = \{b_{n1}, b_{n1}, \ldots, b_{nj_n}\}, B_m \cap B_n = \emptyset,$$

trong đó j_n là ký hiệu số phần tử của tập B_n.

Ta xây dựng một ánh xạ f từ $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ vào $\mathbb{N}$ như sau:

$$f(b_{nk}) = j_1 + j_2 + \cdots j_{n-1} + (k-1).$$

Dễ dàng chứng minh được đây là song ánh từ B vào $\mathbb{N}$. Ta có thể hiểu cách đánh số các phần tử của tập B như sau: Đầu tiên đánh số các phần tử của tập B_1, tiếp theo là đánh số thứ tự với các phần tử của tập B_2, tiếp tục như vậy mọi phần tử của B_n đều được đánh số thứ tự.

$$\begin{array}{ccccccccc}
b_{11} & \longrightarrow & b_{12} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & b_{1(j_1-1)} & \longrightarrow & b_{1j_1} \\
 & & & & & & & & \downarrow \\
b_{2j_2} & \longleftarrow & b_{2(j_2-1)} & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & b_{22} & \longleftarrow & b_{21} \\
\downarrow & & & & & & & & \\
b_{31} & \longrightarrow & b_{32} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & b_{3(j_3-1)} & \longrightarrow & b_{3j_3} \\
 & & & & & & & & \downarrow \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}$$

Chứng minh (CHỨNG MINH MỆNH ĐỀ). Giả sử dãy $A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \ldots\}, n = 1, 2, \ldots, \infty$. Nếu tập A_k có hữu hạn i phần tử thì ta xem như $a_{ki} = a_{k(i+1)} = \cdots$

Đặt $B_2 = \{a_{11}\}, B_3 = \{a_{12}, a_{21}\} \setminus B_2, B_4 = \{a_{13}, a_{22}, a_{31}\} \setminus (B_2 \cup B_3), \ldots, B_n = \{a_{ij} | i + j = n\} \setminus \left(\bigcup_{1 \le k \le n-1} B_k \right), n \ge 3$. Khi đó không khó khăn gì ta thấy B_n là dãy tập rời nhau có hữu hạn phần tử và $\bigcup_n B_n = \bigcup_n A_n$. Tuy nhiên, $\bigcup_n B_n$ là tập đếm được theo như bổ đề trên. ∎

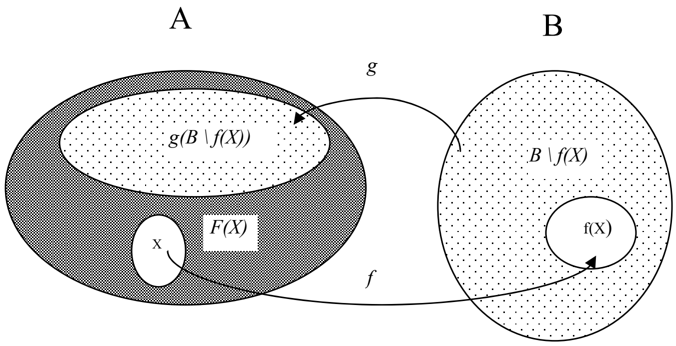
1.18 Hệ quả. *Tập các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ là đếm được.*

Chúng ta chưa đưa ra ví dụ về tập không đếm được mặc dù nó có rất nhiều. Tuy nhiên tất cả các ví dụ này đều xuất phát từ các kết quả dưới đây.

X được gọi là có *lực lượng nhỏ hơn* Y nếu và chỉ nếu tồn tại một hàm đơn ánh từ X vào Y, nhưng không có hàm toàn ánh nào lên Y. Khẳng định sau cho thấy định nghĩa này là chặt chẽ.

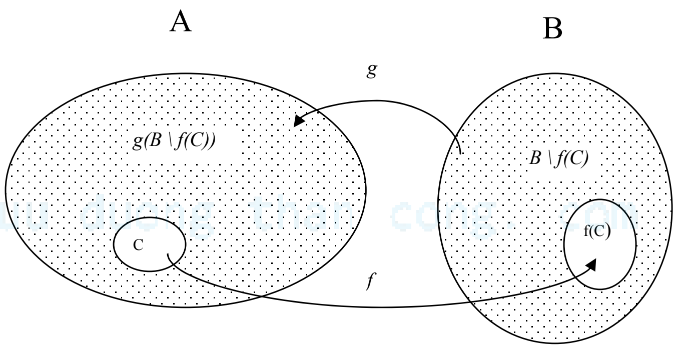
1.19 Định lý (tương đương). *Nếu A và B là hai tập hợp, f là một hàm đơn ánh từ A vào B, và g là một hàm đơn ánh từ B vào A, khi đó A và B có cùng lực lượng.*

Chứng minh. Với hàm j và tập hợp X bất kỳ, đặt $j[X] := \{j(x) : x \in X\}$. Với một $X \subset A$, đặt $F(X) := A \setminus g[B \setminus f[X]]$.



Với U bất kỳ sao cho $X \subset U \subset A$, chúng ta có thể chỉ ra $F(X) \subset F(U)$.

Đặt $W := \{X \subset A : X \subset F(X)\}$ và $C := \bigcup W$. Với bất kỳ $u \in C$, ta có $u \in X$ với $X \in W$ nào đó, cho nên $u \in X \subset F(X) \subset F(C)$. Vì thế $C \subset F(C)$, và $F(C) \subset F(F(C))$. Vậy $F(C) \subset W$ và do định nghĩa của C ta có $F(C) \subset C$ nên $F(C) = C$. Vậy g sẽ là đơn ánh từ $B \setminus f(C)$ lên $A \setminus F(C) = A \setminus C$. Trong trường hợp bất kỳ, f là đơn ánh từ C lên $f[C]$.



Đặt $h(x) := f(x)$ nếu $x \in C$, $h(x) := g(x)^{-1}$ nếu $x \in A \setminus C$. Khi đó h là song ánh từ A lên B. ■

Ví dụ 1.17. Tập hợp $\mathbb{R}$ và $(0,1)$ có cùng lực lượng. Trước hết ta dễ dàng chứng minh được hàm số sau là song ánh từ $(-1,1)$ vào $\mathbb{R} : f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$. Vậy $\mathbb{R}$ và $(-1,1)$ có cùng lực lượng. Ta lại có song ánh $g(x) = \frac{x+1}{2}$ từ $(-1,1)$ vào $(0,1)$ nên $(-1,1)$ và $(0,1)$ có cùng lực lượng.

Cho số n hữu hạn bất kỳ, $n = 0, 1, 2, \ldots$, chúng ta luôn có $n < 2^n$; ví dụ, 0 < 1, 1 < 2, 2 < 4, 3 < 8, v. v. Cho một tập hữu hạn X có n phần tử, họ 2^X tất cả các tập con của X có 2^n phần tử. Khẳng định 2^X là lớn hơn X cũng vẫn đúng với các tập hợp lớn tùy ý (vô hạn).

1.20 Định lý. *Với mọi tập hợp X, X có lực lượng nhỏ hơn hơn 2^X.*

Chứng minh. Đặt $f(x) := \{x\}$. Đây là một đơn ánh từ X vào 2^X. Giả sử g là một song ánh từ X lên 2^X. Đặt $A := \{x \in X; x \notin g(x)\}$. Khi đó $g(y) = A$ với y nào đó. Nếu $y \in A$ thì $y \notin g(y) = A$, nhưng nếu $y \notin A = g(y)$ thì $y \in A$, mâu thuẫn. ■

1.21 Hệ quả. *Tập $\mathbb{N}$ có lực lượng nhỏ hơn hơn $2^{\mathbb{N}}$, nên $2^{\mathbb{N}}$ là không đếm được.*

Họ $2^{\mathbb{N}}$ tất cả các tập con của một tập vô hạn đếm được sẽ được gọi là có lực lượng c, hoặc lực lượng *continum*, vì kết quả sau.

1.22 Định lý. *Tập hợp* $\mathbb{R}$ *các số thực và khoảng* $[0,1] := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ *có cùng lực lượng là* c.

Chứng minh. Chứng minh của định lý được để ở phần bài tập. Sử dụng bài tập A.21 ta sẽ chỉ ra $[0,1]$ và $(0,1)$ có cùng lực lượng. Sử dụng bài tập A.21 để chứng minh $[0,1]$ và $2^{\mathbb{N}}$ có cùng lực lượng. ■

Dưới đây là một ví dụ về tập không đếm được khá nổi tiếng, đó là tập Cantor.

Ví dụ 1.18. Cho C là tập hợp Cantor

$$C := \left\{ \sum_{n\geq 1} x_n/3^n : x_n = 0 \text{ hoặc } 2 \text{ với mọi } n \right\}$$

Có thể chứng minh được C có cùng lực lượng với $2^{\mathbb{N}}$. Thật vậy ta có song ánh f từ $2^{\mathbb{N}}$ vào C như sau: với mọi $A \in 2^{\mathbb{N}}$, $f(A) = \sum_{n\in A} 2/3^n$.

BÀI TẬP

A.1. Từ hệ tiên đề của $\mathbb{R}$, chứng minh

$a)\ -(xy) = (-x)y = x(-y)$

$b)\ x \geq 0\ (\leq 0) \Rightarrow -x \leq 0\ (\geq 0)$

$c)\ x \geq 0, y \leq 0 \Rightarrow x.y \leq 0$

$d)\ x \leq 0, y \leq 0 \Rightarrow x.y \geq 0$

$e)\ x \geq y \Rightarrow x - y \geq 0$

$f)\ \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$

$g)\ x \geq y, z \geq 0 \Rightarrow x.z \geq y.z$

$h)\ 0 < x < y \Leftrightarrow 0 < 1/y < 1/x.$

A.2. Tìm $\sup A, \inf A$ và phần tử lớn nhất, nhỏ nhất của A (nếu tồn tại) trong các trường hợp sau:

a) $A = \{x_n\}$ với $x_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}$ n = 1, 2, 3, ...

b) $A = \{y_n\}$ với $y_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n}$ n = 1, 2, 3, ...

*A.3. Cho hai dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ bị chặn và đặt $z_n = x_n + y_n$. Hãy chứng minh các khẳng định sau:

$a)\ \sup\{x_n\} + \sup\{y_n\} \geq \sup\{z_n\}$ $\qquad b)\ \inf\{x_n\} + \inf\{y_n\} \leq \inf\{z_n\}.$

Thử đưa ra ví dụ cho trường hợp các dấu bằng không xảy ra.

A.4. Tìm các giới hạn trên và dưới của các dãy số sau:

$a)\quad x_n = \sin n\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{n}.$

$b)\quad x_n = [(-1)^n + 1]n^2.$

$c)\quad x_n = \cos n\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{(-1)^n}{n}.$

$d)\quad x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \sin^2 \frac{n\pi}{2}.$

*A.5. Chứng minh rằng $\underline{\lim}(-x_n) = -\overline{\lim}\, x_n$.

A.6. Hãy chứng minh định lý 1.12.

A.7. Hãy chứng minh định lý 1.13.

A.8. Cho $A := \{3, 4, 5\}$ và $B := \{5, 6, 7\}$. Xác định:

a) $A \cup B$. b) $A \cap B$. c) $A \setminus B$. (d) $A \Delta B$.

A.9. Chỉ ra $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ và $\{\emptyset\} \neq \{\{\emptyset\}\}$.

A.10. Trong ba tập sau thì những tập nào bằng nhau?

a) $\{\{2, 3\}, \{4\}\}$; b) $\{\{4\}, \{2, 3\}\}$; c) $\{\{4\}, \{3, 2\}\}$.

A.11. Chứng minh rằng

a) $A \subset B$ và $A \subset C$ thì $A \subset B \cap C$. b) $A \subset B$ và $C \subset D$ thì $A \cap C \subset B \cap D$.
c) $A \subset B$ khi và chỉ khi $A \cap B = A$.

A.12. Tìm $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ và $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ khi

$a)$ $A_n = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{n} \leq x < \frac{1}{n}\}$ $b)$ $A_n = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}\}$

$c)$ $A_n = \{x \in \mathbb{R} : (1 + \frac{1}{n})^n \leq x < 3\}$ $d)$ $A_n = \{x \in \mathbb{R} : n \leq x \leq n + 1\}$.

A.13. Cho $I := [0, 1]$. Xác định $\bigcup_{x \in I} [x, 2]$ và $\bigcap_{x \in I} [x, 2]$.

A.14. Chứng minh rằng:

$$a)\ [a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}) \qquad b)\ (a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}].$$

A.15. Cho $\{A_n\}$ là một dãy tăng các tập con của X. Đặt $B_1 = A_1$ và $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ với mọi $n = 2, 3, \ldots$. Chứng minh rằng

$$B_n \cap B_m = \emptyset \text{ với mọi cặp số tự nhiên } m \neq n$$

và

$$A_n = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n; \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

A.16. Cho $\{A_n\}$ là một dãy các tập con của tập X. Đặt $B_0 = \emptyset$ và với mọi $n \in \mathbb{N}$, đặt

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad C_n = A_n \setminus B_{n-1}.$$

Chứng minh $\{B_n\}$ là dãy các tập đơn điệu tăng và $\{C_n\}$ là dãy các tập rời nhau thoả mãn:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

A.17. Cho $\{A_n\}$ là dãy các tập con của tập X. Nếu A chứa mọi $x \in X$ thuộc vô hạn các tập A_n, chứng tỏ rằng

$$A = \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big[\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Big].$$

A.18. Cho $\{A_n\}$ là dãy các tập con của tập X. Nếu A chứa tất cả $x \in X$ thuộc một số hữu hạn các tập A_n, chứng tỏ rằng

$$B = \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big[\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \Big].$$

A.19. Cho $\{A_n\}$ là dãy đơn điệu giảm các tập con của tập X. Chứng minh rằng

$$\liminf A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \limsup A_n.$$

A.20. Nếu tập X là không đếm được và Y là một tập đếm được, chứng minh rằng $X \setminus Y$ có cùng lực lượng với X. *Gợi ý*: Lấy B là một tập con vô hạn đếm được của $X \setminus Y$. Khi đó B và $B \cup (X \cap Y)$ có cùng lực lượng.

A.21. Tương tự, chứng minh rằng nếu tập X là không đếm được và Y là một tập đếm được, thì $X \cup Y$ có cùng lực lượng với X.

*A.21. Chứng minh $[0,1]$ và $2^{\mathbb{N}}$ có cùng lực lượng bằng cách xét hàm số từ $2^{\mathbb{N}}$ lên $[0,1]$ như sau: Nếu $\emptyset \neq A \subset \mathbb{N}$, đặt $f(A) := \sum_{n\in A} 1/2^{n+1}$ (khai triển nhị phân) và $f(\emptyset) = 0$. Hàm này không hẳn là song ánh, nhưng dùng nó và áp dụng bài tập A.20 để chứng minh [0,1] có lực lượng c.