CHƯƠNG 3

LÝ THUYẾT ĐỘ ĐO

§ 1. ĐẠI SỐ VÀ σ-ĐẠI SỐ

3/ 1.1 Đại số

3.1 Định nghĩa. Một lớp $\mathscr{A}$ (khác rỗng) các tập con của X được gọi là một *đại số* nếu:

i) $X \in \mathscr{A}$,

ii) Với mọi $A \in \mathscr{A}$ thì $A^c = X \setminus A \in \mathscr{A}$.

iii) Với mọi dãy tập hợp hữu hạn $A_i \in \mathscr{A}, i = 1, 2, \ldots, n$ thì $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}$.

Như vậy, $\mathscr{A}$ là một đại số khi và chỉ khi $\mathscr{A}$ chứa X và kín đối với việc thực hiện một số hữu hạn phép toán về tập (hợp, giao hữu hạn, trừ và phép trừ đối xứng hai tập). Hiển nhiên từ đó suy ra một đại số luôn chứa hai tập $\varnothing$ và X.

3.2 Mệnh đề. *Một lớp $\mathscr{A}$ là một đại số khi và chỉ khi $\mathscr{A}$ chứa tập rỗng và thoả mãn các điều kiện:*

a) $A, B \in \mathscr{A} \implies A \cap B \in \mathscr{A}$,

b) $A \in \mathscr{A} \implies A^c \in \mathscr{A}$.

Điều kiện a) có thể được thay thế bởi điều kiện sau

a') $A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{A} \implies A \cup B \in \mathscr{A}$.

Ví dụ 3.1. Cho tập X bất kỳ ta có

- $\mathscr{A} = \{\varnothing, X\}$ là một đại số.
- Nếu $A \subset X$ là tập khác rỗng và khác X thì $\mathscr{A} = \{\varnothing, A, A^c, X\}$ là một đại số. Chẳng hạn $X = [0, 1]$ và $\mathscr{A} = \{\varnothing, X, [0, \frac{1}{2}], (\frac{1}{2}, 1]\}$.

- 2^X là một đại số.

Câu hỏi: Cho $X = \{1, 2, 3, 4\}$, trong các lớp sau, lớp nào là đại số:

- $\mathscr{A}_1 = \{\emptyset, X, \{1\}\}$.
- $\mathscr{A}_2 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2,3,4\}, \{2\}, \{1,3,4\}, \{1,2\}, \{3,4\}\}$.
- $\mathscr{A}_3 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2,3,4\}, \{2\}, \{1,3,4\}\}$.

Trả lời: Lớp $\mathscr{A}_2$ là đại số trong khi hai lớp $\mathscr{A}_1$ và $\mathscr{A}_3$ không phải.

3.3 Mệnh đề. *Cho lớp tập hợp $\mathscr{M} \neq \emptyset$ các tập con của tập X, tồn tại duy nhất một đại số $\mathscr{A}$ chứa $\mathscr{M}$ và là giao của tất cả các đại số chứa $\mathscr{M}$.*

Đại số $\mathscr{A}$ được gọi là *đại số sinh bởi* $\mathscr{M}$ hay *đại số nhỏ nhất chứa* $\mathscr{M}$.

Chứng minh. Bao giờ cũng tồn tại ít nhất một đại số bao hàm $\mathscr{M}$, đó là lớp tất cả các tập con của X. Xét tất cả các đại số bao hàm $\mathscr{M}$ và gọi $\mathscr{A}$ là giao của chúng.

Rõ ràng $\mathscr{A}$ cũng là một đại số bao hàm $\mathscr{M}$, vì nếu $A, B \in \mathscr{A}$ thì A, B và do đó $A \cup B$ và A^c phải thuộc mọi đại số bao hàm $\mathscr{M}$, tức là $A \cup B \in \mathscr{A}$, và $A^c \in \mathscr{A}$.

Hơn nữa, $\mathscr{A}$ là duy nhất vì nếu có một đại số $\mathscr{A}'$ cũng có tính chất như $\mathscr{A}$ thì một mặt $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}'$, một mặt $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$ nên $\mathscr{A} = \mathscr{A}'$. ■

Nhận xét. Để chứng minh $\mathscr{A}$ là đại số sinh bởi $\mathscr{M}$ ta cần chứng minh hai khẳng định

i) $\mathscr{A}$ là một đại số.

ii) $\mathscr{A}$ nằm trong đại số sinh bởi $\mathscr{M}$.

Ví dụ 3.2.
- Nếu $\mathscr{M}$ là một đại số thì đại số sinh bởi $\mathscr{M}$ chính là $\mathscr{M}$.
- Xét A là tập con của $X : A \neq \emptyset, A \neq X$ và $\mathscr{M} = \{A\}$. Khi đó, đại số sinh bởi $\mathscr{M}$ là:

$$\mathscr{A} = \{X, \emptyset, A, A^c\}.$$

  Thật vậy, dễ thấy $\mathscr{A}$ là đại số, ngoài ra $X, \emptyset, A, A^c$ đều thuộc đại số sinh bởi $\mathscr{M}$.

- Nếu $\mathscr{M} = \{A, B\}$ với $A, B \subset X, A \cap B = \emptyset$ thì đại số sinh bởi $\mathscr{M}$ là:

$$\{\emptyset, A, A^c, B, B^c, A \cup B, (A \cup B)^c, X\}.$$

- Xét $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ và $\mathscr{M} = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$. Đại số sinh bởi $\mathscr{M}$ chính là 2^X.

$^{3/}$1.2 σ-đại số

3.4 Định nghĩa. Một lớp $\mathscr{F}$ các tập con của X được gọi là một *σ-đại số (σ-trường)* nếu:

i) $X \in \mathscr{F}$,

ii) Với mọi $A \in \mathscr{F}$ thì $A^c = X \setminus A \in \mathscr{F}$.

iii) Nếu dãy tập hợp vô hạn $A_i \in \mathscr{F}, i = 1, 2, \ldots$ thì $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$.

Cặp $(X, \mathscr{F})$ được gọi là một *không gian đo được* và mỗi phần tử thuộc $\mathscr{F}$ được gọi là một *tập đo được*.

Dĩ nhiên, một σ-đại số là đại số. Ngược lại, một đại số kín đối với phép hợp đếm được thì sẽ là một σ-đại số.

3.5 Mệnh đề. *Một lớp $\mathscr{F}$ là một σ-đại số khi và chỉ khi $\mathscr{F}$ chứa tập rỗng và thoả mãn các điều kiện*

i) Với mọi $A \in \mathscr{F}$ thì $A^c = X \setminus A \in \mathscr{F}$.

ii) Nếu dãy tập hợp vô hạn $A_i \in \mathscr{F}, i = 1, 2, \ldots$ thì $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$.

Chứng minh. Nếu $\mathscr{F}$ là σ-đại số thì i) hiển nhiên đúng. Giả sử cho $A_i \in \mathscr{F}, (i = 1, 2, \ldots)$, ta có $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c \in \mathscr{F}$ nên ii) đúng.

Ngược lại nếu i) và ii) đúng, khi đó rõ ràng $X = \emptyset^c \in \mathscr{F}$ và với $A_i \in \mathscr{F}, (i = 1, 2, \ldots)$, thì $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c \in \mathscr{F}$. Vậy $\mathscr{F}$ là một σ-đại số. ■

Như vậy theo mệnh đề trên, một σ-đại số luôn kín đối với việc thực hiện một số đếm được các phép toán về tập hợp.

Ví dụ 3.3.

- Cho X là tập hợp bất kỳ thì 2^X là một σ-đại số.
- Nếu X là một tập hữu hạn và $\mathscr{A}$ là một đại số trên X thì $\mathscr{A}$ cũng là σ-đại số.

  Như vậy sự khác biệt giữa đại số và σ-đại số sẽ không còn trong trường hợp không gian mẫu là hữu hạn.

- Cho lớp $\mathscr{F}$ gồm tất cả các tập $A \subset \mathbb{N}$ có tính chất là chứa cả hai số 1, 2 hoặc không chứa cả 2 số này. Khi đó $\mathscr{F}$ là một σ-đại số của $\mathbb{N}$.

  Thật vậy lấy $A \in \mathscr{F}$ tuỳ ý. Nếu cặp 1, 2 thuộc A thì không thuộc A^c, nếu không thuộc A thì thuộc A^c nên rõ ràng $A^c \in \mathscr{F}$. Ngoài ra với $A_i \in \mathscr{F}, (i = 1, 2, \ldots)$ thì nếu tồn tại i để A_i chứa cặp 1, 2 thì $\{1, 2\} \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, còn nếu không thì rõ ràng $\{1, 2\} \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ nên $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$.

- Họ tất cả các tập $A \subset X$ thoả mãn một trong hai tập A hay A^c có hữu hạn hoặc vô hạn đếm được phần tử lập thành một σ-đại số.

3.6 Mệnh đề. *Cho một lớp tập $\mathscr{M} \neq \emptyset$, tồn tại duy nhất một σ-đại số $\mathscr{F}$ chứa $\mathscr{M}$ và là giao của tất cả các σ-đại số chứa $\mathscr{M}$ (do đó nó là σ - đại số nhỏ nhất chứa $\mathscr{M}$).*

Ta gọi σ-đại số $\mathscr{F}$ là *σ-đại số sinh bởi $\mathscr{M}$* và ký hiệu là $\sigma(\mathscr{M})$.

Ví dụ 3.4. Cho tập $\mathscr{M} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots\}$, σ-đại số sinh bởi $\mathscr{M}$ chính là lớp tất cả các tập con của $\mathbb{N}$ tức $\sigma(\mathscr{M}) = 2^{\mathbb{N}}$.

Thật vậy nếu $A \in 2^{\mathbb{N}}$ suy ra $A = \{a_1, \dots, a_n\} = \bigcup_{1 \le i \le n} \{a_i\} \in \sigma(\mathscr{M})$. Vậy $2^{\mathbb{N}} \subset \sigma(\mathscr{M})$ và hiển nhiên $2^{\mathbb{N}}$ là σ-đại số nên $2^{\mathbb{N}} = \sigma(\mathscr{M})$

3/1.3 σ-đại số Borel

Trong không gian $\mathbb{R}$, ký hiệu $\mathscr{C}_1$ là họ các khoảng mở (a, b) của $\mathbb{R}$. Khi đó, ta gọi σ-đại số sinh bởi $\mathscr{C}_1$ là *σ-đại số Borel* của $\mathbb{R}$ và gọi phần tử thuộc σ-đại số Borel là *tập Borel* hoặc *tập đo được Borel* của $\mathbb{R}$. Ký hiệu σ-đại số Borel là $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Nhận xét rằng σ-đại số Borel của $\mathbb{R}$ có thể được sinh bởi một trong các lớp sau đây:

$\mathscr{C}_1$ = lớp tất cả các khoảng hữu hạn (a, b);

$\mathscr{C}_2$ = lớp tất cả các đoạn hữu hạn $[a, b]$;

$\mathscr{C}_3$ = lớp tất cả các nửa khoảng hữu hạn $(a, b]$;

$\mathscr{C}_4$ = lớp tất cả các nửa khoảng hữu hạn $[a, b)$;

$\mathscr{C}_5$ = lớp tất cả các khoảng vô hạn $(b, +\infty)$;

$\mathscr{C}_6$ = lớp tất cả các khoảng vô hạn $(-\infty, a)$;

$\mathscr{C}_7$ = lớp tất cả các khoảng vô hạn $(-\infty, a]$;

$\mathscr{C}_8$ = lớp tất cả các khoảng vô hạn $[b, +\infty)$.

Chẳng hạn σ-đại số Borel $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ là chứa $\mathscr{C}_2$ do $[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Ngược lại σ-đại số sinh bởi C_2 chứa C_1 do $(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$ nên nó trùng với σ-đại số Borel $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Chú ý là lớp các tập Borel thuộc đoạn [0,1] cũng lập thành một σ-đại số, ký hiệu là $\mathscr{B}[0, 1]$:

$$\mathscr{B}[0, 1] = \{S \subseteq [0, 1] : S \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}.$$

Ví dụ 3.5. Cho tập $B \subset \mathbb{R}$ bất kỳ, tập $\alpha + B$ với $\alpha \in \mathbb{R}$ được xác định như sau:

$$\alpha + B = \{\alpha + x | x \in B\}.$$

Khi đó nếu B là một tập Borel thì $\alpha + B$, $\alpha \in \mathbb{R}$ bất kỳ, cũng là tập Borel.

Thật vậy xét lớp tập hợp sau

$$\alpha + \mathscr{B} = \{\alpha + B | B \in \mathscr{B}\}.$$

Dễ dàng chứng minh được $\alpha + \mathscr{B}$ là một σ-đại số, ngoài ra nó chứa lớp C_1 (hiển nhiên vì $\alpha + (a, b) \in \mathscr{C}_1$). Vậy $\alpha + \mathscr{B}$ chứa σ-đại số Borel $\mathscr{B}$. Suy ra $\mathscr{B}$ chứa $-\alpha + \mathscr{B}$.

Tuy nhiên dễ dàng thấy $-\alpha + \mathscr{B}$ cũng là σ-đại số chứa lớp $\mathscr{C}_1$ nên $-\alpha + \mathscr{B}$ cũng phải chứa σ-đại số Borel $\mathscr{B}$.

Từ hai khẳng định trên suy ra $-\alpha + \mathscr{B}$ trùng với $\mathscr{B}$, do đó trùng với $\alpha + \mathscr{B}$.

§ 2. KHÔNG GIAN ĐỘ ĐO

3/2.1 Các khái niệm cơ bản

Cho X là một tập tuỳ ý, $\mathscr{A}$ là một lớp tập con của X. Ký hiệu $\overline{\mathbb{R}^+}$ là tập số thực dương suy rộng $[0, +\infty]$.

3.7 Định nghĩa. Một ánh xạ p từ $\mathscr{A}$ vào $\overline{\mathbb{R}^+}$ (p có thể nhận giá trị $+\infty$) được gọi là:

+) *cộng tính* nếu:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

với mọi tập A, B rời nhau trong $\mathscr{A}$ và $A \cup B \in \mathscr{A}$.

+) *σ-cộng tính* nếu:

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i). \tag{3.7}$$

với mọi họ đếm được các tập rời nhau đôi một $A_i \in \mathscr{A}$ thoả mãn $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$.

Vế phải của đẳng thức 3.7 luôn được xác định trong không gian số thực mở rộng vì đó là một tổng chuỗi số dương.

Bằng quy nạp, ta dễ dàng thấy nếu p cộng tính thì sẽ *hữu hạn cộng tính* tức:

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} p(A_i).$$

với mọi tập rời nhau đôi một $A_1, \ldots, A_m \in \mathscr{A}$ thoả mãn $\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i \in \mathscr{A}$.

Một hàm σ-cộng tính thì cộng tính nhưng điều ngược lại chưa chắc đúng.

Ta nói hàm tập p là *liên tục tại* $\emptyset$ nếu với mỗi dãy $A_n \downarrow \emptyset$, $A_n \in \mathscr{A}$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} p(A_n) = 0$.

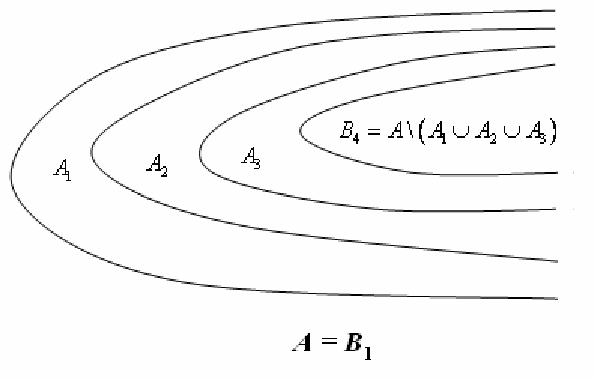
3.8 Định lý. *Cho hàm tập $p : \mathscr{A} \to \mathbb{R}^+$ (nhận giá trị hữu hạn không âm), cộng tính hữu hạn. Khi đó p là σ-cộng tính khi và chỉ khi p liên tục tại $\emptyset$.*

Chứng minh. Trước hết giả sử p liên tục tại $\emptyset$ và $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, (A_k, A \in \mathscr{A})$ và các A_k rời nhau. Khi đó, $B_n = A \setminus (\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \downarrow \emptyset$. Suy ra $A = B \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n$ là hợp hữu hạn các tập rời nhau. Như vậy, vì p cộng tính hữu hạn và liên tục tại $\emptyset$ nên ta có

$$p(A) = p(B_n) + \sum_{k=1}^{n} p(A_k) \to \sum_{k=1}^{\infty} p(A_k) \text{ khi } n \to \infty.$$

Vậy, ta có khẳng định đầu của mệnh đề.

Ngược lại, giả sử p là σ-cộng tính và một dãy tập $B_n \downarrow \emptyset$, $B_n \in \mathscr{A}$. Đặt $A = B_1, A_n = B_n \setminus B_{n+1}$. Khi đó, ta có $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ là hợp đếm được các tập rời nhau, $B_n = A \setminus (\bigcup_{k=1}^{n} A_k)$.



Nếu p hữu hạn và σ-cộng tính thì:

$$p(B_n) = p(A) - p\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = p(A) - \sum_{k=1}^{n} p(A_k) \to 0. \qquad \blacksquare$$

Chú ý. Từ định lý trên ta suy ra: Nếu p hữu hạn, cộng tính hữu hạn thì tính σ-cộng tính của p tương đương với tính liên tục tại $\emptyset$ của nó.

3.9 Định nghĩa. Cho $(X, \mathscr{F})$ là một không gian đo được. Một hàm tập σ-cộng tính

$$\mu : \mathscr{F} \to \overline{\mathbb{R}^+}$$

với $\mu(\emptyset) = 0$ được gọi là *độ đo* trên σ-đại số $\mathscr{F}$ (hoặc trên X nếu $\mathscr{F}$ đã được ngầm định). Với $A \in \mathscr{F}$ thì A được gọi là *tập đo được* và $\mu(A)$ được gọi là *độ đo của tập* A. Bộ ba $(X, \mathscr{F}, \mu)$ được gọi là một *không gian độ đo*.

Độ đo μ được gọi là *hữu hạn* nếu $\mu(X) < \infty$. Độ đo μ gọi là *σ-hữu hạn* nếu tồn tại dãy tập hợp $X_n \in \mathscr{F}$ và $\mu(X_n) < \infty, \forall n = 1, 2, \ldots$ sao cho

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X.$$

Chú ý. Như vậy hàm giá trị thực μ xác định trên σ-đại số $\mathscr{F}$ là độ đo nếu

- $\mu(A) \geq 0$ với mọi $A \in \mathscr{F}$.
- $\mu(\emptyset) = 0$ (có thể thay bằng: $\mu(A) < +\infty$ với ít nhất một $A \in \mathscr{F}$).
- μ là σ-cộng tính.

Ví dụ 3.6. • Hàm tập μ đồng nhất bằng 0 là một độ đo hữu hạn trên $\mathscr{F}$.

- Cho không gian độ đo $(X, 2^X)$ và $x_0 \in X$ nào đó. Với $A \in 2^X$ bất kỳ, ta định nghĩa một hàm tập như sau

$$\mu_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x_0 \in A, \\ 0 & \text{nếu } x_0 \notin A. \end{cases}$$

  Khi đó μ là một độ đo hữu hạn và được gọi là độ đo Dirac tại điểm x_0 trên 2^X. Lấy một dãy $A_n \downarrow \emptyset$, khi đó theo định lý 3.8, $\mu(A_n) \to 0$ khi $n \to \infty$. Tức là tồn tại số $k \in \mathbb{N}$ sao cho $\mu(A_n) = 0$ với mọi $k \geq n$.

- Cho không gian độ đo $(X, 2^X)$, với $A \in 2^X$ bất kỳ ta định nghĩa:

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{số phần tử của tập } A & \text{nếu } A \text{ hữu hạn} \\ +\infty & \text{nếu } A \text{ vô hạn.} \end{cases}$$

  μ là một độ đo trên 2^X và được gọi là độ đo đếm.

  μ là hữu hạn nếu và chỉ nếu X là tập hữu hạn. μ là σ-hữu hạn nếu và chỉ nếu X nhiều nhất là tập hợp đếm được. Giả sử X vô hạn, chẳng hạn $X = \mathbb{N}$, ta xét dãy $B_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\} \downarrow \emptyset$ nhưng $\mu(B_n) = +\infty \nrightarrow 0$. Do đó, μ không liên tục tại $\emptyset$. Định lý 3.8 không áp dụng được ở đây vì thiếu giả thiết μ hữu hạn.

- Cho không gian độ đo $(X, \mathscr{F})$ bất kỳ, với mọi $A \in \mathscr{F}$ ta định nghĩa một hàm tập như sau:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } A = \emptyset \\ +\infty & \text{nếu } A \neq \emptyset \end{cases}$$

  Khi đó μ là một độ đo không σ-hữu hạn trên $\mathscr{F}$. Với $X = \mathbb{N}$, vẫn bằng cách xét dãy $B_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}$, ta thấy độ đo này cũng không liên tục tại $\emptyset$.

Chú ý. Nếu p là một độ đo trên không gian đo được (Ω, Σ) thoả mãn $p(\Omega) = 1$ thì p được gọi là một *độ đo xác suất* và trong trường hợp này (Ω, Σ, p) được gọi là một *không gian độ đo xác suất*.

Cho không gian Ω là hữu hạn và μ là độ đo đếm trên Ω, khi đó độ đo sau $p(S) = \dfrac{\mu(S)}{\mu(\Omega)}$ với mọi tập con S của Ω là một độ đo xác suất. Người ta gọi đó là *độ đo xác suất cổ điển*.

3/2.2 Các tính chất

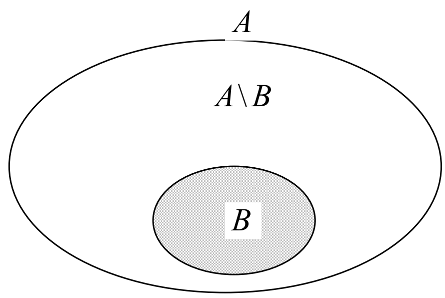
3.10 Định lý. *Cho không gian độ đo $(X, \mathscr{F}, \mu)$, khi đó ta có:*

i) $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$ *với mọi* $A, B \in \mathscr{F}$ *và* $B \subset A, \mu(B) < +\infty$;

ii) $\mu(B) \leq \mu(A)$ *với mọi* $A, B \in \mathscr{F}$ *và* $B \subset A$;

iii) $\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) = \mu(A)$ *với mọi* $A, B \in \mathscr{F}$ *thoả mãn* $\mu(B) = 0$;

Chứng minh. i) Vì $B \subset A$ nên $A = (A \setminus B) \cup B$ là hợp hai tập rời nhau, do đó $\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(B)$. Mà $\mu(B) < \infty$ nên suy ra $\mu(A) - \mu(B) = \mu(A \setminus B)$.



ii) Hiển nhiên $\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(B) \geq \mu(B)$.

iii) Ta có $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ là hợp hai tập rời nhau nên $\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B) = \mu(A \setminus B)$. Theo tính chất ii), $\mu(A \setminus B) \leq \mu(A) \leq \mu(A \cup B)$ nên chúng bằng nhau.■

Do định lý 3.10.ii), nhiều khi ta tin rằng tập con của một tập có độ đo 0 tất nhiên cũng có độ đo 0. Tuy nhiên có một vấn đề ở đây là chưa chắc tập con đó đã đo được (tức thuộc σ-đại số $\mathscr{F}$). Chẳng hạn cho $X = \{a, b, c\}$ và $\mathscr{F} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ và cho một độ đo p thoả mãn $p\{a\} = 1$ và $p\{b, c\} = 0$. Khi đó hiển nhiên kết luận $p\{b\} = 0$ là sai vì thậm chí p còn không được định nghĩa trên $\{b\}$.

Cho $(X, \mathscr{F})$ là một không gian đo được, tính chất σ-cộng tính của hàm tập μ trên $\mathscr{F}$ có thể được coi là trung tâm của lý thuyết độ đo (xác suất). Nó thiết lập một số tính chất rất hữu dụng của độ đo. Chúng ta sẽ đưa ra một số tính chất sau rút ra từ tính σ-cộng tính.

3.11 Định lý. *Cho không gian độ đo $(X, \mathscr{F}, \mu)$, khi đó ta có:*

i) Với mọi họ đếm được $A_i \in \mathscr{F}\,(i = 1, 2, \dots)$, ta có

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

ii) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0$ với mọi dãy $A_i \in \mathscr{F}$ thoả mãn $\mu(A_i) = 0, (\forall i = 1, 2, \dots)$.

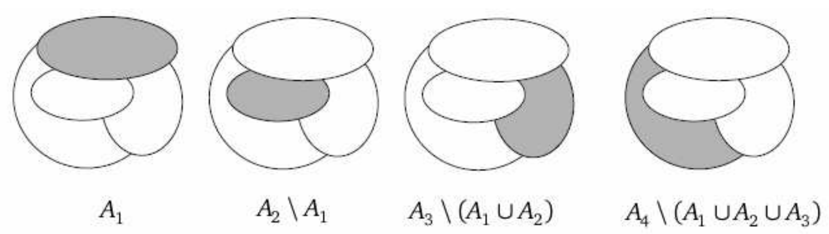
Chứng minh. i) Đặt $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \dots, B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right), \dots$. Khi đó các tập B_i là rời nhau và $B_i \subset A_i$ nên theo định lý 3.10.ii) ta có $\mu(B_i) \leq \mu(A_i)$, ngoài ra $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Vậy áp dụng tính chất σ-cộng tính của μ ta được:

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

ii) Đặt $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, áp dụng định lý 3.10 ta có $0 \leq \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = 0$, từ đó suy ra $\mu(A) = 0$. ■

Như vậy việc thêm bớt hợp một số đếm được các tập đo được có độ không sẽ không ảnh hưởng đến độ đo của tập ban đầu.

Trong chứng minh định lý 3.11.i), chúng ta đã sử dụng phương pháp tách hợp của dãy $\{A_n\}$ bất kỳ thành hợp của các tập rời nhau B_n, như minh họa ở hình dưới đây.



Dãy các tập B_n

3.12 Hệ quả. *Nếu độ đo μ là σ-hữu hạn thì mọi tập $A \in \mathscr{F}$ đều có thể phân tích thành một số đếm được tập có độ đo hữu hạn.*

Cũng từ tính σ-cộng tính của độ đo ta có thêm các kết quả sau:

3.13 Định lý (Tính liên tục của độ đo). *Cho không gian đo được $(X, \mathscr{F})$ và μ là một độ đo trên σ-đại số $\mathscr{F}$, khi đó:*

i) nếu dãy $A_i \in \mathscr{F}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ là đơn điệu tăng tức $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ thì

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i);$$

ii) nếu dãy $A_i \in \mathscr{F}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ là đơn điệu giảm tức $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ và $\mu(A_1) < \infty$ thì

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

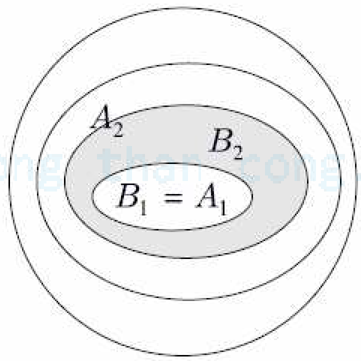
Ngược lại, cho $\mu : \mathscr{F} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ là hàm tập hữu hạn cộng tính thoả mãn $\mu(\emptyset) = 0$ thì nó sẽ là một độ đo nếu thoả mãn một trong hai điều kiện i) hoặc ii) ở trên.

Chứng minh. i) Giả sử dãy $A_i \in \mathscr{F}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ là đơn điệu tăng.

Ta đặt $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots, B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)$ thì các $B_i \in \mathscr{F}$ rời nhau và $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Do đó

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Khẳng định i) đã được chứng minh.



ii) Giả sử dãy $A_i \in \mathscr{F}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ là đơn điệu giảm.Theo công thức De Morgan $A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_i)$, trong đó các tập $A'_i = A_1 \setminus A_i \in \mathscr{F}$ và $A'_1 \subset A'_2 \subset \ldots$. Theo phần i) ta có $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A'_i)$.

Nhưng vì $\mu(A_1) < \infty$ mà $A_i \subset A_1$ nên $\mu(A_i) < \infty$ và $\mu(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) < \infty$. Từ đó ta có:

$$\mu(A_i') = \mu(A_1) - \mu(A_i),$$
$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i') = \mu(A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(A_1) - \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i),$$

do đó thay vào trên ta nhận được $\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$.

Khẳng định ii) được chứng minh xong.

Phần còn lại của định lý được chứng minh ở phụ lục. ■

Các kết quả i) và ii) ở định lý 3.13 còn được gọi là tính liên tục trên và dưới của độ đo, chúng được suy trực tiếp từ tính σ-cộng tính của độ đo.

Như vậy từ định lý 3.13 ta rút ra kết luận:

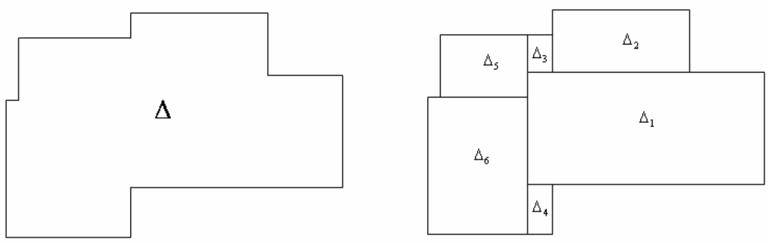
$$\sigma\text{-cộng tính} \Longleftrightarrow \text{cộng tính hữu hạn và liên tục.}$$

Chú ý. Kết quả ii) trong định lý 3.13 có thể không còn đúng nếu $\mu(A_k) = +\infty$ với k nào đó. Thật vậy xét không gian độ đo $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ với μ là độ đo đếm. Dãy $A_n = \{n+1, n+2, \ldots\} \downarrow \emptyset$ nhưng $\mu(B_n) = +\infty \nrightarrow 0$.

§ 3. THÁC TRIỂN ĐỘ ĐO

Trước hết ta xét một số ví dụ sau. Chúng sẽ cho thấy việc xây dựng một độ đo xác suất trên không gian mẫu vô hạn là không hề đơn giản.

Ví dụ 3.7. Trên đường thẳng $\mathbb{R}$ có những tập điểm được gán với một số không âm gọi là "độ dài". Chẳng hạn, độ dài của một đoạn $\Delta = [a, b]$ là $|\Delta| = b - a$; nếu một tập có thể phân tích thành một số hữu hạn đoạn rời nhau: $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ thì độ dài của nó là $|\Delta_1| + |\Delta_2| + \cdots + |\Delta_n|$. Nhưng cũng có những tập mà trực quan không cho ta thấy nên xác định độ dài như thế nào, chẳng hạn như tập các điểm hữu tỉ trong đoạn $[0, 1]$. Vấn đề nảy sinh là làm thế nào để mở rộng khái niệm độ dài cho những tập phức tạp hơn những đoạn thẳng hoặc hợp của một số hữu hạn đoạn thẳng. Trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ và trong không gian $\mathbb{R}^3$ ta cũng gặp vấn đề tương tự.



$$|\Delta| = \sum_{i=1}^{6} |\Delta|_i$$

Sau đây là một ví dụ khác trong lý thuyết xác suất.

Ví dụ 3.8. Trước hết ta ký hiệu một số tập hợp như sau:

$$\{0,1\}^k = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} | x_1, x_2, \ldots, x_k \in \{0,1\}\},$$
$$\{0,1\}^\infty = \{\{x_1, x_2, \ldots, \} | x_1, x_2, \ldots, \in \{0,1\}\}.$$

Xét phép thử bằng cách tung đồng xu đồng chất k lần và ký hiệu một lần "ngửa" là 1 và một lần "sấp" là 0. Khi đó không gian mẫu được biểu diễn là $X := \{0,1\}^k$.

Trong trường hợp này X là hữu hạn (có 2^k phần tử), 2^X là không gian các biến cố cũng hữu hạn phần tử nên ta có thể dễ dàng gán một độ đo xác suất cho nó. Ở đây ta dùng độ đo xác suất cổ điển

$$p(S) = \frac{|S|}{2^k} \quad \text{với } S \in 2^X.$$

Nhắc lại $|S|$ ký hiệu số phần tử của tập S.

Tuy nhiên nếu ta xét phép thử bằng cách tung đồng xu liên tiếp nhiều vô hạn lần, khi đó không gian mẫu là không gian có phần tử là các dãy vô hạn $X := \{0,1\}^\infty$.

Bây giờ liệu chúng ta sẽ định nghĩa các biến cố và độ đo xác suất gán cho chúng như thế nào. Rõ ràng không thể sử dụng ý tưởng của xác suất cổ điển trong trường hợp này. Chúng ta muốn có một độ đo xác suất sao cho, chẳng hạn biến cố có vô hạn mặt ngửa sẽ có xác suất bằng 1. Hoặc là ta sẽ muốn biến cố mà sau một số đủ lớn lần tung đồng xu thì tần suất mặt ngửa tiến dần tới $\frac{1}{2}$ sẽ có xác suất lớn.

Trước hết chúng ta thử xác định không gian biến cố. Đầu tiên ta xét các biến cố đơn giản, ví dụ xét tập hợp sau

$$\{(x_m) \in \{0,1\}^\infty | x_1 = a_1, \ldots, x_k = a_k\}$$

trong đó $k \in \mathbb{N}$ và $a_1, \ldots, a_k \in \{0,1\}$ cố định. (các phần tử của nó là các dãy vô hạn có một số hữu hạn số hạng đầu tiên được xác định).

Sử dụng định nghĩa xác suất cổ điển ta gán cho mỗi được tập hợp như vậy một độ đo là $\dfrac{1}{2^k}$.

Khi đó tập hợp có dạng sau

$$\{(x_m) \in \{0,1\}^\infty | (x_1, \ldots, x_k) \in S\}$$

trong đó $k \in \mathbb{N}$ và $S \in \{0,1\}^k$ cũng thuộc không gian các biến cố. Tập hợp dạng này được gọi là một *tập hình trụ*, nó ứng với biến cố "kết quả sau k lần tung đầu tiên thuộc tập S cho trước" và có độ đo xác suất là $\dfrac{|S|}{2^k}$.

Lớp tất cả các tập hình trụ như vậy

$$\mathscr{A} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \{(x_m) \in \{0,1\}^\infty : (x_1, \ldots, x_k) \in S\} : S \subseteq \{0,1\}^k \right\}.$$

là một đại số. Liệu ta có thể lấy σ-đại số sinh bởi $\mathscr{A}$ làm không gian các biến cố. Rõ ràng $\sigma(\mathscr{A})$ chứa tất cả các biến cố thú vị không thuộc $\mathscr{A}$. Chẳng hạn biến cố "tất cả các lần tung sau lần thứ 5 đều ra mặt sấp" thuộc $\sigma(\mathscr{A})$, do tập hợp $\{(x_m)|x_k = 1\}$ thuộc $\mathscr{A}$ nên

$$\{(x_m)|x_k = 1 \text{ với mọi } k \geq 6\} = \bigcap_{k=6}^{\infty} \{(x_m)|x_k = 1\} \in \sigma(\mathscr{A}).$$

Tương tự, biến cố có vô hạn mặt ngửa xuất hiện trong phép thử thuộc $\sigma(\mathscr{A})$ do

$$\{(x_m)|x_k = 1 \text{ với vô hạn } k\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} \{(x_m)|x_i = 1\} \in \sigma(\mathscr{A}).$$

Như vậy có vẻ rất thích hợp nếu lấy $\sigma(\mathscr{A})$ làm không gian các biến cố. Tuy nhiên chúng ta lại mới chỉ biết được độ đo xác suất gán cho $\mathscr{A}$, còn rất nhiều biến cố ngoài $\mathscr{A}$ thì có thể gán như thế nào để vẫn đảm bảo các tính chất của độ đo. Rất may mắn là chúng ta không phải gán gì thêm bởi xác suất của các biến cố này sẽ được xác định rõ ràng.

Cho $\mathscr{A}$ là một *đại số* trong không gian X, p là một hàm tập σ-cộng tính trên $\mathscr{A}$. Ta sẽ tìm cách thác triển m thành một độ đo trên một *σ-đại số* bao hàm $\mathscr{A}$.

3/3.1 Định lý thác triển độ đo

3.14 Định lý (thác triển độ đo của Caratheodory). *Cho $\mathscr{A}$ là một đại số trên tập X khác rỗng và $p : \mathscr{A} \to \mathbb{R}^+$ là một hàm tập σ-cộng tính. Khi đó tồn tại một độ đo μ xác định trên $\sigma(\mathscr{A})$ thỏa mãn $\mu(A) = p(A)$ với mọi $A \in \mathscr{A}$. Ngoài ra, nếu p là σ-hữu hạn thì μ được xác định duy nhất.*

Định lý trên giúp ta xây dựng một độ đo duy nhất trên một σ-đại số bằng cách chỉ cần xác định dáng điệu của độ đo trên đại số sinh ra σ-đại số này. Việc gán một độ đo đối với một đại số dễ thực hiện hơn nhiều nên định lý thác triển tỏ ra rất hữu dụng. Chẳng hạn ta sẽ áp dụng định lý trên đối với ví dụ 3.8 mà ta đã biết cách gán độ đo cho các tập trụ.

Ví dụ 3.9. Quay lại ví dụ 3.8, ta gán $p(\{0,1\}^{\infty}) = 1$ và

$$p\{(x_m) \in \{0,1\}^{\infty} : (x_1, \ldots, x_k) \in S\} := \frac{|S|}{2^k}$$

với $k \in \mathbb{N}$ và $S \subset \{0,1\}^k$.

Dễ dàng kiểm tra được p là hữu hạn cộng tính. Nếu chứng minh được p liên tục dưới tại tập rỗng thì ta cũng sẽ suy ra kết quả sau:

p là hàm σ-cộng tính trên $\mathscr{A}$.

Khi đó theo định lý thác triển, tồn tại duy nhất một độ đo μ trên σ-đại số $\sigma(\mathscr{A})$ sao cho nó bằng với p trên $\mathscr{A}$. Tuy nhiên độ đo μ của tập bất kỳ trong σ-đại số $\sigma(\mathscr{A})$ được xác định như thế nào ? Để trả lời đầy đủ câu hỏi này, ta cần đến chứng minh của định lý thác triển. Tuy nhiên, ta vẫn có thể tìm ra độ đo xác suất ứng với một vài biến cố trong phép thử. Chẳng hạn xét biến cố "tất cả các lần tung sau lần thứ 5 đều ra mặt sấp", bằng cách sử dụng định lý 3.13.

Đặt $A_k = \{(x_m) | x_6 = \cdots = x_k = 1\}$, với $k \geq 6$, khi đó

$$\mu(\{(x_m)|x_k = 1, k \geq 6\}) = \mu(\bigcap_{k=6}^{\infty} A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{2^5}{2^k} = 0.$$

Tương tự với biến cố "có vô hạn mặt ngửa xuất hiện trong phép thử"

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty}\{(x_m)|x_i = 1\}\right) &= \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=k}^{\infty}\{(x_m)|x_i = 1\}\right) \\ &= 1 - \lim_{k\to\infty} \mu(\{(x_m)|x_i = 0, \forall i \geq k\}) = 1.\end{aligned}$$

Bây giờ chúng ta sẽ tiến hành chứng minh định lý thác triển độ đo theo các bước như sau: Đầu tiên ta xây dựng một hàm tập μ^* - được gọi là độ đo ngoài - đối với lớp 2^X sao cho nó trùng m trên $\mathscr{A}$. Sau đó chỉ ra một σ-đại số chứa $\mathscr{A}$ và μ^* là độ đo đối với σ-đại số ấy. Khi đó hiển nhiên μ^* cũng là độ đo trên $\sigma(A)$.

3.15 Định nghĩa. Một hàm tập μ^* xác định trên lớp 2^X, *lớp tất cả các tập con*, của một không gian X, được gọi là một *độ đo ngoài* nếu

a) $\mu^*(A) \geq 0$ với mọi $A \subset X$,

b) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

c) $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i \Longrightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$.

Chú ý. Độ đo ngoài chỉ đòi hỏi tính nửa σ-cộng tính dưới c) nhưng lại xác định trên lớp tất cả các tập con của X. Đây là các điểm khác biệt cơ bản giữa độ đo và độ đo ngoài.

3.16 Định nghĩa. Cho μ^* là một độ đo ngoài trên X. Các tập con A của X thỏa mãn

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \text{ với mọi } E \subset X \tag{3.16}$$

được gọi là các tập μ^* - *đo được*. Ký hiệu: $\mathscr{L}$ là lớp tất cả các tập μ^* - đo được.

Chú ý. Điều kiện (3.16) tương đương với $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$ với mọi $E \subset X$.

Ví dụ 3.10.

- $X = \{0, 1\}, \mathscr{A} = 2^X$, ta định nghĩa $\mu^*(\emptyset) = 0, \mu^*(A) = 1, \emptyset \neq A \in \mathscr{A}$. Khi đó μ^* không là độ đo nhưng là độ đo ngoài.

- Với $X, \mathscr{A}$ như trên, nếu ta định nghĩa $\mu^*(\emptyset) = 0, \mu^*(\{1\}) = \mu^*(\{2\}) = 2, \mu^*(X) = 1$. Khi đó μ^* không là độ đo cũng không là độ đo ngoài.

Ví dụ 3.11. Cho tập $X = \{1, 2\}$. Lớp tất cả các tập con của X gồm $\{\varnothing, X, \{1\}, \{2\}\}$. Với mỗi tập con $A \subset X$, đặt

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } A \neq \varnothing, \\ 0 & \text{nếu } A = \varnothing. \end{cases}$$

Dễ thấy rằng μ^* là một độ đo ngoài và họ các tập μ^* đo được là $\{\varnothing, X\}$, σ-đại số tầm thường trên X.

3.17 Định lý (Caratheodory). *Lớp tất cả các tập μ^* - đo được $\mathscr{L}$ là một σ-đại số và hàm $\mu = \mu^*|_{\mathscr{L}}$ (thu hẹp của μ^* trên $\mathscr{L}$) là một độ đo trên $\mathscr{L}$.*

Độ đo μ được gọi là *độ đo cảm sinh* bởi độ đo ngoài μ^*.

Quay trở lại định lý 3.14, với mỗi $A \subset X$, ta đặt:

$$\mu^*(A) = \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} p(P_i) : \cup_{i=1}^{\infty} P_i \supset A, P_i \in \mathscr{A} \Big\}. \tag{3.17}$$

Khi đó ta lần lượt chứng minh được các kết quả sau:

- μ^* là một độ đo ngoài .
- $\mu^*(A) = p(A)$ với mọi $A \in \mathscr{A}$.
- μ^* là độ đo trên $\sigma(\mathscr{A})$ hay $\sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{L}$ - lớp tất cả các tập μ^* đo được.
- Với p là σ-hữu hạn và μ_1 là một độ đo khác xác định trên $\sigma(\mathscr{A})$ sao cho $\mu\big|_{\mathscr{A}} = \mu_1\big|_{\mathscr{A}} = p$. Khi đó $\mu(A) = \mu_1(A), \forall A \in \sigma(\mathscr{A})$.

Chứng minh đầy đủ của định lý 3.14 được trình bày ở phụ lục.

Trong định lý 3.14 cần tới giả thiết σ-hữu hạn của p thì độ đo thác triển μ mới là duy nhất. Nếu bỏ giả thiết này chúng ta sẽ có phản ví dụ như sau:

Ví dụ 3.12. Cho $\mathscr{A}$ là đại số sinh bởi các khoảng nửa đóng bên phải: $(a, b]$. Có thể chứng minh được $\mathscr{A}$ gồm các tập hợp:

$$\mathscr{A} = \{A = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n | \Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing, \Delta_i = (a_i, b_i]\}.$$

Định nghĩa một hàm tập σ-cộng tính p trên $\mathscr{A}$ bằng cách đặt

$$p(A) = \begin{cases} +\infty \text{ nếu } A \neq \varnothing, \\ 0 \text{ nếu } A = \varnothing. \end{cases}$$

Khi đó $\sigma(\mathscr{A})$ là σ-đại số Borel $\mathscr{B}$, ta định nghĩa độ đo μ_1 trên $\mathscr{B}$ tương tự như p, tức

$$\mu_1(A) = \begin{cases} +\infty \text{ nếu } A \neq \varnothing, \\ 0 \text{ nếu } A = \varnothing, \end{cases}$$

còn độ đo μ_2 được định nghĩa như sau:

$$\mu_2(A) = \begin{cases} +\infty \text{ nếu } A \text{ gồm vô hạn phần tử },\\ \text{số phần tử của } A \text{ nếu } A \text{ gồm hữu hạn phần tử },\\ 0 \text{ nếu } A = \varnothing. \end{cases}$$

Như vậy μ_1 và μ_2 là hai độ đo khác nhau trên $\mathscr{B}$ nhưng trùng nhau trên $\mathscr{A}$.

Như vậy, ta đã có thể nói tới độ đo μ xác định trên một σ-đại số $\mathscr{A}$. Ta gọi $(X, \mathscr{A})$ là *không gian đo được* và $(X, \mathscr{A}, \mu)$ là *không gian độ đo*. Từ đây về sau, ta luôn xét độ đo xác định trên σ - đại số, không gian độ đo là không gian gắn với σ - đại số.

3.18 Định nghĩa. Độ đo μ trên một σ-đại số $\mathscr{A}$ được gọi là *(độ đo) đủ* nếu mọi tập con của một tập bất kỳ thuộc $\mathscr{A}$ có độ đo không đều cũng thuộc $\mathscr{A}$ và có độ đo không:

$$N \subset E, \mu(E) = 0 \Rightarrow N \in \mathscr{A}, \mu(N) = 0.$$

Các tập N được gọi là *tập μ-không* nếu có ít nhất một tập $A \in \mathscr{A}$ sao cho $N \subset A$ và $\mu(A) = 0$.

3.19 Định lý. *Độ đo μ cảm sinh bởi độ đo ngoài μ^* là độ đo đủ (trên σ-đại số $\mathscr{L}$ các tập μ^*-đo được) và họ các tập có độ đo μ bằng* 0 *trùng với họ các tập có độ đo ngoài μ^* bằng* 0.

Chứng minh. Ở đây, ta chỉ cần chứng minh rằng mọi tập A có $\mu^*(A) = 0$ đều μ^*-đo được. Với mọi tập $E \subset X$ ta có $\mu^*(E \cap A) \le \mu^*(A) = 0$, nên

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \le \mu^*(E \setminus A) = \mu^*(E \cap A^c) \le \mu^*(E).$$

Như vậy, A là μ^*-đo được. ■

Định lý sau đây cho thấy rằng mọi không gian độ đo đều có thể nới rộng thành không gian có độ đo đủ. Vì vậy, ta có thể luôn xét các không gian độ đo là không gian có độ đo đủ.

3.20 Định lý. *Xét không gian độ đo $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Gọi $\mathscr{N}$ là tập tất cả các tập μ-không. Khi đó, lớp $\mathscr{A}_\mu$ gồm tất cả các tập có dạng $A \cup N$, với $A \in \mathscr{A}, N \in \mathscr{N}$ trùng với $\sigma(\mathscr{A} \cup \mathscr{N})$ và công thức $\widetilde{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$ xác định độ đo duy nhất trên $\mathscr{A}_\mu$ sao cho $\widetilde{\mu}|_{\mathscr{A}} = \mu$ và $(X, \mathscr{A}_\mu, \widetilde{\mu})$ là không gian có độ đo đủ.*

§ 4. ĐỘ ĐO TRÊN $\mathbb{R}^k$

Trong bài này, ta sẽ xem xét một cách cụ thể hơn một số trường hợp đặc biệt về các độ đo thường được sử dụng trên $\mathbb{R}^k$.

3/4.1 Độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}$

Ta gọi *gian* trên đường thẳng $\mathbb{R}$ là một tập điểm có một trong các dạng sau:

$$(a,b),[a,b],(a,b],[a,b); \quad (-\infty,+\infty),(-\infty,a),(-\infty,a],(a,+\infty),[a,+\infty).$$

Ký hiệu chung các gian là Δ. Chiều dài của Δ, ký hiệu $|\Delta| = (b-a)$ nếu Δ thuộc vào một trong bốn dạng đầu, còn lại $|\Delta| = \infty$.

Ví dụ 3.13. Chiều dài của tập chỉ có một điểm $[a,a]$ bằng $a-a=0$.

Cho $\mathscr{C}$ là lớp tất cả các tập con của $\mathbb{R}$ có thể biểu diễn thành hợp của một số hữu hạn gian rời nhau

$$\mathscr{C} = \{P : P = \cup_{i=1}^{n}\Delta_i, \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset (i \neq j)\},$$

trong đó Δ_i là những gian, n là số tự nhiên tuỳ ý.

3.21 Bổ đề. *$\mathscr{C}$ là một đại số.*

Chứng minh. Dễ thấy, nếu $P \in \mathscr{C}$ thì $\mathbb{R} \setminus P \in \mathscr{C}$. Mặt khác, hiển nhiên giao của hai gian là một gian, cho nên nếu $P, P' \in \mathscr{C}$, chẳng hạn $P = \cup_i \Delta_i, P' = \cup_j \Delta'_j$ thì

$$P \cap P' = \cup_i \cup_j (\Delta_i \cap \Delta'_j) \in \mathscr{C}, P \cup P' = \mathbb{R} \setminus [(\mathbb{R} \setminus P) \cap (\mathbb{R} \setminus P')] \in \mathscr{C}.$$

Vậy $\mathscr{C}$ là một đại số. ■

Ta xác định trên $\mathscr{C}$ một hàm tập như sau: nếu $P \in \mathscr{C}$ và có dạng $P = \cup_{i=1}^{n}\Delta_i$, trong đó Δ_i là những gian rời nhau thì ta đặt

$$m(P) = \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i|.$$

Có thể chứng minh được m là σ-cộng tính và σ-hữu hạn trên $\mathscr{C}$. Áp dụng định lý 3.14, tồn tại một độ đo thác triển từ m được xác định như sau:

$$\forall A \in 2^{\mathbb{R}}, \mu^*(A) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} m(P_i) : \cup_{i=1}^{\infty} P_i \supset A, P_i \in \mathscr{C}\Big\}.$$

Độ đo xây dựng theo cách trên gọi là *độ đo Lebesgue* trên đường thẳng. Các tập μ^* đo được, tức là thuộc σ-đại số $\mathscr{L}$ được gọi là các *tập đo được theo nghĩa Lebesgue* (*đo được* ($\mathscr{L}$)), độ đo Lebesgue được ký hiệu trong giáo trình này là m.

Chúng ta đã biết σ-đại số sinh bởi các gian còn được gọi là σ-đại số Borel. Do vậy, tập đo được Borel cũng là đo được Lebesgue.

Nhận xét. Không gian độ đo $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, m)$ là σ - hữu hạn. Thật vậy ta có $\mathbb{R} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (n, n+1]$ là hợp đếm được các tập có độ đo bằng 1 hữu hạn.

Chú ý rằng họ các tập đo được Lebesgue không bằng $2^{\mathbb{R}}$, người ta chứng minh được tồn tại tập con của $\mathbb{R}$ không đo được Lebesgue. Thật vậy trên đoạn $[0,1]$ tồn tại một tập $A \subset [0,1]$ sao cho các tập $A+q, q \in \mathbb{Q}$ là rời nhau và

$$[0,1] \subset \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (A+q).$$

Ở đây ta hiểu $A+q = \{x+q | x \in A\}$. Tuy nhiên do tập số hữu tỷ là đếm được nên ta có thể viết là $[0,1] \subset \bigcup A_n$.

Tuy nhiên ta dễ dàng chứng minh được $\mu^*(A+q) = \mu^*(A)$ nên các tập A_n có độ đo ngoài bằng nhau và do vậy

$$1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

nên $\mu^*(A_n) = \mu^*(A) > 0$. Nếu các A_n là μ^* đo được thì ta lại thấy

$$\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (A+q) \subset [0,2]$$

và do đó $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \leq 2$ nên $\mu^*(A_n) = \mu^*(A) = 0$. Vô lý.

Từ định nghĩa ta chứng minh được kết quả sau đây:

3.22 Mệnh đề. *Mọi tập hợp điểm hữu hạn hoặc đếm được $E \subset (a,b)$ đều đo được và có độ đo bằng không.*

Chứng minh. Giả sử $E = \{t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots\}$ là tập hợp đếm được. Các tập điểm đơn $\{t_i\}$ là đo được và có độ đo $m\{t_i\} = m[t_i, t_i] = 0$ nên E cũng đo được. Sử dụng tính chất σ-cộng tính của độ đo ta có:

$$m(E) = \sum_{i=1}^{\infty} m\{t_i\} = 0.$$

Ví dụ 3.14. Tập số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ có độ đo Lebesgue bằng 0.

Bây giờ chúng ta sẽ chỉ ra vẫn tồn tại tập không đếm được nhưng lại có độ đo Lebesgue bằng 0.

Ví dụ 3.15. Cho C là tập hợp Cantor

$$C := \left\{ \sum_{n\geq 1} x_n/3^n : t_n = 0 \text{ hoặc } 2 \text{ với mọi } n \right\}.$$

Với mỗi $N = 1,2,3,\ldots$, đặt $C_N := \{\sum_{n\geq 1} t_n/3^n : t_n = 0,1$ hoặc 2 với mọi n và $t_n \neq 1$ với mọi $n \leq N\}$.

Như vậy C_1 là chính là khoảng đơn vị [0,1] xóa đi khoảng "giữa ba phần" mở (1/3,2/3). Khi đó để có C_2, từ 2 khoảng còn lại, ta xóa đi các khoảng "giữa ba phần" (1/9,2/9) và (7/9,8/9). Quá trình lặp N lần thì sẽ cho ta C_N. Như vậy $C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_N \supset \cdots$, và $\bigcap_{N\geq 1} C_N = C$.

Chúng ta có $\mu(C_n) = (2/3)^N$ với mọi N. Vì thế $\mu(C) = 0$. Mặt khác, C có lực lượng c do tồn tại song ánh giữa C và $2^{\mathbb{N}}$.

Nhận xét. Theo định lý 3.19, độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}$ là độ đo đủ, vì vậy mọi tập con của tập có độ đo 0 cũng có độ đo 0.

3/4.2 Độ đo Lebesgue trong không gian $\mathbb{R}^k$

Trong không gian này ta gọi gian là tập gồm những điểm $x = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ mà mỗi toạ độ t_i chạy trên một gian nào đó của $\mathbb{R}$. Nếu t_i chạy trên một gian của $\mathbb{R}$ có hai đầu mút là α_i, β_i $(i = 1, 2, \dots, k)$ thì thể tích của Δ là số

$$|\Delta| = \prod_{i=1}^{k} (\beta_i - \alpha_i).$$

Gọi $\mathscr{C}^k$ là lớp những tập trong $\mathbb{R}^k$ có thể biểu diễn thành hợp của một số hữu hạn gian rời nhau. Ta có thể chứng minh rằng:

1. $\mathscr{C}^k$ là một đại số.

2. Nếu với mỗi tập $P \in \mathscr{C}^k$ có dạng $P = \cup_{i=1}^{n} \Delta_i$, trong đó Δ_i là những gian rời nhau, ta đặt

$$m^k(P) = \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i|,$$

thì hàm m^k là một hàm tập σ-cộng tính trên đại số $\mathscr{C}^k$.

3. Hàm tập m^k có thể thác triển thành một độ đo m^k trên σ-đại số $\mathscr{L}^k \supset \mathscr{C}^k$. Độ đo m^k này gọi là độ đo Lebesgue trong $\mathbb{R}^k$, và các tập thuộc lớp $\mathscr{L}^k$ gọi là *tập đo được* ($\mathscr{L}$) trong $\mathbb{R}^k$.

Độ đo Lebesgue m^k cũng là một độ đo đủ và σ-hữu hạn.

3/4.3 Độ đo Lebesgue-Stieltjes trên $\mathbb{R}$

Nhắc lại một hàm $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được gọi là *liên tục trái* tại u nếu $F(u^-) = \lim_{t \to u^-} F(t) = F(u)$ và *liên tục phải* tại u nếu $F(u^+) = \lim_{t \to u^+} F(t) = F(u)$.

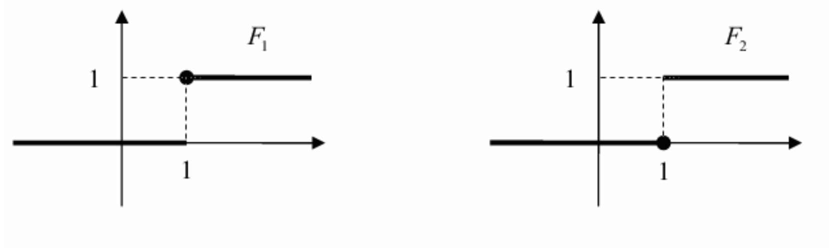
Ví dụ 3.16. Xét hàm số sau

$$F_1(t) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } t \in [1, \infty), \\ 0 \text{ nếu } t \in (-\infty, 1) \end{cases}$$

không liên tục trái tại $t = 1$ do $F_2(1) = 1$ còn $F_2(1^-) = 0$ trong khi hàm số

$$F_2(t) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } t \in (1, \infty), \\ 0 \text{ nếu } t \in (-\infty, 1] \end{cases}$$

là liên tục trái tại 1.



Cho $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm không giảm và liên tục trái tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$ và m_F là một hàm tập trên $\mathbb{R}$ được xác định như sau: $m_F([a, b)) = F(b) - F(a)$ và

$$m_F(\cup_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i)) = \sum_{i=1}^{\infty}[F(b_i) - F(a_i)],$$

trong đó các khoảng mở phải đóng trái $[a_i, b_i)$ là rời nhau. Với $A \subset \mathbb{R}$ bất kỳ, người ta định nghĩa

$$m_F^*(A) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} F(b_i) - F(a_i) : \cup_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i) \supset A\Big\}.$$

Có thể chứng minh được m_F^* là một độ đo trên σ-đại số Borel, ta ký hiệu là μ_F.

Độ đo μ_F của điểm $a \in \mathbb{R}$ được xác định như sau:

$$\mu_F(\{a\}) = \inf\{F(t) - F(a) : a < t\} = \lim_{t \to a^+} F(t) - F(a) = F(a^+) - F(a).$$

Như vậy $\mu_F(\{a\})$ bằng độ lớn bước nhảy của hàm F tại a. Khi đó ta có:

$$\mu_F(a, b) = F(b) - F(a^+), \mu_F[a, b] = F(b^+) - F(a), \mu_F(-\infty, a) = F(a) - \lim_{y \to -\infty} F(y), \ldots$$

Ví dụ 3.17. Xét hàm số $F_2(t)$ ở ví dụ 3.16, khi đó ta lần lượt tính được:

$\mu_F([0, 1)) = F(1) - F(0) = 0$; $\mu_F(\{1\}) = F(1^+) - F(1) = 1$; $\mu_F((1, \infty)) = \lim_{t \to \infty} F(t) - F(1^+) = 0$; $\mu_F([1, \infty)) = \mu_F((0, \infty)) + \mu_F(\{1\}) = 1$.

3.23 Định nghĩa. Độ đo μ_F xác định như trên được gọi là ***độ đo Lebesgue-Stieltjes*** cảm sinh bởi hàm F.

Chú ý. Độ đo Lebesgue m xác định trên $\mathbb{R}$ ở phần trước cũng là một độ đo Lebesgue-Stieltjes cảm sinh bởi hàm $F(t) = t$.

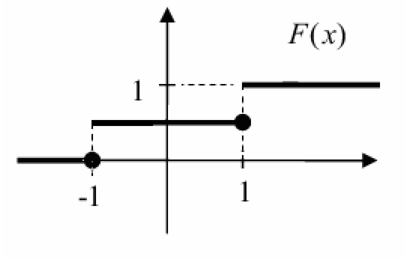
Chú ý. Người ta thấy rằng với một độ đo μ xác định trên σ-đại số Borel, ta định nghĩa hàm F như sau:

$$F(t) = \mu(-\infty, t).$$

Khi đó sử dụng các tính chất của độ đo có thể chỉ ra F là không âm, đơn điệu không giảm và liên tục trái trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 3.18. Cho hàm số $F(t)$ được định nghĩa như sau:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } t \leq -1, \\ \frac{1}{2}, & \text{nếu } -1 < t \leq 1, \\ 1, & \text{nếu } t > 1. \end{cases}$$



Có thể thấy hàm $F(t)$ đơn điệu không giảm và liên tục trái trên $\mathbb{R}$. Khi đó ta có

$$\mu_F(-\infty, a) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } a \leq -1, \\ \frac{1}{2}, & \text{nếu } -1 < a \leq 1, \\ 1, & \text{nếu } a > 1. \end{cases}$$

Từ hình vẽ ta cũng dễ dàng thấy $\mu_F\{-1\} = \mu_F\{1\} = \frac{1}{2}$.

BÀI TẬP

C.1. Cho $X = (0,1)$. Lớp nào trong các lớp sau đây là một đại số:

$\mathscr{F}_1 = \{\emptyset, (0,1), (0,\frac{1}{2}), (\frac{1}{2},1)\}$,

$\mathscr{F}_2 = \{\emptyset, (0,1), (0,\frac{1}{2}), [\frac{1}{2},1), (0,\frac{2}{3}], (\frac{2}{3},1)\}$,

$\mathscr{F}_3 = \{\emptyset, (0,1), (0,\frac{2}{3}), [\frac{2}{3},1)\}$?

C.2. Chứng minh rằng nếu $\mathscr{A}_1$ và $\mathscr{A}_2$ là hai đại số các tập con của X, thì $\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2$ cũng là một đại số.

C.3. Tìm hai đại số mà hợp của chúng không còn là đại số.

C.4. Cho $X = [0,1]$. Chứng minh rằng đại số sinh bởi lớp $\{[0,\frac{1}{2}), \{1\}\}$ là

$\mathscr{A} = \{\emptyset, [0,\frac{1}{2}), [\frac{1}{2},1), \{1\}, [0,1), [0,\frac{1}{2}) \cup \{1\}, [\frac{1}{2},1], X\}$.

C.5. Cho $X = \{0,1,2,3\}$. Chứng minh rằng đại số sinh bởi lớp $\{\{0,1\},\{1,2,3\}\}$ là

$\mathscr{A} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2,3\}, \{0,1\}, \{0,2,3\}, \{1,2,3\}, X\}$.

C.6. Cho tập X và $\mathscr{A}$ là một đại số (σ-đại số) các tập con của X. Tập $A \subset X$ được gọi là *nguyên tử* của $\mathscr{A}$ nếu $A \neq \emptyset$ và nếu $\emptyset \neq B \subset A, B \in \mathscr{A}$ thì $B = A$.

a) Chỉ ra tập nào là nguyên tử trong các đại số sau:

$\mathscr{A}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ với $X = \{1,2,3,4\}$,

$\mathscr{A}_2 = \{\emptyset, (0,1), (0,\frac{2}{3}), [\frac{2}{3},1)\}$ với $X = (0,1)$?

b) Chứng minh rằng hai nguyên tử khác nhau phải rời nhau.

c*) Chứng minh rằng nếu $\mathscr{A}$ là một đại số chỉ gồm một số hữu hạn các tập con của X thì tập hợp $\mathscr{M}$ gồm các nguyên tử của $\mathscr{A}$ tạo thành một phân hoạch hữu hạn của X và $\mathscr{A}$ là đại số sinh bởi $\mathscr{M}$.

d*) Chứng minh kết quả tương tự câu c) trong trường hợp $\mathscr{A}$ là một đại số chỉ gồm một số hữu hạn hoặc đếm được các tập con của X.

Nếu không có giả thiết A gồm hữu hạn (đếm được) các tập con thì kết luận của câu C.6 c) và d) chưa chắc đúng, hai bài tập sau là ví dụ.

C.7. Cho X là một tập vô hạn và $\mathscr{M}$ là lớp các tập chỉ gồm một phần tử trong X. Chứng minh đại số sinh bởi $\mathscr{M}$ là lớp tất cả các tập con $A \subset X$ mà A hữu hạn hoặc A^c hữu hạn.

C.8*. Với X và $\mathscr{M}$ được cho như trên. Chứng minh σ-đại số sinh bởi $\mathscr{M}$ là lớp tất cả các tập con $A \subset X$ mà 1 trong hai tập A hay A^c là hữu hạn hoặc đếm được.

C.9*. Cho $\mathscr{M}$ là họ tất cả các tập con của X gồm đúng hai phần tử. Tìm $\sigma(\mathscr{M})$ (σ-đại số sinh bởi $\mathscr{M}$).

C.10. Cho $\mathscr{F}$ là σ-đại số trên $X = [0,1]$ thoả mãn $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \in \mathscr{F}$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$. Chứng tỏ rằng

$a)\{0\} \in \mathscr{F}$, $\qquad b)(\frac{1}{n}, 1] \in \mathscr{F}$ với mọi n,

$c)\{\frac{1}{n} : n = 2, 3, \ldots\} \in \mathscr{F}$, $\qquad d)(0, \frac{1}{n}] \in \mathscr{F}$ với mọi n.

C.11*. Xét tập X và lớp $\emptyset \neq \mathscr{M} \subset 2^X$. Lớp $\mathscr{M}$ được gọi là *lớp đơn điệu* nếu thoả mãn 2 điều kiện:

a) với mọi dãy các tập đơn điệu tăng $A_n \in \mathscr{M}$ thì $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M}$, hoặc

b) với mọi dãy các tập đơn điệu giảm $A_n \in \mathscr{M}$ thì $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M}$.

Giả sử $\mathscr{A}$ là một đại số. Chứng minh rằng $\mathscr{A}$ là σ - đại số khi và chỉ khi $\mathscr{A}$ là lớp đơn điệu.

C.13. Trong không gian đo được $(X, \mathscr{A})$ ở bài tập C.4, một độ đo μ xác định trên $(X, \mathscr{A})$ thoả mãn

$$\mu[0,1) = 0.8; \mu[\frac{1}{2}, 1) = 0.3; \mu[\frac{1}{2}, 1] = 0.2.$$

Hãy tính $\mu(X)$ và $\mu\{1\}$.

C.14. Trong không gian đo được $(X, \mathscr{A})$ ở bài tập C.5, một độ đo μ xác định trên $(X, \mathscr{A})$ thoả mãn

$$\mu\{0\} = 0.3; \mu\{2,3\} = 0.1; \mu\{0,1,2,3\} = 1.$$

Hãy tính $\mu\{0,1\}$ và $\mu\{1,2,3\}$.

C.15. Trong không gian độ đo $(X, \mathscr{F}, \mu)$, tập X có độ đo 1, chứng minh rằng nếu A_1, A_2 là các tập có độ đo 0 thì $A = A_1^c \cap A_2^c$ cũng là tập đo được. Độ đo của tập này bằng bao nhiêu?

C.16. Cho $(X, \mathscr{F}, \mu)$ là một không gian có độ đo σ-hữu hạn với $\mu(X) = +\infty$. Chứng minh rằng với $M < \infty$ bất kỳ, tồn tại một $A \in \mathscr{F}$ sao cho $M < \mu(A) < \infty$.

C.17. Cho X là tập vô hạn. Đặt $m(A) = 0$ với A hữu hạn bất kỳ, và $m(A) = +\infty$ nếu A vô hạn. Chứng minh m là hữu hạn cộng tính nhưng không cộng tính đếm được.

C.18. Cho không gian xác suất $(X, \Sigma, p), m \in \mathbb{N}$ và $A_i \in \Sigma, i = 1, \ldots, n$. Chứng minh rằng

$$p\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{m}(p(A_i) - (m-1)).$$

Gợi ý: Chứng minh bằng phương pháp quy nạp, đầu tiên kết luận đúng với $m = 2$. Nếu kết luận đúng với $m = k$ thì cũng đúng với $m = k + 1$.

C.19. Cho không gian độ đo $(X, \mathscr{F}, \mu)$. Chứng minh rằng nếu dãy $A_i \in \mathscr{F}$ thoả mãn $\mu(A_i \cap A_j) = 0, \forall i \neq j$ thì

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Gợi ý: Sử dụng phương pháp tách hợp của dãy $\{A_n\}$ bất kỳ thành hợp của các tập rời nhau B_n, như trong chứng minh của định lý 3.10.iii).

C.20*. Cho không gian độ đo $(X, \mathscr{F}, \mu)$. Chứng minh rằng

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty}(\mu(A_i) - \mu(B_i)).$$

với mọi dãy $A_i, B_i \in \mathscr{F}$ thoả mãn $B_i \subseteq A_i, i = 1, 2, \ldots$.

C.21. Cho tập $X \neq \emptyset$. Với mỗi tập con $A \subset X$, đặt

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } A \neq \emptyset, \\ 0 & \text{nếu } A = \emptyset. \end{cases}$$

Chứng minh μ^* là một độ đo ngoài. Chỉ ra họ các tập μ^* đo được.

C.22*. Cho X là ma trận vuông cấp 10 gồm 100 số thực, A là các tập gồm các số thực trong 100 số đã cho. Ta định nghĩa hàm tập μ^*: $\mu^*(A) = \{$ số cột mà mỗi cột chứa ít nhất một phần tử $x_i \in A\}$. Chứng minh μ^* là độ đo ngoài và E là μ^* - đo được $\Leftrightarrow \forall x \in E$ thì cả cột chứa x cũng thuộc E.

C.23. Cho X là một tập vô hạn. $\mathscr{A}$ là họ các tập con A của X sao cho hoặc A hữu hạn thì đặt $m(A) = 0$, hoặc phần bù của A hữu hạn, thì đặt $m(A) = 1$.

a) Chứng minh $\mathscr{A}$ là một đại số nhưng không là σ-đại số.

b) Chứng minh rằng m là hữu hạn cộng tính trên $\mathscr{A}$.

C.24. Tìm các ví dụ để chứng tỏ:

a) hợp không đếm được các tập có độ đo không có thể có độ đo dương;

b) giao không đếm được các tập có độ đo 1 có thể có độ đo không.

C.25*. Giả sử $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ là chuỗi số dương hội tụ. Với mỗi tập $A \subset \mathbb{N}$ hữu hạn, đặt $\varphi(A) = \sum_{n\in A} a_n$. Nếu $A \subset \mathbb{N}$ vô hạn thì đặt $\varphi(A) = +\infty$. Chứng tỏ rằng φ cộng tính hữu hạn nhưng không σ-cộng tính trên lớp tất cả các tập con của $\mathbb{N}$.

C.26. Cho ba hàm số sau

$$F_1(t) = \begin{cases} -1 \text{ nếu } t < 2, \\ 2 \text{ nếu } 2 \le t < 4, \\ -1 \text{ nếu } 4 \le t < 5, \\ 0 \text{ nếu } t \ge 5, \end{cases} \qquad F_2(t) = \begin{cases} t \text{ nếu } t < 1, \\ 2 \text{ nếu } 1 \le t < 3, \\ \dfrac{5t+1}{t+1} \text{ nếu } t \ge 3, \end{cases}$$

$$F_3(t) = \begin{cases} -2 \text{ nếu } t < 0, \\ -1 \text{ nếu } 0 \le t < 2, \\ 2 \text{ nếu } 2 \le t < 3, \\ 3 \text{ nếu } t \ge 3, \end{cases}$$

a) Vẽ đồ thị của ba hàm số trên.

b) Trong các hàm số trên, hàm nào là hàm đơn điệu không giảm và liên tục phải.

Hãy tìm độ đo Lebesgue-Stieltjes cảm sinh bởi các hàm đó của các tập sau:

c) $(-\infty, 1]$ d) $[3, 3]$ e) $(3, \infty)$.

Phụ Lục

Chứng minh của một số định lý

Chứng minh (**Chứng minh phần tiếp theo của định lý 3.13).** Bây giờ giả sử $\mu : \mathscr{F} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ là hàm tập hữu hạn cộng tính thoả mãn $\mu(\emptyset) = 0$. Ta cần chỉ ra μ là σ-cộng tính nếu μ thoả mãn một trong hai điều kiện i) hoặc ii).

Nếu μ thoả mãn điều kiện i) và cho $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, trong đó các $B_i \in \mathscr{F}$ rời nhau. Đặt

$$A_1 = B_1, A_2 = B_1 \bigcup B_2, \dots, A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, \dots$$

thì $B = \cup_{n=1}^{\infty} A_n, A_1 \subset A_2 \subset \dots$, nên $\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$. Từ tính cộng tính của μ ta có

$$\mu(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)$$

nên

$$\mu(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i).$$

Còn nếu μ thoả mãn điều kiện ii) thì với các ký hiệu như trước, ta xét thêm giả thiết mọi $\mu(B_i) < +\infty$, (vì nếu có một $\mu(B_i) = +\infty$ thì kết quả là rõ ràng). Ta có

$$\emptyset = B \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (B \setminus A_n),$$

trong đó các $A'_n = B \setminus A_n \in \mathscr{F}$ và $A'_1 \supset A'_2 \supset \ldots$. Vậy

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B \setminus A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A'_n) = 0.$$

Nhưng do $A_n \subset B$ và $\mu(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) < \infty$ nên $\mu(B \setminus A_n) = \mu(B) - \mu(A_n)$. Từ đó

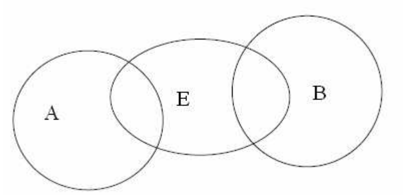
$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i).$$ ∎

Chứng minh (**Chứng minh của định lý 3.17).** Ở đây ta dùng ký hiệu tắt $AB = A \cap B$, $AB^c = A \setminus B$.

B1 ($\mathscr{L}$ là một đại số) Thật vậy, dễ thử thấy rằng $\mathscr{L}$ kín đối với phép lấy phần bù và $\emptyset, X \in \mathscr{L}$. Ta chỉ ra $\mathscr{L}$ kín đối với phép giao (và do đó $\mathscr{L}$ là một đại số). Giả sử $A, B \in \mathscr{L}$. Ta có

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(EA) + \mu^*(EA^c) \quad \text{(do } A \text{ là } \mu^* \text{ - đo được)}\\
&= \mu^*(EAB) + \mu^*(EAB^c) + \mu^*(A^cEB) + \mu^*(A^cEB^c) \quad \text{(do } B \text{ là } \mu^* \text{ - đo được)}\\
&\geq \mu^*(EAB) + \mu^*(EAB^c \cup EA^cB \cup EA^cB^c)\\
&\geq \mu^*(EAB) + \mu^*\big(E(AB)^c\big).
\end{aligned}$$

Vậy $AB \in \mathscr{L}$.



B2. μ^* cộng tính hữu hạn trên $\mathscr{L}$. Giả sử $A, B \in \mathscr{L}$ và $AB = \emptyset$, ta có

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*\big((A \cup B)A\big) + \mu^*\big((A \cup B)A^c\big) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

B3. $\mathscr{L}$ là σ-đại số. Không giảm tổng quát, ta giả sử dãy $\{A_k\} \subset \mathscr{L}$ từng cặp rời nhau và $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Theo bước 1, $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{L}$. Do đó

$$\mu^*(E) = \mu^*(EB_n) + \mu^*(EB_n^c) \geq \sum_{k=1}^{n} \mu^*(EA_k) + \mu^*(EA^c),$$

vì theo chứng minh của bước 2

$$\mu^*(EB_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(EA_k).$$

Cho $n \to \infty$ ta được

$$\mu^*(E) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(EA_k) + \mu^*(EA^c) \geq \mu^*(EA) + \mu^*(EA^c).$$

Từ đó suy ra $A \in \mathscr{L}$.

B4. μ^* là σ-cộng tính trên $\mathscr{L}$. Điều này rút ra từ chứng minh của bước 3 (lấy $E = A$). ∎

Chứng minh (**Chứng minh của định lý 3.14).** Với mỗi $A \subset X$, ta đặt:

$$\mu^*(A) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} p(P_i) : \cup_{i=1}^{\infty} P_i \supset A, P_i \in \mathscr{A}\Big\}. \tag{3.23}$$

3.24 Bổ đề. *μ^* là một độ đo ngoài .*

Chứng minh. Rõ ràng, $\mu^*(\emptyset) = 0$ và $\mu^*(A) \geq 0, \forall A \subset A$. Ta chỉ cần chứng minh μ^* thoả mãn điều kiện thứ ba trong định nghĩa độ đo ngoài. Giả sử $\{A_k\} \subset 2^X$ và $\varepsilon > 0$ cho trước. Với mỗi $k \in \mathbb{N}$ ta luôn có thể chọn được dãy $\{A_{k_j}\} \subset \mathscr{A}$ sao cho $A_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{k_j}$, và

$$\sum_{j=1}^{\infty} p(A_{k_j}) \leq \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Do $\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{k_j} \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ nên $\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) + \varepsilon.$

Cho $\varepsilon \downarrow 0$ ta có điều phải chứng minh. ∎

1) Lấy $A \in \mathscr{A}$. Rõ ràng $\mu^*(A) \leq p(A)$, vì $A \in \mathscr{A}$ và $A \subset A \cup \emptyset \cup \cdots \cup \emptyset$. Ngoài ra, nếu $A \in \mathscr{A}$ thì với mọi dãy $A_k \in A$ $(k = 1, 2, \ldots)$ sao cho $A \subset \cup_{k=1}^{\infty} A_k$, ta đều có $p(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} p(A_i)$. Vì vậy, $p(A) \leq \mu^*(A)$. Do đó $\mu^*(A) = p(A)$ với mọi $A \in \mathscr{A}$.

2) Để chứng minh μ^* là độ đo trên $\sigma(\mathscr{A})$, ta sẽ chỉ ra $\sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{L}$ - lớp tất cả các tập μ^* đo được. Nhưng do $\mathscr{L}$ là một σ-đại số nên ta chỉ cần chứng minh $\mathscr{A} \subset \mathscr{L}$, tức với $A \in \mathscr{A}$ bất kỳ, A là μ^* đo được.

Theo 1) μ^* là độ đo ngoài, nên với $A \in \mathscr{A}, E \subset X$ ta có

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(EA) + \mu^*(E \setminus A).$$

Mặt khác, với $\varepsilon > 0$ cho trước, ta chọn $\{A_k\} \subset \mathscr{A}$ sao cho $E \subset \cup_{k=1}^{\infty} A_k$ và

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(A_k) \leq \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Sử dụng giả thiết $\mathscr{A}$ là một đại số, ta có:

$$EA \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} AA_k, E \setminus A = EA^c \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A^cA_k,$$

$$\varepsilon + \mu^*(E) \geq \sum_{k=1}^{\infty} p(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty}[p(AA_k) + p(A^cA_k)] \geq \mu^*(EA) + \mu^*(E \setminus A).$$

Từ đó cho $\varepsilon \downarrow 0$, ta có điều phải chứng minh.

3) Giả sử p là σ-hữu hạn và μ_1 là một độ đo khác xác định trên $\sigma(\mathscr{A})$ sao cho $\mu\big|_{\mathscr{A}} = \mu_1\big|_{\mathscr{A}} = p$. Ta cần chứng minh $\mu(A) = \mu_1(A), \forall A \in \sigma(\mathscr{A})$.

Theo giả thiết, $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$, $p(X_n) < \infty$, các X_n đôi một rời nhau. Ta có $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ với $A_n = X_n \cap A \in \sigma(\mathscr{A})$, $n = 1, 2, \ldots$, các A_n đôi một rời nhau. Vậy chỉ cần chứng minh $\mu(A_n) =$

$\mu_1(A_n)$ với mọi số tự nhiên n. Thật vậy, nếu $\{E_{n,i}\}_{i=1}^{\infty}$ là một dãy bất kỳ những tập thuộc $\mathscr{A}$ sao cho $A_n \subset \cup_{i=1}^{\infty} E_{n,i}$ thì $\mu_1(A_n) \le \sum_{i=1}^{\infty} p(E_{n,i})$. Do đó

$$\mu_1(A_n) \le \mu(A_n). \tag{1}$$

Tương tự,

$$\mu_1(X_n \setminus A_n) \le \mu(X_n \setminus A_n) \tag{2}$$

Ngoài ra,

$$\mu_1(A_n) + \mu_1(X_n \setminus A_n) = \mu_1(X_n) = p(X_n) = \mu^*(X_n) = \mu^*(A_n) + \mu^*(X_n \setminus A_n). \tag{3}$$

Vì các số hạng trong (1), (2), (3) đều hữu hạn nên ta suy ra $\mu_1(A_n) = \mu(A_n), \forall A_n \in \sigma(A)$. ■

Chứng minh (**Chứng minh của định lý 3.20).** Ta sẽ chỉ ra rằng $\mathscr{A}_\mu = \sigma(\mathscr{A} \cup \mathscr{N})$. Thật vậy, nếu $N \subset B \in \mathscr{A}$, $\mu(B) = 0$ thì

$$(A \cup N)^c \subset (A \cup B)^c + B \cap (A \cup N)^c, \mu(B \cap (A \cup N)^c) = 0.$$

Như vậy, $\mathscr{A}_\mu$ kín đối với phép lấy phần bù.

Mặt khác, rõ ràng $\mathscr{A}_\mu \supset \mathscr{A}$, $\mathscr{A}_\mu \supset \mathscr{N}$ và $\mathscr{A}_\mu$ kín đối với phép hợp đếm được. Vậy, $\mathscr{A}_\mu$ là σ-đại số. Từ đó suy ra $\mathscr{A}_\mu = \sigma(\mathscr{A} \cup \mathscr{N})$.

Tiếp theo, ta chứng minh $\widetilde{\mu}$ là độ đo trên $\mathscr{A}_\mu$. Nếu $A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$ với $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$; $N_1, N_2 \in \mathscr{N}$ thì $A_1 \triangle A_2 \subset N_1 \cup N_2$. Do đó, $\mu(A_1 \triangle A_2) = 0$. Suy ra $\mu(A_1) = \mu(A_2)$. Như vậy, $\widetilde{\mu}$ xác định đơn trị (không phụ thuộc vào cách biểu diễn $A \cup N$). Từ tính σ-cộng tính của μ ta suy ra $\widetilde{\mu}$ là σ-cộng tính. Vậy $\widetilde{\mu}$ là độ đo trên $\mathscr{A}_\mu$.

Ngoài ra, giả sử $M \subset \widetilde{A} \in \mathscr{A}_\mu$, và $\widetilde{\mu}(\widetilde{A}) = 0$. Khi đó, do $\widetilde{A} = A \cup N$ với $A \in \mathscr{A}$, $N \in \mathscr{N}$ và $\widetilde{\mu}(\widetilde{A}) = \mu(A) = 0$, suy ra $\mu(M) = 0$. Vậy M là tập μ-không, tức là $\widetilde{\mu}$ là độ đo đủ.

Cuối cùng, dễ dàng thấy được tính duy nhất của $\widetilde{\mu}$. ■