MỤC LỤC

CHƯƠNG 1

TẬP HỢP VÀ LÝ THUYẾT SỐ THỰC

§ 1. TẬP HỢP

1/ 1.1 Khái niệm và ký hiệu

Tập hợp là một khái niệm cơ bản của toán học. Một cách trực quan, ta có thể hiểu tập hợp là một *nhóm các đối tượng bất kỳ*. Thông thường tập hợp được gọi tắt là "tập”. Ta thường sử dụng các chữ cái in ký hiệu cho tập hợp: $A, B, X, Y, \ldots$.

Nếu một đối tượng x là phần tử của tập X, ta thường ký hiệu $x \in X$ và đọc là *x thuộc* X. Tập không có phần tử nào gọi là *tập rỗng*, và được ký hiệu là $\emptyset$.

Một tập hợp A được gọi là *bị chứa trong* X hoặc *là tập con* của X, ta ký hiệu

$$A \subseteq X \text{ hoặc } X \supseteq A$$

khi và chỉ khi tất cả các phần tử của A đều là phần tử của X.

Ký hiệu $A = B$ có nghĩa là $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$. Khi đó, ta nói A và B là hai tập *bằng nhau*.

Phương pháp chính để xác định một tập hợp là chỉ ra điều kiện mà các phần tử thuộc tập đó thỏa mãn. Ký hiệu $\{x : P\}$ có nghĩa đây là tập hợp của tất cả x thỏa mãn tính chất P. Ví dụ, $\{x : (x-4)^2 = 4\} = \{2, 6\} = \{6, 2\}$.

Tuy nhiên, việc định nghĩa tập hợp qua điều kiện có thể dẫn tới những mâu thuẫn. Ví dụ, lấy $R = \{X : X \notin X\}$. Khi đó $R \notin R$ suy ra $R \in R$ và ngược lại (nghịch lý của Bertrand Russell).

Chúng ta quy ước chung là dấu gạch chéo trên một ký hiệu có nghĩa là "không", chẳng hạn $a \neq b$, có nghĩa "a không bằng b", ký tự "$\notin$" có nghĩa "không phải là một phần tử của". Như vậy $x \notin A$ có nghĩa x không phải là một phần tử của A, như $3 \notin \{1, 2\}$.

Cho hai tập hợp bất kỳ X và Y, *tích Des Cartes* của chúng, ký hiệu $X \times Y$ là tập hợp của tất cả các cặp có thứ tự (x, y) với x thuộc X và y thuộc Y. Ta hiểu khái niệm cặp có thứ tự theo nghĩa: $(x, y) = (x', y')$ nếu và chỉ nếu $x = x', y = y'$.

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Ví dụ 1.1. Với $X = \{x, y, z\}, Y = (a, b)$, ta có

$$X \times Y = \{(x, a), (x, b), (y, a), (y, b), (z, a), (z, b)\};$$
$$Y \times X = \{(a, x), (b, x), (a, y), (b, y), (a, z), (b, z)\}.$$

Tích Des Cartes của n tập hợp được định nghĩa và ký hiệu tương tự. Một ví dụ cơ bản của tích Des Cartes là $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, được ký hiệu là $\mathbb{R}^2$, còn được gọi là *mặt phẳng*.

1/1.2 Các phép toán tập hợp

Sau đây là các phép toán thông dụng đối với tập hợp.

- Phép hợp. Ta gọi *hợp* của A và B là tập $A \cup B = \{x : x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$, tương tự:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists i \in I, x \in A_i\}.$$

- Phép giao. *Giao* hoặc *tích* của A và B là tập $A \cap B = \{x : x \in A \text{ và } x \in B\}$, tương tự:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

- Phép trừ. *Hiệu* của A đối với B là tập $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ nhưng } x \notin B\}$.
- Phép lấy phần bù. *Phần bù* của tập A là tập $A^c = X \setminus A = \{x : x \notin A\}$.
- Hiệu đối xứng. *Hiệu đối xứng* của A và B là tập $A \triangle B = A \setminus B + B \setminus A$.

Các phép toán tập hợp có một số tính cơ bản sau:

- Tính giao hoán:

$$A \cup B = B \cup A; AB = BA; A \triangle B = B \triangle A.$$

- Tính kết hợp:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); (AB)C = A(BC); A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C.$$

- Tính phân phối:

$$A(B \cup C) = AB \cup AC; A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C); A(B \triangle C) = (AB) \triangle (AC).$$

- Công thức De Morgan:

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c; \quad \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c.$$

  * Chú ý: $(A \setminus B) \cup B = A$ chỉ đúng khi $B \subset A$; $(A \cup B) \setminus B = A$ chỉ đúng khi $A \cap B = \varnothing$.

Ví dụ 1.2. Ta có

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(0, 1 - 1/n) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(0, 1 - 1/n] = (0, 1)$$

và

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[1 - 1/n, 2) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(1 - 1/n, 2) = [1, 2).$$

1/1.3 Lớp tập hợp và dãy tập hợp

Tập hợp mà mỗi phần tử của nó là tập con của X được gọi là một *lớp* (các tập con của X). Ta dùng các chữ hoa $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \ldots$ để ký hiệu các lớp.

Lớp gồm tất cả các tập con của X được ký hiệu là 2^X:

$$2^X = \{A \mid A \subset X\}.$$

Chú ý là 2^X chứa cả tập $\varnothing$ và X. Hiển nhiên nếu tập X hữu hạn gồm n phần tử thì 2^X có 2^n phần tử.

Ví dụ 1.3. Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3\}$.

- $\mathscr{A} = \big\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\big\}$ là lớp các tập chỉ gồm 1 phần tử trong X.
- $2^X = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\big\}$.

Lớp $\mathscr{C}$ gồm các tập rời nhau được gọi là *phân hoạch* của tập X nếu $\bigcup\limits_{C\in\mathscr{C}} C = X$.

Ví dụ 1.4. Lớp gồm các tập $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\}, C = \{5\}$ là một phân hoạch của tập $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Lớp gồm một số đếm được các tập con $\{A_n, n = 1, 2, \ldots\}$ được gọi là *dãy* (các tập). Ta nói dãy các tập $\{A_n\}$ là *đơn điệu tăng (giảm)* và viết $A_n \uparrow$ ($A_n \downarrow$), nếu $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ ($A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$).

Ví dụ 1.5. Với $X = \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, khi đó $\mathscr{B} = \big\{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \ldots\big\}$ là một dãy đơn điệu tăng các tập con của X.

Giả sử $\{A_n\}$ là dãy các tập con của X. Ta gọi *giới hạn trên* và *giới hạn dưới* của dãy này là các tập tương ứng sau đây:

$$\overline{\lim} A_n = \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$
$$\underline{\lim} A_n = \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Nếu giới hạn trên và giới hạn dưới của dãy $\{A_n\}$ bằng nhau thì ta nói dãy $\{A_n\}$ *có giới hạn* và viết:

$$\lim A_n = \limsup A_n = \liminf A_n.$$

Có thể thấy rằng

$$\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ nếu } A_n \uparrow; \qquad \lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \text{ nếu } A_n \downarrow .$$

Nếu $A_n \downarrow$ và $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$ thì ta viết $A_n \downarrow A$. Nếu $A_n \uparrow$ và $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ thì ta viết $A_n \uparrow A$.

Ví dụ 1.6. Với A, B là các tập cho trước, xét dãy $A_n = A$ nếu n lẻ và $A_n = B$ nếu n chẵn. Ta có

$$\overline{\lim} A_n = A \cup B; \quad \underline{\lim} A_n = A \cap B.$$

§ 2. TẬP HỢP SỐ THỰC

[1/]2.1 Khái niệm tập hợp số thực

1.1 Định nghĩa. Tập hợp số thực $\mathbb{R}$ là tập hợp các phần tử $x, y, z, \ldots$ trên đó có hai phép toán cộng, nhân và quan hệ thứ tự thoả mãn các tiên đề dưới đây, gọi là *hệ các tiên đề về số thực*.

(I) CÁC TIÊN ĐỀ ĐỐI VỚI PHÉP CỘNG

Phép toán

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

(phép cộng) được định nghĩa bằng cách gán mỗi cặp có thứ tự (x, y) gồm hai phần tử x, y thuộc $\mathbb{R}$ với một phần tử $x + y \in \mathbb{R}$ nào đó, được gọi là tổng của x và y. Phép toán này phải thoả mãn các điều kiện sau:

1_+. Tồn tại phần tử trung hòa hoặc đồng nhất 0 (đọc là không) sao cho

$$x + 0 = 0 + x = x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

2_+. Với mọi phần tử $x \in \mathbb{R}$ tồn tại một phần tử $-x \in \mathbb{R}$ được gọi là đối của x sao cho

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

3_+. Phép cộng có tính kết hợp, tức là biểu thức

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

4_+. Phép cộng là giao hoán, nghĩa là

$$x + y = y + x, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(II) CÁC TIÊN ĐỀ ĐỐI VỚI PHÉP NHÂN

Một phép toán

$$\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

(phép nhân) được định nghĩa bằng cách gán mỗi cặp có thứ tự (x, y) gồm hai phần tử x, y thuộc $\mathbb{R}$ với một phần tử $x \cdot y \in \mathbb{R}$ nào đó, được gọi là tích của x và y. Phép toán này phải thoả mãn các điều kiện sau:

$1_\bullet$. Tồn tại phần tử trung hòa hoặc đồng nhất $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (gọi là *phần tử một*) sao cho

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$2_\bullet$. Với mọi phần tử $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tồn tại một phần tử $x^{-1} \in \mathbb{R}$ được gọi là *phần tử nghịch đảo* của x sao cho

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

$3_\bullet$. Phép nhân $\bullet$ có tính kết hợp, nghĩa là

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

$4_\bullet$. Phép nhân $\bullet$ có tính giao hoán, nghĩa là

$$x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

(I, II) LIÊN HỆ GIỮA PHÉP CỘNG VÀ PHÉP NHÂN

Phép nhân có tính phân phối đối với phép cộng, nghĩa là

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Lưu ý là do tính giao hoán của phép nhân, đẳng thức này vẫn đúng nếu thứ tự các nhân tử được hoán đổi ở mỗi vế.

(III) CÁC TIÊN ĐỀ THỨ TỰ

Giữa các phần tử của $\mathbb{R}$ tồn tại một quan hệ $\leq$, nghĩa là với các phần tử $x, y \in \mathbb{R}$ có thể xác định xem liệu $x \leq y$ hoặc không. Ở đây các điều kiện sau phải đúng:

$1_{\leq}$. $\forall x \in \mathbb{R}\ (x \leq x)$.
$2_{\leq}$. $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (x = y)$.
$3_{\leq}$. $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$.
$4_{\leq}$. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}\ (x \leq y) \vee (y \leq x)$.
Quan hệ $\leq$ trên $\mathbb{R}$ được gọi là *không bằng nhau (bất đẳng thức)*.

Một tập trên đó tồn tại một quan hệ giữa các cặp phần tử thoả mãn các tiên đề $1_{\leq}, 2_{\leq}$, và $3_{\leq}$, như ta biết, được gọi là *được sắp từng phần*. Nếu có thêm tiên đề $4_{\leq}$, nghĩa là có thể so sánh hai phần tử bất kỳ, tập hợp là *được sắp tuyến tính*. Do đó tập các số thực được sắp tuyến tính do quan hệ không bằng nhau giữa các phần tử.

(I, III) LIÊN HỆ GIỮA PHÉP CỘNG VÀ THỨ TỰ TRÊN $\mathbb{R}$

Nếu x, y, z là các phần tử thuộc $\mathbb{R}$, thì

$$(x \leq y) \Rightarrow (x + z \leq y + z).$$

(II, III) LIÊN HỆ GIỮA PHÉP NHÂN VÀ THỨ TỰ TRÊN $\mathbb{R}$

Nếu x và y là các phần tử thuộc $\mathbb{R}$, thì

$$(0 \leq x) \wedge (0 \leq y) \Rightarrow (0 \leq x \cdot y).$$

(IV) TIÊN ĐỀ VỀ CẬN TRÊN

Mọi tập $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ bị chặn trên có cận trên đúng.

Trên đây, ta đề cập đến khái niệm tập bị chặn trên. Khái niệm tập bị chặn được định nghĩa như sau (các quan hệ $<, \geq, >$ được hiểu theo nghĩa thông thường).

1.2 Định nghĩa. Ta nói rằng tập $A \subset \mathbb{R}$ *bị chặn trên* nếu tồn tại $z \in \mathbb{R}$ sao cho $x \leq z$ với mọi $x \in A$; phần tử z như thế được gọi là *cận trên* của tập A.

Ta nói rằng tập $A \subset \mathbb{R}$ *bị chặn dưới* nếu tồn tại $z \in \mathbb{R}$ sao cho $x \geq z$ với mọi $x \in A$; phần tử z như thế gọi là *cận dưới* của tập A.

1.3 Định nghĩa. Ta nói rằng M là *phần tử lớn nhất* của tập A nếu $M \in A$ và $x \leq M$ với mọi $x \in A$. Khi đó ta viết

$$M = \max A.$$

Tương tự ta nói m là *phần tử bé nhất* của tập A nếu $m \in A$ và $x \geq m$ với mọi $x \in A$. Khi đó ta viết

$$m = \min A.$$

1.4 Định nghĩa. Giả sử A bị chặn trên, z được gọi là *cận trên đúng* của A, nếu:

+) z là cận trên của A, tức là $x \leq z, \forall x \in A$.

+) z là cận trên bé nhất của A, tức là nếu $y < z$ thì y không phải là cận trên của A.

Cận trên đúng của A ký hiệu là $\sup A$.

Giả sử A bị chặn dưới, z được gọi là *cận dưới đúng* của A, nếu:

+) z là cận dưới của A, tức là $x \geq z, \forall x \in A$.

+) z là cận dưới lớn nhất của A, tức là nếu $y > z$ thì y không phải là cận dưới của A.

Cận dưới đúng của A ký hiệu là $\inf A$.

Như vậy theo định nghĩa ta có

$$M = \sup A = \min\{c \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A \ (x \leq c)\}$$
$$m = \inf A = \max\{c \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A \ (x \geq c)\}.$$

Chú ý. Nếu A có phần tử lớn nhất $\max A$ thì $\sup A = \max A$. Nếu A có phần tử bé nhất $\min A$ thì $\inf A = \min A$.

Ví dụ 1.7. Cho $A = \{1, 5, 7, 14\} \Rightarrow \sup A = \max A = 14; \inf A = \min A = 1$.

Như vậy theo tiên đề về cận trên thì mọi tập $A \subset \mathbb{R}$ bị chặn trên đều có cận trên đúng và do đó mọi tập bị chặn dưới đều có cận dưới đúng. Tuy nhiên, tập A bị chặn chưa chắc có phần tử lớn nhất hoặc nhỏ nhất. Ta hãy xét ví dụ sau.

Ví dụ 1.8. Cho $A = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$. Ta có $\inf A = 0$.

Thật vậy, trước hết 0 là một cận dưới của A. Với $y > 0$ bất kỳ, luôn tồn tại số n thoả mãn $1/n < y$ và $1/n \in A$. Vậy y không thể là cận dưới của A hay 0 là cận dưới lớn nhất của A. Vậy $\inf A = 0$.

Tuy nhiên A không có phần tử nhỏ nhất bởi nếu tồn tại $\min A$ thì $\inf A = \min A = 0 \notin A$. Mâu thuẫn với định nghĩa về giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 1.9. Tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ không có phần tử lớn nhất nhưng do A bị chặn trên nên tồn tại $\sup A$ và ta có $\sup A = 1$.

Trên đây, chúng ta đã xem xét cụ thể về các tiên đề xây dựng lên tập số thực. Nhiều khái niệm của mục này có thể tiếp cận qua chương 1, phần 1, giáo trình "Toán cao cấp cho các nhà kinh tế". Dưới đây ta sẽ xem xét thêm một số tính chất cần thiết về số thực để sử dụng sau này.

1/2.2 Các tính chất cơ bản của tập hợp số thực

Ta gọi *số dương* là những số thực $a > 0$; *số âm* là những số thực $a < 0$, và đặt $|x| = x$ nếu $0 \leq x$, $|x| = -x$ nếu $x < 0$. Một số $a \in \mathbb{R}$ được gọi là *giới hạn* của dãy số $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, ký hiệu $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ (hoặc $\lim x_n = a$), nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : |x_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Khi dãy số có giới hạn là một số thực thì ta nói *dãy số hội tụ*.

Từ điều kiện thứ hai trong định nghĩa về cận trên cho ta thấy nếu $M = \sup A$ thì $\forall M' < M, \exists x \in A : M' < x$. Tương tự nếu $m = \inf A$ thì $\forall m' > m, \exists x \in A : x < m'$. Với các nhận xét này, ta dễ dàng có định lý sau:

1.5 Định lý. *Cho tập hợp $A \subset \mathbb{R}$ và $M = \sup A$, khi đó tồn tại dãy $\{x_n\} \subset A$ (các x_n có thể trùng nhau) thoả mãn*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = M.$$

Tương tự, với $m = \inf A$, khi đó tồn tại dãy $\{y_n\} \subset A$ (các y_n có thể trùng nhau) thoả mãn

$$\lim_{n\to\infty} y_n = m.$$

1.6 Nguyên lý (Weierstrass). *Mọi dãy đơn điệu tăng (giảm) và bị chặn trên (dưới) đều hội tụ.*

Chứng minh. Cho $\{x_n\}$ là một dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên. Theo tiên đề về cận trên đúng, tập $\{x_n\}$ có $M = \sup x_n$; theo định nghĩa supremum, với mọi số dương ε có một n_ε sao cho $M - \varepsilon < x_{n_\varepsilon}$, và do tính đơn điệu tăng của dãy x_n ta có $x_{n_\varepsilon} \le x_n$ với mọi $n \ge n_\varepsilon$. Vậy $M - x_n < \varepsilon$ với mọi $n \ge n_\varepsilon$, nghĩa là $\lim x_n = M$. ■

Ví dụ 1.10. Dãy $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ là dãy đơn điệu tăng. Ngoài ra ta có

$$x_n < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{n} < 2,$$

nên dãy x_n bị chặn. Theo nguyên lý Weierstrass, dãy x_n là hội tụ.

Các phần tử của $\mathbb{R}$: $1, 2 = 1+1, 3 = 2+1, \ldots$ gọi là các *số tự nhiên*, ký hiệu là $\mathbb{N}$.
Tập các *số nguyên* là các số $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, ký hiệu là $\mathbb{Z}$.
Tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ không có cận trên và không có cận dưới, vì nếu $\mathbb{Z}$ có cận trên thì dãy $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ phải có một giới hạn M; lúc đó $M - 1 < p$ với một $p \in \mathbb{Z}$ và ta sẽ có $M < p + 1$: vô lý.

Số hữu tỉ là số có dạng $\frac{m}{n} = m \cdot n^{-1}$, $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. Ký hiệu tập các số hữu tỉ là $\mathbb{Q}$.

Số vô tỉ là số thực mà không phải số hữu tỉ.

1.7 Nguyên lý (Archimede). *Với mọi số thực a dương và b bất kỳ luôn tồn tại số nguyên n sao cho $a(n-1) \le b < na$.*

Chứng minh. Do tập số nguyên $\mathbb{Z}$ không có cận trên nên phải tồn tại số nguyên m nào đó sao cho $m > \frac{b}{a}$. Từ đó thấy rằng tập $S = \{k \in \mathbb{Z} : k > \frac{b}{a}\}$ gồm các số nguyên là khác rỗng và bị chặn. Theo nguyên lý cận dưới đúng, tập S có cận dưới đúng n và cũng là phần tử nhỏ nhất. Điều đó chứng tỏ $n - 1 \le \frac{b}{a} < n$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.■

1.8 Hệ quả. *Với x là số thực dương bất kỳ, luôn tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn*

$$0 < \frac{1}{n} < x.$$

Chứng minh. Theo nguyên lý Archimede tồn tại số nguyên $n \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $1 < x.n$. Vì $n.x > 1 > 0$ nên $n > 0$ suy ra $n \in \mathbb{N}$ và $0 < \frac{1}{n} < x$. ■

Rõ ràng, giữa hai số hữu tỉ $a < b$ luôn tồn tại số hữu tỉ q thoả mãn $a < q < b$ (chẳng hạn $q = \frac{a+b}{2}$).

Ngoài ra, ta còn có một định lý quan trọng sau đây.

1.9 Định lý. *Giữa hai số thực phân biệt luôn tồn tại một số hữu tỉ và một số vô tỉ.*

Chứng minh. Giả sử rằng $x, y \in \mathbb{R}$ và $x < y$.

a) Chúng ta sẽ chứng tỏ rằng tồn tại $r \in \mathbb{Q}$ thoả mãn $x < r < y$.

Ta có $y - x > 0$, theo nguyên lý Archimede, tồn tại $n \in \mathbb{N}$ nào đó thoả mãn $0 < \frac{1}{n} < y - x$.

Với số tự nhiên n tìm được, tồn tại số nguyên m thỏa mãn $(m-1).\frac{1}{n} \leq x < m.\frac{1}{n}$. Số hữu tỉ $\frac{m}{n} < b$, vì nếu ngược lại $\frac{m}{n} \geq b$ thì

$$\frac{m-1}{n} \leq x < y \leq m \cdot \frac{n}{-},$$

từ đó suy ra $\frac{1}{n} > y - x$, mâu thuẫn.

Vậy

$$r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \quad \text{và} \quad x < \frac{m}{n} < b.$$

b) Theo a), tồn tại $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ mà $x < r_1 < r_2 < y$. Số

$$z = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\sqrt{2}}$$

rõ ràng là số vô tỉ và thoả mãn $r_1 < z < r_2$. ■

Tập $\{x : a < x < b\}$ được gọi là *khoảng* (a, b); tập $\{x : a \leq x \leq b\}$ được gọi là *đoạn* $[a, b]$. Một dãy đoạn $[a_n, b_n]$ được gọi là *thắt lại* nếu $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ và $\lim(b_n - a_n) = 0$.

1.10 Nguyên lý (Cantor). *Một dãy đoạn thắt lại có một phần tử chung duy nhất.*

Chứng minh. Cho $\{[a_n, b_n]\}$ là một dãy đoạn thắt lại. Dãy $\{a_n\}$ đơn điệu tăng và bị chặn trên (bởi b_1 chẳng hạn) nên theo nguyên lý Weierstrass có một giới hạn c. Ta có $c \in [a_n, b_n]$ với mọi n. Thật vậy, rõ ràng $a_n \leq c$ với mọi n; nếu tồn tại n_0 nào đó mà

$c \notin [a_{n_0}, b_{n_0}]$ thì $b_{n_0} < c$ hay $b_{n_0} - c > 0$; nhưng vì c là giới hạn của dãy tăng a_n, nên với n đủ lớn $|a_n - c| < b_{n_o} - c$ suy ra $c - a_n < c - b_{n_0}$, tức là $b_{n_0} < a_n$: vô lý.

Mặt khác, nếu tồn tại một phần tử c' chung cho mọi đoạn $[a_n, b_n]$ thì $|c - c'| < b_n - a_n$ với mọi n, mà $\lim(b_n - a_n) = 0$, do đó $c = c'$. ■

Ta nói một dãy $\{x_n\}$ là *bị chặn* nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới, tức là $\exists a : \forall n, |x_n| \leq a$.

1.11 Nguyên lý (Bolzano-Weierstrass). *Mọi dãy vô hạn bị chặn $\{x_n\}$ đều chứa một dãy con hội tụ.*

Chứng minh. Theo giả thiết $\forall n$ ta có $-a \leq x_n \leq a$. Trong hai đoạn $[-a, 0]$ và $[0, a]$ phải có một đoạn chứa vô số các phần tử x_n (nếu không thì dãy chỉ có hữu hạn phần tử). Ta gọi đoạn này là $[a_1, b_1]$, và đặt $c_1 = (a_1 + b_1)/2$. Trong hai đoạn $[a_1, c_1]$ và $[c_1, b_1]$ lại phải có một đoạn chứa vô số phần tử x_n. Ta gọi đoạn này là $[a_2, b_2]$ và đặt $c_2 = (a_2 + b_2)/2$ .... Tiếp tục quá trình đó ta được một dãy đoạn thắt lại $[a_k, b_k], k = 1, 2, \ldots$ vì $b_k - a_k = a/2^{k-1} \to 0$. Theo nguyên lý Cantor, chúng có một phần tử chung c. Vì mỗi đoạn $[a_k, b_k]$ chứa vô số phần tử x_n nên ta có thể chọn (đánh số lại, nếu cần) một $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$, $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ với $n_2 > n_1$, một $x_{n_3} \in [a_3, b_3]$ với $n_3 > n_2$ .... Khi đó $|x_{n_k} - c| \leq b_k - a_k \to 0$, vậy $\lim x_{n_k} = c$. ■

Ví dụ 1.11. Xét dãy $x_n = (-1)^n$. Dãy này bị chặn và có 2 dãy con hội tụ tới 1 và -1.

Một dãy $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ được gọi là dãy *cơ bản* (hay dãy *Cauchy*) nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ sao cho } |x_n - x_m| < \varepsilon, \forall n, m \geq n_0.$$

1.12 Nguyên lý (Cauchy). *Trong $\mathbb{R}$, dãy số hội tụ khi và chỉ khi dãy đó là dãy cơ bản.*

Chứng minh. Xét một dãy cơ bản $\{x_n\}$. Theo định nghĩa, tồn tại n_1 sao cho $|x_n - x_{n_1}| < \frac{1}{2}$ với mọi $n \geq n_1$. Đặt $a_1 = x_{n_1} - 1, b_1 = x_{n_1} + 1$. Sau đó, lấy $n_2 > n_1$ sao cho $|x_n - x_{n_2}| < \frac{1}{4}$ với mọi $n \geq n_2$. Đặt $a_2 = x_{n_2} - \frac{1}{2}$, $b_2 = x_{n_2} + \frac{1}{2}$. Vì $|x_{n_2} - x_{n_1}| < \frac{1}{2}$ nên $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$. Lấy $n_3 > n_2$ sao cho $|x_n - x_{n_3}| < \frac{1}{8}$ với mọi $n \geq n_3$ và đặt $a_3 = x_{n_3} - \frac{1}{4}$, $b_3 = x_{n_3} + \frac{1}{4}$ .... Tiếp tục mãi như vậy, ta được một dãy đoạn $[a_k, b_k]$ thắt lại vì $b_k - a_k < \frac{1}{2^{k-1}} < \frac{1}{k-1} \to 0$. Theo nguyên lý Cantor, dãy đoạn này có một phần tử chung duy nhất c. Với $n \geq n_k$ ta có $x_n \in [a_k, b_k]$, vậy $|c - x_k| < b_k - a_k$, từ đó ta suy ra $\lim x_n = c$. ■

Ví dụ 1.12. Dãy số có số hạng tổng quát

$$x_n = \frac{\cos 1}{1.2} + \frac{\cos 2}{2.3} + \cdots + \frac{\cos n}{n.(n+1)}$$

là một dãy cơ bản.

Chứng minh. Thật vậy, với $m > n$:

$$|x_m - x_n| = \left|\frac{\cos n}{n.(n+1)} + \cdots + \frac{\cos m}{m.(m+1)}\right| \leq \left|\frac{1}{n.(n+1)} + \cdots + \frac{1}{m.(m+1)}\right| < \frac{1}{n}.$$

Như vậy cho trước $\varepsilon > 0$, ta chỉ cần chọn n_0 thoả mãn $n_0 > 1/\varepsilon$ thì rõ ràng $|x_n - x_m| < \varepsilon, \forall n, m \geq n_0$. Theo nguyên lý Cauchy, dãy x_n hội tụ. ■

1/2.3 Giới hạn trên và giới hạn dưới

Ta đưa thêm vào $\mathbb{R}$ hai phần tử mới là $+\infty$ và $-\infty$. Các số này được gọi là các *số vô cực* (dương vô cực và âm vô cực). Cùng với nó, ta đưa ra qui ước thứ tự và các phép toán đại số giữa các số vô cực và số a hữu hạn như sau:

$$\forall a \in \mathbb{R} : -\infty < a < +\infty; |\pm\infty| = +\infty,$$
$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = a + (\pm\infty) = (\pm\infty) + a = \pm\infty,$$
$$a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \begin{cases} \pm\infty & \text{nếu } a > 0 \\ 0 & \text{nếu } a = 0 \\ \mp\infty & \text{nếu } a < 0, \end{cases}$$
$$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty, (\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty,$$
$$\frac{a}{\pm\infty} = 0, \infty^r = \infty \text{ với } r > 0.$$

Ký hiệu: $\lim x_n = +\infty$ ($\lim x_n = -\infty$), nghĩa là

$$\forall a > 0, \exists n_0 : x_n > a, \forall n \geq n_0 \quad \big(\forall a < 0, \exists n_0 : x_n < a, \forall n \geq n_0\big).$$

Tập hợp số thực, có thêm $+\infty$ và $-\infty$, với những quy ước trên, được gọi là *tập số thực mở rộng* và ký hiệu là $\overline{\mathbb{R}}$.
Nhận thấy rằng, dãy đơn điệu tăng (giảm) luôn có giới hạn (hữu hạn hoặc vô cực).

Cho một dãy vô hạn $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$. Với mỗi n, đặt

$$\begin{aligned} u_n &= \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\} = \sup_{k\geq 0} x_{n+k} = \sup_{k\geq n} x_k, \\ v_n &= \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\} = \inf_{k\geq 0} x_{n+k} = \inf_{k\geq n} x_k. \end{aligned}$$

Rõ ràng dãy $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu giảm, còn dãy $\{v_n\}$ là dãy đơn điệu tăng cho nên mỗi dãy có một giới hạn. Dĩ nhiên $\lim u_n = \inf\{u_n\}$ và $\lim v_n = \sup\{v_n\}$. Các giới hạn đó gọi là *giới hạn trên* và *giới hạn dưới* của dãy $\{x_n\}$ và được ký hiệu lần lượt là $\overline{\lim}\, x_n$ và $\underline{\lim}\, x_n$.

Như vậy:

$$\overline{\lim}\, x_n = \lim \big(\sup_{k\geq 0} x_{n+k}\big), \quad \text{và} \quad \underline{\lim}\, x_n = \lim \big(\inf_{k\geq 0} x_{n+k}\big).$$

Với định nghĩa như trên thì mọi dãy số bất kỳ đều có giới hạn trên và dưới. Dễ thấy $\underline{\lim}\, x_n$ là giới hạn riêng nhỏ nhất và $\overline{\lim}\, x_n$ là giới hạn riêng lớn nhất của dãy x_n; đồng thời $\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$.

Ta lấy một số ví dụ đơn giản về hai loại giới hạn này như sau.

Ví dụ 1.13. Dãy $x_n = (-1)^n,\ \ n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n}(-1)^k = \lim_{n\to\infty}(-1) = -1,\\ \overline{\lim}_{k\to\infty} x_k &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n}(-1)^k = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.\end{aligned}$$

Ví dụ 1.14. Dãy $x_n = n^{(-1)^n},\ \ n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{n\to\infty} n^{(-1)^n} &= \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} k^{(-1)^k} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,\\ \overline{\lim}_{n\to\infty} n^{(-1)^n} &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} k^{(-1)^k} = \lim_{n\to\infty}(+\infty) = +\infty.\end{aligned}$$

Ví dụ 1.15. Dãy $x_n = \frac{(-1)^n}{n},\ \ n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} &= \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{n\to\infty} \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{với } n = 2m+1 \\ -\frac{1}{n+1}, & \text{với } n = 2m \end{cases} = 0,\\ \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{n\to\infty} \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{với } n = 2m \\ \frac{1}{n+1}, & \text{với } n = 2m+1 \end{cases} = 0.\end{aligned}$$

Ta có các kết quả sau (chứng minh được dành cho phần bài tập).

1.13 Định lý. *Một số ℓ là giới hạn của dãy $\{x_n\}$ khi và chỉ khi $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = \ell$.*

1.14 Định lý.

a) $\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \leq \underline{\lim}(x_n + y_n) \leq \underline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$.

b) $\underline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n \leq \overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$.

§ 3. Lực lượng của tập hợp

Chúng ta thường nói rằng hai tập hợp như vậy có "cùng số lượng phần tử", nhưng với các tập hợp vô hạn, sẽ rất khó hiểu "số lượng" là gì. Ngoài ra ta còn rất quan tâm đến trường hợp một tập là "đông" hơn một tập khác. Khái niệm này khá dễ hiểu với tập hữu hạn nhưng không dễ đối với các tập vô hạn.

1.15 Định nghĩa. Hai tập hợp X và Y được nói là có *cùng lực lượng* nếu và chỉ nếu tồn tại một song ánh từ X vào Y.

Một tập hợp X được gọi là *hữu hạn* khi và chỉ khi nó có cùng lực lượng với tập con $\{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$ nào đó, khi đó nó có n phần tử, ký hiệu $|X| = n$. Trường hợp còn lại X là tập có vô hạn phần tử, ký hiệu $|X| = \infty$. Tập X được gọi là *đếm được* nếu và chỉ nếu tồn tại một hàm toàn ánh f từ $\mathbb{N}$ vào X, là *vô hạn đếm được* nếu X cũng là vô hạn. Một tập hợp là *không đếm được* nếu và chỉ nếu nó không phải là đếm được.

Có thể chứng minh được một tập vô hạn đếm được bằng cách khẳng định nó cùng lực lượng với tập $\mathbb{N}$.

Ví dụ 1.16. Tập $\mathbb{N}$ là tập vô hạn đếm được. Tập các số chẵn là vô hạn đếm được.

Tập $\mathbb{Z}$ là tập vô hạn đếm được. Hàm số $f(n) := \frac{n-1}{2}$ nếu n lẻ và $-\frac{n}{2}$ nếu n chẵn.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ là tập vô hạn đếm được. Hàm $f(m, n) := 2^{m-1}(2n-1)$ là song ánh từ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vào $\mathbb{N}$.

Dễ thấy mọi tập đếm được (vô hạn hay hữu hạn) đều có thể biểu diễn bằng cách đánh số các phần tử như sau:

$$X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

1.16 Mệnh đề. *Mọi tập con của tập đếm được cũng đếm được.*

Chứng minh. Giả sử tập A là đếm được và B là tập con của A, nếu B là hữu hạn thì ta không cần chứng minh gì nên ta sẽ giả sử B là vô hạn. Khi đó hiển nhiên A là vô hạn đếm được nên $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Gọi b_1 là phần tử đầu tiên trong dãy $\{a_n\}$ thuộc B, b_2 là phần tử thứ hai trong dãy thuộc B, ... Khi đó dễ thấy B chính là tập $C = \{b_1, b_2, \ldots\}$. Thật vậy, rõ ràng $C \subset B$. Ngược lại, giả sử $a_k \in B$ và từ a_1 đến a_{k-1} có h phần tử thuộc B, khi đó a_k chính là $b_{h+1} \in C$. Vậy $B \subset C$ nên $B = C$. ■

Như vậy chúng ta có thể tạo ra một tập đếm được bằng cách "cắt bớt" một tập đếm được. Ngược lại ta cũng có thể bổ sung cho một tập đếm được để tạo ra một tập đếm được khác. Tổng quát, chúng ta có kết quả sau.

1.17 Mệnh đề. *Hợp của một họ đếm được các tập đếm được cũng là tập đếm được.*

Trước tiên, ta chứng minh bổ đề sau đây.

1.18 Bổ đề. *Hợp của một họ đếm được các tập rời nhau và có hữu hạn phần tử cũng là tập đếm được.*

Chứng minh. Giả sử dãy tập $B_n, n = 1, 2, \ldots$ đều có hữu hạn phần tử được đánh số thứ tự như sau:

$$B_n = \{b_{n1}, b_{n1}, \ldots, b_{nj_n}\}, B_m \cap B_n = \emptyset,$$

trong đó j_n là ký hiệu số phần tử của tập B_n.

Ta xây dựng một ánh xạ f từ $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ vào $\mathbb{N}$ như sau:

$$f(b_{nk}) = j_1 + j_2 + \cdots j_{n-1} + (k-1).$$

Dễ dàng chứng minh được đây là song ánh từ B vào $\mathbb{N}$. Ta có thể hiểu cách đánh số các phần tử của tập B như sau: Đầu tiên đánh số các phần tử của tập B_1, tiếp theo là đánh số thứ tự với các phần tử của tập B_2, tiếp tục như vậy mọi phần tử của B_n đều được đánh số thứ tự.

$$\begin{array}{ccccc}
b_{11} \longrightarrow & b_{12} \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow b_{1(j_1-1)} & \longrightarrow b_{1j_1} \\
 & & & & \downarrow \\
b_{2j_2} \longleftarrow & b_{2(j_2-1)} \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow b_{22} & \longleftarrow b_{21} \\
\downarrow & & & & \\
b_{31} \longrightarrow & b_{32} \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow b_{3(j_3-1)} & \longrightarrow b_{3j_3} \\
 & & & & \downarrow \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Chứng minh (CHỨNG MINH MỆNH ĐỀ). Giả sử dãy $A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \ldots\}, n = 1, 2, \ldots, \infty$. Nếu tập A_k có hữu hạn i phần tử thì ta xem như $a_{ki} = a_{k(i+1)} = \cdots$

Đặt $B_2 = \{a_{11}\}, B_3 = \{a_{12}, a_{21}\} \setminus B_2, B_4 = \{a_{13}, a_{22}, a_{31}\} \setminus (B_2 \cup B_3), \ldots, B_n = \{a_{ij} | i + j = n\} \setminus \left(\bigcup\limits_{1 \le k \le n-1} B_k \right), n \ge 3$. Khi đó không khó khăn gì ta thấy B_n là dãy tập rời nhau có hữu hạn phần tử và $\bigcup_n B_n = \bigcup_n A_n$. Tuy nhiên, $\bigcup_n B_n$ là tập đếm được theo như bổ đề trên. ■

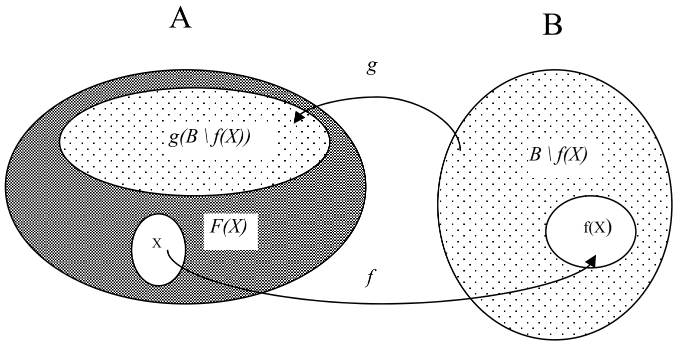
1.19 Hệ quả. *Tập các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ là đếm được.*

Chúng ta chưa đưa ra ví dụ về tập không đếm được mặc dù nó có rất nhiều. Tuy nhiên tất cả các ví dụ này đều xuất phát từ các kết quả dưới đây.

Tập X được gọi là có *lực lượng nhỏ hơn* tập Y nếu và chỉ nếu tồn tại một hàm đơn ánh từ X vào Y, nhưng không có hàm toàn ánh nào lên Y. Khẳng định sau cho thấy định nghĩa này là chặt chẽ.

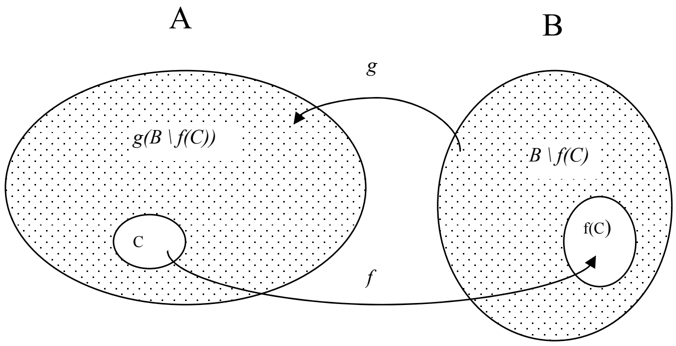
1.20 Định lý (định nghĩa tương đương). *Nếu A và B là hai tập hợp, f là một hàm đơn ánh từ A vào B, và g là một hàm đơn ánh từ B vào A. Khi đó tập A và tập B có cùng lực lượng.*

Chứng minh. Với hàm j và tập hợp X bất kỳ, đặt $j[X] := \{j(x) : x \in X\}$. Với một $X \subset A$, đặt $F(X) := A \setminus g[B \setminus f[X]]$.



Với U bất kỳ sao cho $X \subset U \subset A$, chúng ta có thể chỉ ra $F(X) \subset F(U)$.

Đặt $W := \{X \subset A : X \subset F(X)\}$ và $C := \bigcup W$. Với bất kỳ $u \in C$, ta có $u \in X$ với $X \in W$ nào đó, cho nên $u \in X \subset F(X) \subset F(C)$. Vì thế $C \subset F(C)$, và $F(C) \subset F(F(C))$. Vậy $F(C) \subset W$ và do định nghĩa của C ta có $F(C) \subset$ C nên $F(C) =$ C. Vậy g sẽ là đơn ánh từ $B \setminus f(C)$ lên $A \setminus F(C) = A \setminus$ C. Trong trường hợp bất kỳ, f là đơn ánh từ C lên $f[C]$.



Đặt $h(x) := f(x)$ nếu $x \in$ C, $h(x) := g(x)^{-1}$ nếu $x \in A \setminus$ C. Khi đó h là song ánh từ tập A lên tập B. ∎

Ví dụ 1.17. Tập hợp $\mathbb{R}$ và $(0,1)$ có cùng lực lượng. Trước hết ta dễ dàng chứng minh được hàm số sau là song ánh từ $(-1,1)$ vào $\mathbb{R} : f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$. Vậy $\mathbb{R}$ và $(-1,1)$ có cùng lực lượng. Ta lại có song ánh $g(x) = \frac{x+1}{2}$ từ $(-1,1)$ vào $(0,1)$ nên $(-1,1)$ và $(0,1)$ có cùng lực lượng.

Cho số n hữu hạn bất kỳ, $n = 0,1,2,\ldots$, chúng ta luôn có $n < 2^n$; ví dụ, 0 < 1, 1 < 2, 2 < 4, 3 < 8, v. v. Cho một tập hữu hạn X có n phần tử, họ 2^X tất cả các tập con của X có 2^n phần tử. Khẳng định tập 2^X có lực lượng lớn hơn X cũng vẫn đúng với các tập hợp lớn tùy ý (vô hạn).

1.21 Định lý. *Mọi tập hợp X đều có lực lượng nhỏ hơn tập 2^X.*

Chứng minh. Đặt $f(x) := \{x\}$. Đây là một đơn ánh từ X vào 2^X. Giả sử g là một toàn ánh từ X lên 2^X. Đặt $A := \{x \in X; x \notin g(x)\}$. Khi đó $g(y) = A$ với y nào đó. Nếu $y \in A$ thì $y \notin g(y) = A$, nhưng nếu $y \notin A = g(y)$ thì $y \in A$, mâu thuẫn. ■

1.22 Hệ quả. *Tập $\mathbb{N}$ có lực lượng nhỏ hơn hơn $2^{\mathbb{N}}$, nên $2^{\mathbb{N}}$ là không đếm được.*

Tập có cùng lực lượng với tập $2^{\mathbb{N}}$ sẽ được gọi là có lực lượng c, hoặc lực lượng *continum*. Ta cũng có thể thấy rằng với X là tập vô hạn đếm được thì tập 2^X có cùng lực lượng với tập $2^{\mathbb{N}}$ và như vậy 2^X cũng sẽ có lực lượng c.

1.23 Định lý. *Tập hợp $\mathbb{R}$ các số thực và khoảng $[0,1] := \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1\}$ có cùng lực lượng là c.*

Chứng minh. Chứng minh của định lý được để ở phần bài tập. Sử dụng bài tập A.21 ta sẽ chỉ ra $[0,1]$ và $(0,1)$ có cùng lực lượng. Sử dụng bài tập A.21 để chứng minh $[0,1]$ và $2^{\mathbb{N}}$ có cùng lực lượng. ■

Dưới đây là một ví dụ về tập không đếm được khá nổi tiếng, đó là tập Cantor.

Ví dụ 1.18. Cho C là tập hợp Cantor

$$C := \left\{ \sum_{n\ge 1} x_n/3^n : x_n = 0 \text{ hoặc } 2 \text{ với mọi } n \right\}.$$

Có thể chứng minh được C có cùng lực lượng với $2^{\mathbb{N}}$. Thật vậy ta có song ánh f từ $2^{\mathbb{N}}$ vào C như sau: với mọi $A \in 2^{\mathbb{N}}$, $f(A) = \sum_{n\in A} 2/3^n$.

BÀI TẬP

A.1. Từ hệ tiên đề của $\mathbb{R}$, chứng minh

$a)\ -(xy) = (-x)y = x(-y)$	$e)\ x \ge y \Rightarrow x - y \ge 0$
$b)\ x \ge 0\ (\le 0) \Rightarrow -x \le 0\ (\ge 0)$	$f)\ \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \ge 0$
$c)\ x \ge 0, y \le 0 \Rightarrow x.y \le 0$	$g)\ x \ge y, z \ge 0 \Rightarrow x.z \ge y.z$
$d)\ x \le 0, y \le 0 \Rightarrow x.y \ge 0$	$h)\ 0 < x < y \Leftrightarrow 0 < 1/y < 1/x.$

A.2. Tìm cận trên đúng, cận dưới đúng và phần tử lớn nhất, nhỏ nhất của A (nếu tồn tại) trong các trường hợp sau:

a) $A = \{x_n\}$ với $x_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}$ n = 1, 2, 3, ...

b) $A = \{y_n\}$ với $y_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n}$ n = 1, 2, 3, ...

*A.3. Cho hai dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ bị chặn và đặt $z_n = x_n + y_n$. Hãy chứng minh các khẳng định sau:

$$a)\ \sup\{x_n\} + \sup\{y_n\} \geq \sup\{z_n\} \qquad b)\ \inf\{x_n\} + \inf\{y_n\} \leq \inf\{z_n\}.$$

Thử đưa ra ví dụ cho trường hợp các dấu bằng không xảy ra.

A.4. Tìm các giới hạn trên và dưới của các dãy số sau:

$a)\quad x_n = \sin n\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{n}.$

$b)\quad x_n = [(-1)^n + 1]n^2.$

$c)\quad x_n = \cos n\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{(-1)^n}{n}.$

$d)\quad x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \sin^2 \frac{n\pi}{2}.$

*A.5. Chứng minh rằng $\underline{\lim}(-x_n) = -\overline{\lim}\, x_n$.

A.6. Hãy chứng minh định lý 1.13.

A.7. Hãy chứng minh định lý 1.14.

A.8. Cho $A := \{3,4,5\}$ và $B := \{5,6,7\}$. Xác định:

a) $A \cup B$. b) $A \cap B$. c) $A \setminus B$. (d) $A\Delta B$.

A.9. Chỉ ra $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ và $\{\emptyset\} \neq \{\{\emptyset\}\}$.

A.10. Trong ba tập sau thì những tập nào bằng nhau?

a) $\{\{2, 3\}, \{4\}\}$; b) $\{\{4\}, \{2, 3\}\}$; c) $\{\{4\}, \{3, 2\}\}$.

A.11. Chứng minh rằng

a) $A \subset B$ và $A \subset C$ thì $A \subset B \cap C$. b) $A \subset B$ và $C \subset D$ thì $A \cap C \subset B \cap D$.

c) $A \subset B$ khi và chỉ khi $A \cap B = A$.

A.12. Tìm $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ và $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ khi

$a)\ A_n = \{x \in \mathbb{R} : -\dfrac{1}{n} \leq x < \dfrac{1}{n}\}$

$b)\ A_n = \{x \in \mathbb{R} : \dfrac{1}{n} \leq x \leq \dfrac{2}{n}\}$

$c)\ A_n = \{x \in \mathbb{R} : (1 + \dfrac{1}{n})^n \leq x < 3\}$

$d)\ A_n = \{x \in \mathbb{R} : n \leq x \leq n + 1\}.$

A.13. Cho $I := [0,1]$. Xác định $\bigcup\limits_{x \in I} [x,2]$ và $\bigcap\limits_{x \in I} [x,2]$.

A.14. Chứng minh rằng:

$$a)\ [a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}) \qquad b)\ (a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}].$$

A.15. Cho $\{A_n\}$ là một dãy tăng các tập con của X. Đặt $B_1 = A_1$ và $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ với mọi $n = 2, 3, \ldots$. Chứng minh rằng $B_n \cap B_m = \emptyset, \forall m \neq n$ và

$$A_n = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n; \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

A.16. Cho $\{A_n\}$ là một dãy các tập con của tập X. Đặt $B_0 = \emptyset$ và với mọi $n \in \mathbb{N}$, đặt

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad C_n = A_n \setminus B_{n-1}.$$

Chứng minh $\{B_n\}$ là dãy các tập đơn điệu tăng và $\{C_n\}$ là dãy các tập rời nhau thoả mãn:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

A.17. Cho $\{A_n\}$ là dãy các tập con của tập X. Nếu A chứa mọi $x \in X$ thuộc vô hạn các tập A_n, chứng tỏ rằng

$$A = \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big[\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Big].$$

A.18. Cho $\{A_n\}$ là dãy các tập con của tập X. Nếu B chứa tất cả $x \in X$ không thuộc một số hữu hạn các tập A_n, chứng tỏ rằng

$$B = \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big[\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \Big].$$

A.19. Cho $\{A_n\}$ là dãy đơn điệu giảm các tập con của tập X. Chứng minh rằng

$$\liminf A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \limsup A_n.$$

A.20. Nếu tập X là không đếm được và Y là một tập đếm được, chứng minh rằng $X \setminus Y$ có cùng lực lượng với X. *Gợi ý*: Lấy B là một tập con vô hạn đếm được của $X \setminus Y$. Khi đó B và $B \cup (X \cap Y)$ có cùng lực lượng.

A.21. Tương tự, chứng minh rằng nếu tập X là không đếm được và Y là một tập đếm được, thì $X \cup Y$ có cùng lực lượng với X.

*A.22. Chứng minh $[0, 1]$ và $2^{\mathbb{N}}$ có cùng lực lượng bằng cách xét hàm số từ $2^{\mathbb{N}}$ lên $[0, 1]$ như sau: Nếu $\emptyset \neq A \subset \mathbb{N}$, đặt $f(A) := \sum_{n \in A} 1/2^{n+1}$ (khai triển nhị phân) và $f(\emptyset) = 0$. Hàm này không hẳn là song ánh, nhưng dùng nó và áp dụng bài tập A.20 để chứng minh [0,1] có lực lượng c.

A.23. Cho ánh xạ $f : X \to Y; A \subset Y$. Chứng minh rằng:

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A).$$

CHƯƠNG 2

LÝ THUYẾT ĐỘ ĐO

§ 1. ĐẠI SỐ VÀ σ-ĐẠI SỐ

2/1.1 Đại số

2.1 Định nghĩa. Một lớp $\mathscr{A}$ (khác rỗng) các tập con của X được gọi là một *đại số* nếu:

1) $X \in \mathscr{A}$,

2) Với mọi $A \in \mathscr{A}$ thì $A^c = X \setminus A \in \mathscr{A}$.

3) Với mọi dãy tập hợp hữu hạn $A_i \in \mathscr{A}, i = 1, 2, \ldots, n$ thì $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}$.

Như vậy, $\mathscr{A}$ là một đại số khi và chỉ khi $\mathscr{A}$ chứa X và kín đối với việc thực hiện một số hữu hạn phép toán về tập (hợp, giao hữu hạn, trừ và phép trừ đối xứng hai tập). Hiển nhiên từ đó suy ra một đại số luôn chứa hai tập $\varnothing$ và X.

2.2 Mệnh đề. *Một lớp $\mathscr{A}$ là một đại số khi và chỉ khi $\mathscr{A}$ chứa tập rỗng và thoả mãn các điều kiện:*

a) $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$,

b) $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{A}$ *(hoặc* $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{A}$*).*

Ví dụ 2.1. Cho tập X bất kỳ ta có

- $\mathscr{A} = \{\varnothing, X\}$ là một đại số.
- Nếu $A \subset X$ là tập khác rỗng và khác X thì $\mathscr{A} = \{\varnothing, A, A^c, X\}$ là một đại số.

  Chẳng hạn $X = [0, 1]$ và $\mathscr{A} = \{\varnothing, X, [0, \frac{1}{2}], (\frac{1}{2}, 1]\}$.

- Lớp 2^X là một đại số.

Câu hỏi: Cho $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Trong các lớp sau, lớp nào là đại số:

- $\mathscr{A}_1 = \{\emptyset, X, \{1\}\}$.
- $\mathscr{A}_2 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3, 4\}, \{2\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$.
- $\mathscr{A}_3 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3, 4\}, \{2\}, \{1, 3, 4\}\}$.

2.3 Mệnh đề. *Cho lớp tập hợp $\mathscr{M} \neq \emptyset$ các tập con của tập X, tồn tại duy nhất một đại số $\mathscr{A}$ chứa $\mathscr{M}$ và là giao của tất cả các đại số chứa $\mathscr{M}$.*

Đại số $\mathscr{A}$ được gọi là *đại số sinh bởi $\mathscr{M}$* hay *đại số nhỏ nhất chứa $\mathscr{M}$*.

Chứng minh. Bao giờ cũng tồn tại ít nhất một đại số bao hàm $\mathscr{M}$, đó là lớp tất cả các tập con của X. Xét tất cả các đại số bao hàm $\mathscr{M}$ và gọi $\mathscr{A}$ là giao của chúng.

Rõ ràng $\mathscr{A}$ cũng là một đại số bao hàm $\mathscr{M}$, vì nếu $A, B \in \mathscr{A}$ thì A, B và do đó $A \cup B$ và A^c phải thuộc mọi đại số bao hàm $\mathscr{M}$, tức là $A \cup B \in \mathscr{A}$, và $A^c \in \mathscr{A}$.

Hơn nữa, $\mathscr{A}$ là duy nhất vì nếu có một đại số $\mathscr{A}'$ cũng có tính chất như $\mathscr{A}$ thì một mặt $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}'$, một mặt $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$ nên $\mathscr{A} = \mathscr{A}'$. ∎

Nhận xét. Để chứng minh $\mathscr{A}$ là đại số sinh bởi $\mathscr{M}$ ta cần chứng minh hai khẳng định

i) $\mathscr{A}$ là một đại số.

ii) $\mathscr{A}$ nằm trong đại số sinh bởi $\mathscr{M}$, tức là mọi tập $A \in \mathscr{A}$ đều biểu diễn qua các tập thuộc $\mathscr{M}$ (bởi các hữu hạn phép toán tập hợp).

Ví dụ 2.2.

- Nếu $\mathscr{M}$ là một đại số thì đại số sinh bởi $\mathscr{M}$ chính là $\mathscr{M}$.
- Xét A là tập con của $X : A \neq \emptyset, A \neq X$ và $\mathscr{M} = \{A\}$. Khi đó, đại số sinh bởi $\mathscr{M}$ là:

$$\mathscr{A} = \{X, \emptyset, A, A^c\}.$$

  Thật vậy, dễ thấy $\mathscr{A}$ là đại số, ngoài ra $X, \emptyset, A, A^c$ đều thuộc đại số sinh bởi $\mathscr{M}$.

- Nếu $\mathscr{M} = \{A, B\}$ với $A, B \subset X, A \cap B = \emptyset$ thì đại số sinh bởi $\mathscr{M}$ là:

$$\{\emptyset, A, A^c, B, B^c, A \cup B, (A \cup B)^c, X\}.$$

- Xét $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ và $\mathscr{M} = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$. Đại số sinh bởi $\mathscr{M}$ chính là 2^X.

[2/]1.2 σ-đại số

2.4 Định nghĩa. Một lớp $\mathscr{F}$ các tập con của X được gọi là một *σ-đại số (σ-trường)* nếu:

1) $X \in \mathscr{F}$,

2) Với mọi $A \in \mathscr{F}$ thì $A^c = X \setminus A \in \mathscr{F}$.

3) Nếu dãy tập hợp vô hạn $A_i \in \mathscr{F}, i = 1, 2, \ldots$ thì $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$.

Cặp $(X, \mathscr{F})$ được gọi là một *không gian đo được* và mỗi phần tử thuộc $\mathscr{F}$ được gọi là một *tập đo được*.

Dĩ nhiên, một σ-đại số là đại số. Ngược lại, một đại số kín đối với phép hợp đếm được thì sẽ là một σ-đại số.

2.5 Mệnh đề. *Một lớp $\mathscr{F}$ là một σ-đại số khi và chỉ khi $\mathscr{F}$ chứa tập rỗng và thoả mãn các điều kiện*

i) Với mọi $A \in \mathscr{F}$ thì $A^c = X \setminus A \in \mathscr{F}$.

ii) Nếu dãy tập hợp vô hạn $A_i \in \mathscr{F}, i = 1, 2, \ldots$ thì $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$.

Chứng minh. Nếu $\mathscr{F}$ là σ-đại số thì i) hiển nhiên đúng. Giả sử cho $A_i \in \mathscr{F}, (i = 1, 2, \ldots)$, ta có $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c \in \mathscr{F}$ nên ii) đúng.

Ngược lại nếu i) và ii) đúng, khi đó rõ ràng $X = \emptyset^c \in \mathscr{F}$ và với $A_i \in \mathscr{F}, (i = 1, 2, \ldots)$, thì $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c \in \mathscr{F}$. Vậy $\mathscr{F}$ là một σ-đại số. ■

Như vậy theo mệnh đề trên, một σ-đại số luôn kín đối với việc thực hiện một số đếm được các phép toán về tập hợp.

Ví dụ 2.3.

- Cho X là tập hợp bất kỳ thì 2^X là một σ-đại số.

- Nếu X là một tập hữu hạn và $\mathscr{A}$ là một đại số trên X thì $\mathscr{A}$ cũng là σ-đại số.

  Như vậy sự khác biệt giữa đại số và σ-đại số sẽ không còn trong trường hợp không gian mẫu là hữu hạn.

- Cho lớp $\mathscr{F}$ gồm tất cả các tập $A \subset \mathbb{N}$ có tính chất là chứa cả hai số 1, 2 hoặc không chứa cả 2 số này. Khi đó $\mathscr{F}$ là một σ-đại số của $\mathbb{N}$.

  Thật vậy lấy $A \in \mathscr{F}$ tuỳ ý. Nếu cặp 1, 2 thuộc A thì không thuộc A^c, nếu không thuộc A thì thuộc A^c nên rõ ràng $A^c \in \mathscr{F}$. Ngoài ra với $A_i \in \mathscr{F}, (i = 1, 2, \ldots)$ thì nếu tồn tại i để A_i chứa cặp 1, 2 thì $\{1, 2\} \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, còn nếu không thì rõ ràng $\{1, 2\} \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ nên $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$.

- Họ tất cả các tập $A \subset X$ thoả mãn một trong hai tập A hay A^c có hữu hạn hoặc vô hạn đếm được phần tử lập thành một σ-đại số.

2.6 Mệnh đề. *Cho một lớp tập $\mathscr{M} \neq \emptyset$, tồn tại duy nhất một σ-đại số $\mathscr{F}$ chứa $\mathscr{M}$ và là giao của tất cả các σ-đại số chứa $\mathscr{M}$ (do đó nó là σ - đại số nhỏ nhất chứa $\mathscr{M}$).*

Ta gọi σ-đại số $\mathscr{F}$ là *σ-đại số sinh bởi $\mathscr{M}$* và ký hiệu là $\sigma(\mathscr{M})$.
Chứng minh của mệnh đề trên tương tự chứng minh của mệnh đề 2.3.

Ví dụ 2.4. Cho tập $\mathscr{M} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots\}$, σ-đại số sinh bởi $\mathscr{M}$ chính là lớp tất cả các tập con của $\mathbb{N}$ tức $\sigma(\mathscr{M}) = 2^{\mathbb{N}}$.

Thật vậy nếu $A \in 2^{\mathbb{N}}$ suy ra $A = \{a_1, \dots, a_n\} = \bigcup_{1 \le i \le n} \{a_i\} \in \sigma(\mathscr{M})$. Vậy $2^{\mathbb{N}} \subset \sigma(\mathscr{M})$ và hiển nhiên $2^{\mathbb{N}}$ là σ-đại số nên $2^{\mathbb{N}} = \sigma(\mathscr{M})$.

2/1.3 σ-đại số Borel

Trong không gian $\mathbb{R}$, ký hiệu $\mathscr{C}_1$ là họ các khoảng mở (a, b) của $\mathbb{R}$. Khi đó, ta gọi σ-đại số sinh bởi $\mathscr{C}_1$ là *σ-đại số Borel* của $\mathbb{R}$ và gọi phần tử thuộc σ-đại số Borel là *tập Borel* hoặc *tập đo được Borel* của $\mathbb{R}$. Ký hiệu σ-đại số Borel là $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Nhận xét rằng σ-đại số Borel của $\mathbb{R}$ có thể được sinh bởi một trong các lớp sau đây:

$\mathscr{C}_1$ = lớp tất cả các khoảng hữu hạn (a, b);

$\mathscr{C}_2$ = lớp tất cả các đoạn hữu hạn $[a, b]$;

$\mathscr{C}_3$ = lớp tất cả các nửa khoảng hữu hạn $(a, b]$;

$\mathscr{C}_4$ = lớp tất cả các nửa khoảng hữu hạn $[a, b)$;

$\mathscr{C}_5$ = lớp tất cả các khoảng vô hạn $(b, +\infty)$;

$\mathscr{C}_6$ = lớp tất cả các khoảng vô hạn $(-\infty, a)$;

$\mathscr{C}_7$ = lớp tất cả các khoảng vô hạn $(-\infty, a]$;

$\mathscr{C}_8$ = lớp tất cả các khoảng vô hạn $[b, +\infty)$.

Chẳng hạn σ-đại số Borel $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ là chứa $\mathscr{C}_2$ do $[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Ngược lại σ-đại số sinh bởi $\mathscr{C}_2$ chứa $\mathscr{C}_1$ do $(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$ nên nó trùng với σ-đại số Borel $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Chú ý là lớp các tập Borel thuộc đoạn [0,1] cũng lập thành một σ-đại số, ký hiệu là $\mathscr{B}[0, 1]$:

$$\mathscr{B}[0, 1] = \{S \subseteq [0, 1] : S \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}.$$

Ví dụ 2.5. Cho tập $B \subset \mathbb{R}$ bất kỳ, tập $\alpha + B$ với $\alpha \in \mathbb{R}$ được xác định như sau:

$$\alpha + B = \{\alpha + x | x \in B\}.$$

Khi đó nếu B là một tập Borel thì $\alpha + B$, $\alpha \in \mathbb{R}$ bất kỳ, cũng là tập Borel.

Thật vậy xét lớp tập hợp sau

$$\alpha + \mathscr{B} = \{\alpha + B | B \in \mathscr{B}\}.$$

Dễ dàng chứng minh được $\alpha + \mathscr{B}$ là một σ-đại số, ngoài ra nó chứa lớp $\mathscr{C}_1$ (hiển nhiên vì $\alpha + (a, b) \in \mathscr{C}_1$). Vậy $\alpha + \mathscr{B}$ chứa σ-đại số Borel $\mathscr{B}$. Suy ra $\mathscr{B}$ chứa $-\alpha + \mathscr{B}$.

Tuy nhiên dễ dàng thấy $-\alpha + \mathscr{B}$ cũng là σ-đại số chứa lớp $\mathscr{C}_1$ nên $-\alpha + \mathscr{B}$ cũng phải chứa σ-đại số Borel $\mathscr{B}$.

Từ hai khẳng định trên suy ra $-\alpha + \mathscr{B}$ trùng với $\mathscr{B}$, do đó trùng với $\alpha + \mathscr{B}$.

§ 2. Không gian độ đo

2/2.1 Các khái niệm cơ bản

Cho X là một tập tuỳ ý, $\mathscr{A}$ là một lớp tập con của X. Ký hiệu $\overline{\mathbb{R}^+}$ là tập số thực dương suy rộng $[0, +\infty]$.

2.7 Định nghĩa. Một ánh xạ p từ $\mathscr{A}$ vào $\overline{\mathbb{R}^+}$ (p có thể nhận giá trị $+\infty$) được gọi là:

+) *cộng tính* nếu:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

với mọi tập A, B rời nhau trong $\mathscr{A}$ và $A \cup B \in \mathscr{A}$.

+) *σ-cộng tính* nếu:

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i). \tag{2.7}$$

với mọi họ đếm được các tập rời nhau đôi một $A_i \in \mathscr{A}$ thoả mãn $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$.

Bằng quy nạp, ta dễ dàng thấy nếu p cộng tính thì sẽ *hữu hạn cộng tính* tức:

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} p(A_i).$$

với mọi tập rời nhau đôi một $A_1, \ldots, A_m \in \mathscr{A}$ thoả mãn $\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i \in \mathscr{A}$.

Một hàm σ-cộng tính thì cộng tính nhưng điều ngược lại chưa chắc đúng.

Ta nói hàm tập p là *liên tục tại* $\emptyset$ nếu với mỗi dãy $A_n \downarrow \emptyset$, $A_n \in \mathscr{A}$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} p(A_n) = 0$.

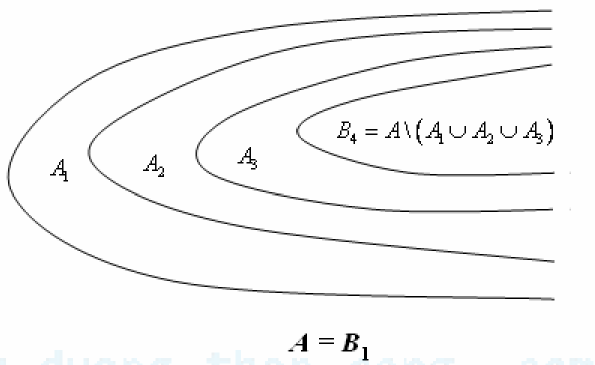
2.8 Định lý. *Cho hàm tập $p : \mathscr{A} \to \mathbb{R}^+$ (nhận giá trị hữu hạn không âm), cộng tính hữu hạn. Khi đó p là σ-cộng tính khi và chỉ khi p liên tục tại $\emptyset$.*

Chứng minh. Trước hết giả sử p liên tục tại $\emptyset$ và $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, (A_k, A \in \mathscr{A})$ và các A_k rời nhau. Khi đó, $B_n = A \setminus (\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \downarrow \emptyset$. Suy ra $A = B \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n$ là hợp hữu hạn các tập rời nhau. Như vậy, vì p cộng tính hữu hạn và liên tục tại $\emptyset$ nên ta có

$$p(A) = p(B_n) + \sum_{k=1}^{n} p(A_k) \to \sum_{k=1}^{\infty} p(A_k) \text{ khi } n \to \infty.$$

Vậy, ta có khẳng định đầu của mệnh đề.

Ngược lại, giả sử p là σ-cộng tính và một dãy tập $B_n \downarrow \emptyset$, $B_n \in \mathscr{A}$. Đặt $A = B_1, A_n = B_n \setminus B_{n+1}$. Khi đó, ta có $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ là hợp đếm được các tập rời nhau, $B_n = A \setminus (\bigcup_{k=1}^{n} A_k)$.



Nếu p hữu hạn và σ-cộng tính thì:

$$p(B_n) = p(A) - p\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = p(A) - \sum_{k=1}^{n} p(A_k) \to 0. \qquad \blacksquare$$

Chú ý. Từ định lý trên ta suy ra: Nếu p hữu hạn, cộng tính hữu hạn thì tính σ-cộng tính của p tương đương với tính liên tục tại $\emptyset$ của nó.

2.9 Định nghĩa. Cho $(X, \mathscr{F})$ là một không gian đo được. Một hàm tập σ-cộng tính

$$\mu : \mathscr{F} \to \overline{\mathbb{R}^+}$$

với $\mu(\emptyset) = 0$ được gọi là *độ đo* trên σ-đại số $\mathscr{F}$ (hoặc trên X nếu $\mathscr{F}$ đã được ngầm định). Với $A \in \mathscr{F}$ thì A được gọi là *tập đo được* và $\mu(A)$ được gọi là *độ đo của tập* A. Bộ ba $(X, \mathscr{F}, \mu)$ được gọi là một *không gian độ đo*.

Độ đo μ được gọi là *hữu hạn* nếu $\mu(X) < \infty$. Độ đo μ gọi là *σ-hữu hạn* nếu tồn tại dãy tập hợp $X_n \in \mathscr{F}$ và $\mu(X_n) < \infty, \forall n = 1, 2, \ldots$ sao cho

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X.$$

Chú ý. Như vậy hàm giá trị thực μ xác định trên σ-đại số $\mathscr{F}$ là độ đo nếu

- $\mu(A) \geq 0$ với mọi $A \in \mathscr{F}$.

- $\mu(\varnothing) = 0$ (có thể thay bằng: $\mu(A) < +\infty$ với ít nhất một $A \in \mathscr{F}$).
- μ là σ-cộng tính.

Ví dụ 2.6.

- Hàm tập μ đồng nhất bằng 0 là một độ đo hữu hạn trên $\mathscr{F}$.
- Cho không gian độ đo $(X, 2^X)$ và $x_0 \in X$ nào đó. Với $A \in 2^X$ bất kỳ, ta định nghĩa một hàm tập như sau

$$\mu_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x_0 \in A, \\ 0 & \text{nếu } x_0 \notin A. \end{cases}$$

  Khi đó μ là một độ đo hữu hạn và được gọi là độ đo Dirac tại điểm x_0 trên 2^X. Lấy một dãy $A_n \downarrow \varnothing$, khi đó theo định lý 2.8, $\mu(A_n) \to 0$ khi $n \to \infty$, tức là tồn tại số $n \in \mathbb{N}$ sao cho $\mu(A_k) = 0$ với mọi $k \geq n$.

- Cho không gian độ đo $(X, 2^X)$, với $A \in 2^X$ bất kỳ ta định nghĩa:

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{số phần tử của tập } A & \text{nếu } A \text{ hữu hạn} \\ +\infty & \text{nếu } A \text{ vô hạn.} \end{cases}$$

  Hàm tập μ là một độ đo trên 2^X và được gọi là độ đo đếm.

  Hàm tập μ là hữu hạn nếu và chỉ nếu X là tập hữu hạn. Hàm tập μ là σ-hữu hạn nếu và chỉ nếu X nhiều nhất là tập hợp đếm được.

  Giả sử X vô hạn, chẳng hạn $X = \mathbb{N}$, ta xét dãy $B_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\} \downarrow \varnothing$ nhưng $\mu(B_n) = +\infty \nrightarrow 0$. Do đó, μ không liên tục tại $\varnothing$. Định lý 2.8 không áp dụng được ở đây vì thiếu giả thiết μ hữu hạn.

- Cho không gian độ đo $(X, \mathscr{F})$ bất kỳ, với mọi $A \in \mathscr{F}$ ta định nghĩa một hàm tập như sau:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } A = \varnothing \\ +\infty & \text{nếu } A \neq \varnothing \end{cases}$$

  Khi đó μ là một độ đo không σ-hữu hạn trên $\mathscr{F}$. Với $X = \mathbb{N}$, vẫn bằng cách xét dãy $B_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}$, ta thấy độ đo này cũng không liên tục tại $\varnothing$.

Chú ý. Nếu p là một độ đo trên không gian đo được (Ω, Σ) thoả mãn $p(\Omega) = 1$ thì p được gọi là một *độ đo xác suất* và trong trường hợp này (Ω, Σ, p) được gọi là một *không gian độ đo xác suất*.

Cho không gian Ω là hữu hạn và μ là độ đo đếm trên Ω, khi đó độ đo sau $p(S) = \dfrac{\mu(S)}{\mu(\Omega)}$ với mọi tập con S của Ω là một độ đo xác suất. Người ta gọi đó là *độ đo xác suất cổ điển*.

2/2.2 Các tính chất

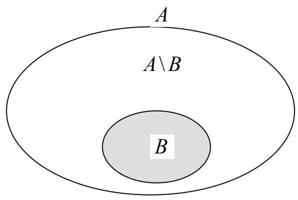
2.10 Định lý. *Cho không gian độ đo* $(X, \mathscr{F}, \mu)$*, khi đó ta có:*

i) $A, B \in \mathscr{F}$ *và* $B \subset A, \mu(B) < +\infty \Rightarrow \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$*;*

ii) $A, B \in \mathscr{F}$ *và* $B \subset A \Rightarrow \mu(B) \leq \mu(A)$*;*

iii) $A, B \in \mathscr{F}$ *thoả mãn* $\mu(B) = 0 \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) = \mu(A)$.

Chứng minh. i) Vì $B \subset A$ nên $A = (A \setminus B) \cup B$ là hợp hai tập rời nhau, do đó $\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(B)$. Mà $\mu(B) < \infty$ nên suy ra $\mu(A) - \mu(B) = \mu(A \setminus B)$.



ii) Hiển nhiên $\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(B) \geq \mu(B)$.

iii) Ta có $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ là hợp hai tập rời nhau nên $\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B) = \mu(A \setminus B)$. Theo tính chất ii), $\mu(A \setminus B) \leq \mu(A) \leq \mu(A \cup B)$ nên chúng bằng nhau.■

Do định lý 2.10.ii), nhiều khi ta tin rằng tập con của một tập có độ đo 0 tất nhiên cũng có độ đo 0. Tuy nhiên có một vấn đề ở đây là chưa chắc tập con đó đã đo được (tức thuộc σ-đại số $\mathscr{F}$). Chẳng hạn cho $X = \{a, b, c\}$ và $\mathscr{F} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ và cho một độ đo p thoả mãn $p\{a\} = 1$ và $p\{b, c\} = 0$. Khi đó hiển nhiên kết luận $p\{b\} = 0$ là sai vì thậm chí p còn không được định nghĩa trên $\{b\}$.

Cho $(X, \mathscr{F})$ là một không gian đo được, tính chất σ-cộng tính của hàm tập μ trên $\mathscr{F}$ có thể được coi là trung tâm của lý thuyết độ đo (xác suất). Nó thiết lập một số tính chất rất hữu dụng của độ đo. Chúng ta sẽ đưa ra một số tính chất sau rút ra từ tính σ-cộng tính.

2.11 Định lý. *Cho không gian độ đo* $(X, \mathscr{F}, \mu)$*, khi đó ta có:*

i) Với mọi họ đếm được $A_i \in \mathscr{F} (i = 1, 2, \dots)$*, ta có*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

ii) Với mọi dãy $A_i \in \mathscr{F}$ *thoả mãn* $\mu(A_i) = 0 (\forall i = 1, 2, \dots)$*, ta có* $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0$.

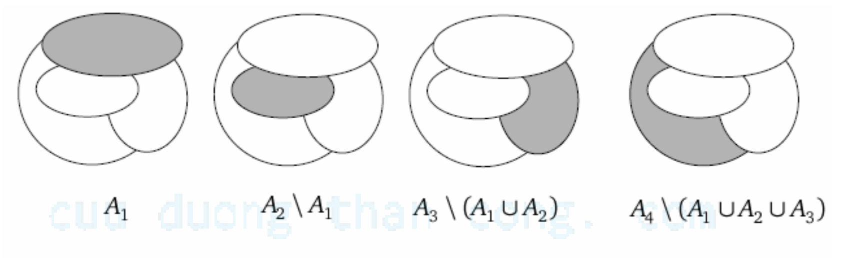
Chứng minh. i) Đặt $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \ldots, B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)$, ... Khi đó các tập B_i là rời nhau và $B_i \subset A_i$ nên theo định lý 2.10.ii) ta có $\mu(B_i) \le \mu(A_i)$, ngoài ra $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Vậy áp dụng tính chất σ-cộng tính của μ ta được:

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

ii) Đặt $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, áp dụng định lý 2.10 ta có $0 \le \mu(A) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = 0$, từ đó suy ra $\mu(A) = 0$. ■

Như vậy việc thêm bớt hợp một số đếm được các tập đo được có độ không sẽ không ảnh hưởng đến độ đo của tập ban đầu.

Trong chứng minh định lý 2.11.i), chúng ta đã sử dụng phương pháp tách hợp của dãy $\{A_n\}$ bất kỳ thành hợp của các tập rời nhau B_n, như minh họa ở hình dưới đây.



Dãy các tập B_n

2.12 Hệ quả. *Nếu độ đo μ là σ-hữu hạn thì mọi tập $A \in \mathscr{F}$ đều có thể phân tích thành một số đếm được tập có độ đo hữu hạn.*

Cũng từ tính σ-cộng tính của độ đo ta có thêm các kết quả sau:

2.13 Định lý (Tính liên tục của độ đo). *Cho không gian đo được $(X, \mathscr{F})$ và μ là một độ đo trên σ-đại số $\mathscr{F}$, khi đó:*

i) nếu dãy $A_i \in \mathscr{F}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ là đơn điệu tăng tức $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ thì

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i);$$

ii) nếu dãy $A_i \in \mathscr{F}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ là đơn điệu giảm tức $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ và $\mu(A_1) < \infty$ thì

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

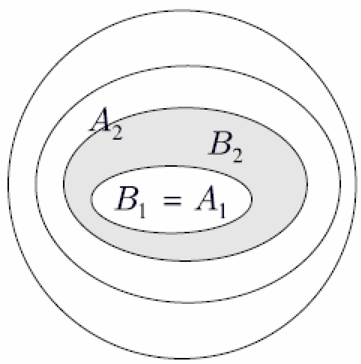
Ngược lại, cho $\mu : \mathscr{F} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ là hàm tập hữu hạn cộng tính thoả mãn $\mu(\emptyset) = 0$ thì nó sẽ là một độ đo nếu thoả mãn một trong hai điều kiện i) hoặc ii) ở trên.

Chứng minh. i) Giả sử dãy $A_i \in \mathscr{F}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ là đơn điệu tăng.

Ta đặt $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots, B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)$ thì các $B_i \in \mathscr{F}$ rời nhau và $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Do đó

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Khẳng định i) đã được chứng minh.



ii) Giả sử dãy $A_i \in \mathscr{F}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ là đơn điệu giảm.Theo công thức De Morgan $A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_i)$, trong đó các tập $A'_i = A_1 \setminus A_i \in \mathscr{F}$ và $A'_1 \subset A'_2 \subset \ldots$. Theo phần i) ta có $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A'_i)$.

Nhưng vì $\mu(A_1) < \infty$ mà $A_i \subset A_1$ nên $\mu(A_i) < \infty$ và $\mu(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) < \infty$. Từ đó ta có:

$$\mu(A'_i) = \mu(A_1) - \mu(A_i),$$
$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i) = \mu(A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(A_1) - \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i),$$

do đó thay vào trên ta nhận được $\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$.

Khẳng định ii) được chứng minh xong.

Phần còn lại của định lý được chứng minh ở phụ lục. ■

Các kết quả i) và ii) ở định lý 2.13 còn được gọi là tính liên tục trên và dưới của độ đo, chúng được suy trực tiếp từ tính σ-cộng tính của độ đo.

Như vậy từ định lý 2.13 ta rút ra kết luận:

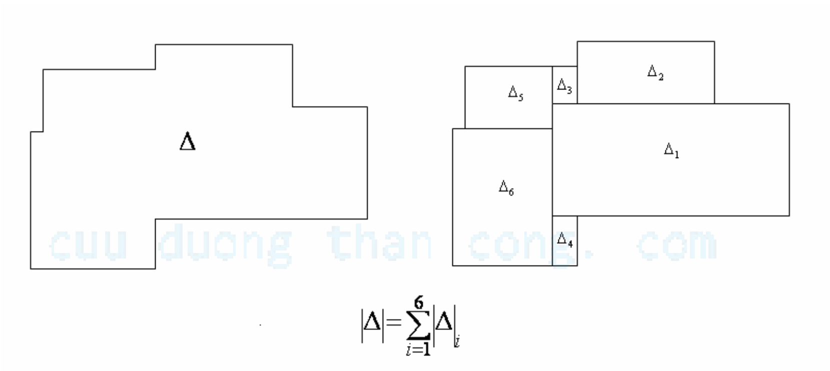
$$\sigma\text{-cộng tính} \iff \text{cộng tính hữu hạn và liên tục.}$$

Chú ý. Kết quả ii) trong định lý 2.13 có thể không còn đúng nếu $\mu(A_k) = +\infty$ với k nào đó. Thật vậy xét không gian độ đo $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ với μ là độ đo đếm. Dãy $A_n = \{n+1, n+2, \ldots\} \downarrow \emptyset$ nhưng $\mu(A_n) = +\infty \nrightarrow 0$.

§ 3. THÁC TRIỂN ĐỘ ĐO

Xuất phát từ việc tính diện tích của một hình phẳng, chúng ta sẽ thấy việc chỉ ra độ đo của một tập không hề đơn giản.

Ví dụ 2.7. Trên đường thẳng $\mathbb{R}$ có những tập điểm được gán với một số không âm gọi là "độ dài". Chẳng hạn, độ dài của một đoạn $\Delta = [a, b]$ là $|\Delta| = b - a$; nếu một tập có thể phân tích thành một số hữu hạn đoạn rời nhau: $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ thì độ dài của nó là $|\Delta_1| + |\Delta_2| + \cdots + |\Delta_n|$. Nhưng cũng có những tập mà trực quan không cho ta thấy nên xác định độ dài như thế nào, chẳng hạn như tập các điểm hữu tỉ trong đoạn $[0, 1]$. Vấn đề nảy sinh là làm thế nào để mở rộng khái niệm độ dài cho những tập phức tạp hơn những đoạn thẳng hoặc hợp của một số hữu hạn đoạn thẳng. Trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ và trong không gian $\mathbb{R}^3$ ta cũng gặp vấn đề tương tự.



Cho $\mathscr{A}$ là một *đại số* trong không gian X, p là một hàm tập σ-cộng tính trên $\mathscr{A}$. Ta sẽ tìm cách thác triển ("nới rộng") m thành độ đo trên một *σ-đại số* bao hàm $\mathscr{A}$.

2/3.1 Định lý thác triển độ đo

2.14 Định lý (thác triển độ đo của Caratheodory). *Cho $\mathscr{A}$ là một đại số trên tập X khác rỗng và $p : \mathscr{A} \to \mathbb{R}^+$ là một hàm tập σ-cộng tính. Khi đó tồn tại một độ đo μ xác định trên $\sigma(\mathscr{A})$ thỏa mãn $\mu(A) = p(A)$ với mọi $A \in \mathscr{A}$. Ngoài ra, nếu p là σ-hữu hạn thì μ được xác định duy nhất.*

Định lý trên giúp ta xây dựng một độ đo duy nhất trên một σ-đại số bằng cách chỉ cần xác định dáng điệu của độ đo trên đại số sinh ra σ-đại số này. Việc gán một độ đo đối với một đại số dễ thực hiện hơn nhiều nên định lý thác triển tỏ ra rất hữu dụng.

Bây giờ chúng ta sẽ tiến hành chứng minh định lý thác triển độ đo theo các bước như sau: Đầu tiên ta xây dựng một hàm tập μ^* - được gọi là độ đo ngoài - đối với lớp 2^X sao cho nó trùng p trên $\mathscr{A}$. Sau đó chỉ ra một σ-đại số chứa $\mathscr{A}$ và μ^* là độ đo đối với σ-đại số ấy. Khi đó hiển nhiên μ^* cũng là độ đo trên $\sigma(A)$.

2.15 Định nghĩa. Một hàm tập μ^* xác định trên lớp 2^X, *lớp tất cả các tập con*, của một không gian X, được gọi là một *độ đo ngoài* nếu

a) $\mu^*(A) \geq 0$ với mọi $A \subset X$,

b) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

c) $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i \Longrightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$.

Chú ý. Độ đo ngoài chỉ đòi hỏi tính nửa σ-cộng tính dưới c) nhưng lại xác định trên lớp tất cả các tập con của X. Đây là các điểm khác biệt cơ bản giữa độ đo và độ đo ngoài.

2.16 Định nghĩa. Cho μ^* là một độ đo ngoài trên X. Các tập con A của X thỏa mãn

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \text{ với mọi } E \subset X \tag{2.16}$$

được gọi là các tập μ^* - *đo được*. Ký hiệu: $\mathscr{L}$ là lớp tất cả các tập μ^* - đo được.

Chú ý. Điều kiện (2.16) tương đương với $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$ với mọi $E \subset X$.

Ví dụ 2.8.
- $X = \{0, 1\}, \mathscr{A} = 2^X$, ta định nghĩa $\mu^*(\emptyset) = 0, \mu^*(A) = 1, \emptyset \neq A \in \mathscr{A}$. Khi đó μ^* không là độ đo nhưng là độ đo ngoài.
- Với $X, \mathscr{A}$ như trên, nếu ta định nghĩa $\mu^*(\emptyset) = 0, \mu^*(\{1\}) = \mu^*(\{2\}) = 2, \mu^*(X) = 1$. Khi đó μ^* không là độ đo cũng không là độ đo ngoài.

Ví dụ 2.9. Cho tập $X = \{1, 2\}$. Lớp tất cả các tập con của X gồm $\{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}\}$. Với mỗi tập con $A \subset X$, đặt

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } A \neq \emptyset, \\ 0 & \text{nếu } A = \emptyset. \end{cases}$$

Dễ thấy rằng μ^* là một độ đo ngoài và họ các tập μ^* đo được là $\{\emptyset, X\}$, σ-đại số tầm thường trên X.

2.17 Định lý (Caratheodory). *Lớp tất cả các tập μ^* - đo được $\mathscr{L}$ là một σ-đại số và hàm $\mu = \mu^*|_{\mathscr{L}}$ (thu hẹp của μ^* trên $\mathscr{L}$) là một độ đo trên $\mathscr{L}$.*

Độ đo μ được gọi là *độ đo cảm sinh* bởi độ đo ngoài μ^*.

Quay trở lại định lý 2.14, với mỗi $A \subset X$, ta đặt:

$$\mu^*(A) = \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} p(P_i) : \cup_{i=1}^{\infty} P_i \supset A, P_i \in \mathscr{A} \Big\}. \tag{2.17}$$

Khi đó ta lần lượt chứng minh được các kết quả sau:

- μ^* là một độ đo ngoài .

- $\mu^*(A) = p(A)$ với mọi $A \in \mathscr{A}$.
- μ^* là độ đo trên $\sigma(\mathscr{A})$ hay $\sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{L}$ - lớp tất cả các tập μ^* đo được.
- Với p là σ-hữu hạn và μ_1 là một độ đo khác xác định trên $\sigma(\mathscr{A})$ sao cho $\mu\big|_{\mathscr{A}} = \mu_1\big|_{\mathscr{A}} = p$. Khi đó $\mu(A) = \mu_1(A), \forall A \in \sigma(\mathscr{A})$.

Chứng minh đầy đủ của định lý 2.14 được trình bày ở phụ lục.

Trong định lý 2.14 cần tới giả thiết σ-hữu hạn của p thì độ đo thác triển μ mới là duy nhất. Nếu bỏ giả thiết này chúng ta sẽ có phản ví dụ như sau:

Ví dụ 2.10. Cho $\mathscr{A}$ là đại số sinh bởi các khoảng nửa đóng bên phải: $(a, b]$. Có thể chứng minh được $\mathscr{A}$ gồm các tập hợp:

$$\mathscr{A} = \{A = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n | \Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing, \Delta_i = (a_i, b_i]\}.$$

Định nghĩa một hàm tập σ-cộng tính p trên $\mathscr{A}$ bằng cách đặt

$$p(A) = \begin{cases} +\infty \text{ nếu } A \neq \varnothing, \\ 0 \text{ nếu } A = \varnothing. \end{cases}$$

Khi đó $\sigma(\mathscr{A})$ là σ-đại số Borel $\mathscr{B}$, ta định nghĩa độ đo μ_1 trên $\mathscr{B}$ tương tự như p, tức

$$\mu_1(A) = \begin{cases} +\infty \text{ nếu } A \neq \varnothing, \\ 0 \text{ nếu } A = \varnothing, \end{cases}$$

còn độ đo μ_2 được định nghĩa như sau:

$$\mu_2(A) = \begin{cases} +\infty \text{ nếu } A \text{ gồm vô hạn phần tử }, \\ \text{số phần tử của } A \text{ nếu } A \text{ gồm hữu hạn phần tử }, \\ 0 \text{ nếu } A = \varnothing. \end{cases}$$

Như vậy μ_1 và μ_2 là hai độ đo khác nhau trên $\mathscr{B}$ nhưng trùng nhau trên $\mathscr{A}$.

Như vậy, ta đã có thể nói tới độ đo μ xác định trên một σ-đại số $\mathscr{A}$. Ta gọi $(X, \mathscr{A})$ là *không gian đo được* và $(X, \mathscr{A}, \mu)$ là *không gian độ đo*. Từ đây về sau, ta luôn xét độ đo xác định trên σ - đại số, không gian độ đo là không gian gắn với σ - đại số.

2.18 Định nghĩa. Độ đo μ trên một σ-đại số $\mathscr{A}$ được gọi là *(độ đo) đủ* nếu mọi tập con của một tập bất kỳ thuộc $\mathscr{A}$ có độ đo không đều cũng thuộc $\mathscr{A}$ và có độ đo không:

$$N \subset E, \mu(E) = 0 \Rightarrow N \in \mathscr{A}, \mu(N) = 0.$$

Các tập N được gọi là *tập μ-không* nếu có ít nhất một tập $A \in \mathscr{A}$ sao cho $N \subset A$ và $\mu(A) = 0$.

2.19 Định lý. *Độ đo μ cảm sinh bởi độ đo ngoài μ^* là độ đo đủ (trên σ-đại số $\mathscr{L}$ các tập μ^*-đo được). Họ các tập có độ đo μ bằng 0 trùng với họ các tập có độ đo ngoài μ^* bằng 0.*

Chứng minh. Ở đây, ta chỉ cần chứng minh rằng mọi tập A có $\mu^*(A) = 0$ đều μ^*-đo được. Với mọi tập $E \subset X$ ta có $\mu^*(E \cap A) \le \mu^*(A) = 0$, nên

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \le \mu^*(E \setminus A) = \mu^*(E \cap A^c) \le \mu^*(E).$$

Như vậy, A là μ^*-đo được. ∎

Định lý sau đây cho thấy rằng mọi không gian độ đo đều có thể nới rộng thành không gian có độ đo đủ. Vì vậy, ta có thể luôn xét các không gian độ đo là không gian có độ đo đủ.

2.20 Định lý. *Xét không gian độ đo $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Gọi $\mathscr{N}$ là tập tất cả các tập μ-không. Khi đó, lớp $\mathscr{A}_\mu$ gồm tất cả các tập có dạng $A \cup N$, với $A \in \mathscr{A}, N \in \mathscr{N}$ trùng với $\sigma(\mathscr{A} \cup \mathscr{N})$ và công thức $\widetilde{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$ xác định độ đo duy nhất trên $\mathscr{A}_\mu$ sao cho $\widetilde{\mu}|_{\mathscr{A}} = \mu$ và $(X, \mathscr{A}_\mu, \widetilde{\mu})$ là không gian có độ đo đủ.*

§ 4. ĐỘ ĐO TRÊN $\mathbb{R}^k$

Trong bài này, ta sẽ xem xét một cách cụ thể hơn một số trường hợp đặc biệt về các độ đo thường được sử dụng trên $\mathbb{R}^k$.

2/4.1 Độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}$

Ta gọi *gian* trên đường thẳng $\mathbb{R}$ là một tập điểm có một trong các dạng sau:

$$(a, b), [a, b], (a, b], [a, b); \quad (-\infty, +\infty), (-\infty, a), (-\infty, a], (a, +\infty), [a, +\infty).$$

Ký hiệu chung các gian là Δ. Chiều dài của Δ, ký hiệu $|\Delta| = (b - a)$ nếu Δ thuộc vào một trong bốn dạng đầu, còn lại $|\Delta| = \infty$.

Ví dụ 2.11. Chiều dài của tập chỉ có một điểm $[a, a]$ bằng $a - a = 0$.

Cho $\mathscr{C}$ là lớp tất cả các tập con của $\mathbb{R}$ có thể biểu diễn thành hợp của một số hữu hạn gian rời nhau:

$$\mathscr{C} = \{P : P = \cup_{i=1}^n \Delta_i, \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset (i \ne j)\},$$

trong đó Δ_i là những gian, n là số tự nhiên tuỳ ý.

2.21 Bổ đề. *$\mathscr{C}$ là một đại số.*

Chứng minh. Dễ thấy, nếu $P \in \mathscr{C}$ thì $\mathbb{R} \setminus P \in \mathscr{C}$. Mặt khác, hiển nhiên giao của hai gian là một gian, cho nên nếu $P, P' \in \mathscr{C}$, chẳng hạn $P = \cup_i \Delta_i, P' = \cup_j \Delta'_j$ thì

$$P \cap P' = \cup_i \cup_j (\Delta_i \cap \Delta'_j) \in \mathscr{C}, P \cup P' = \mathbb{R} \setminus [(\mathbb{R} \setminus P) \cap (\mathbb{R} \setminus P')] \in \mathscr{C}.$$

Vậy $\mathscr{C}$ là một đại số. ∎

Ta xác định trên $\mathscr{C}$ một hàm tập như sau: nếu $P \in \mathscr{C}$ và có dạng $P = \cup_{i=1}^n \Delta_i$, trong đó Δ_i là những gian rời nhau thì ta đặt

$$m(P) = \sum_{i=1}^n |\Delta_i|.$$

Có thể chứng minh được m là σ-cộng tính và σ-hữu hạn trên $\mathscr{C}$. Áp dụng định lý 2.14, tồn tại một độ đo thác triển từ m được xác định như sau:

$$\forall A \in 2^{\mathbb{R}}, \mu^*(A) = \inf\{\sum_{i=1}^\infty m(P_i) : \cup_{i=1}^\infty P_i \supset A, P_i \in \mathscr{C}\}.$$

Độ đo xây dựng theo cách trên gọi là *độ đo Lebesgue* trên đường thẳng. Các tập μ^* đo được, tức là thuộc σ-đại số $\mathscr{L}$ được gọi là các *tập đo được theo nghĩa Lebesgue* (*đo được ($\mathscr{L}$)*), độ đo Lebesgue được ký hiệu trong giáo trình này là m.

Chúng ta đã biết σ-đại số sinh bởi các gian còn được gọi là σ-đại số Borel. Do vậy, tập đo được Borel cũng là đo được Lebesgue.

Nhận xét. Không gian độ đo $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, m)$ là σ - hữu hạn. Thật vậy ta có $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} (n, n+1]$ là hợp đếm được các tập có độ đo bằng 1 hữu hạn.

Chú ý rằng họ các tập đo được Lebesgue không bằng $2^{\mathbb{R}}$, người ta chứng minh được tồn tại tập con của $\mathbb{R}$ không đo được Lebesgue. Thật vậy trên đoạn $[0,1]$ tồn tại một tập $A \subset [0,1]$ sao cho các tập $A + q, q \in \mathbb{Q}$ là rời nhau và

$$[0,1] \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (A + q).$$

Ở đây ta hiểu $A + q = \{x + q | x \in A\}$. Do tập số hữu tỷ là đếm được nên ta có thể viết là $[0,1] \subset \bigcup A_n$. Tuy nhiên ta dễ dàng chứng minh được $\mu^*(A+q) = \mu^*(A)$ nên các tập A_n có độ đo ngoài bằng nhau và do vậy

$$1 \leq \sum_{n=1}^\infty \mu^*(A_n)$$

nên $\mu^*(A_n) = \mu^*(A) > 0$. Nếu các A_n là μ^* đo được thì ta lại thấy

$$\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (A + q) \subset [0,2]$$

và do đó $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \leq 2$ nên $\mu^*(A_n) = \mu^*(A) = 0$. Vô lý.

2.22 Mệnh đề. *Mọi tập hợp điểm hữu hạn hoặc đếm được $E \subset \mathbb{R}$ đều đo được và có độ đo Lebesgue bằng không.*

Chứng minh. Giả sử $E = \{t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots\}$ là tập hợp gồm đếm được các giá trị thực. Các tập điểm đơn $\{t_i\}$ là đo được và có độ đo $m\{t_i\} = m[t_i, t_i] = 0$ nên E cũng đo được. Sử dụng tính chất σ-cộng tính của độ đo ta có:

$$m(E) = \sum_{i=1}^{\infty} m\{t_i\} = 0.$$

Ví dụ 2.12. Tập số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ có độ đo Lebesgue bằng 0.

Nhận xét. Theo định lý 2.19, độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}$ là độ đo đủ, vì vậy mọi tập con của tập có độ đo 0 cũng có độ đo 0.

Tiếp theo đây, chúng ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại tập không đếm được nhưng lại có độ đo Lebesgue bằng 0.

Ví dụ 2.13. Cho C là tập hợp Cantor

$$C := \left\{ \sum_{n \geq 1} x_n / 3^n : t_n = 0 \text{ hoặc } 2 \text{ với mọi } n \right\}.$$

Với mỗi $N = 1, 2, 3, \ldots$, đặt $C_N := \{\sum_{n \geq 1} t_n / 3^n : t_n = 0, 1 \text{ hoặc } 2 \text{ với mọi } n \text{ và } t_n \neq 1 \text{ với mọi } n \leq N\}$.

Như vậy C_1 là chính là khoảng đơn vị [0,1] xóa đi khoảng "giữa ba phần" mở (1/3,2/3). Khi đó để có C_2, từ 2 khoảng còn lại, ta xóa đi các khoảng "giữa ba phần" (1/9,2/9) và (7/9,8/9). Quá trình lặp N lần thì sẽ cho ta C_N. Như vậy $C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_N \supset \cdots$, và $\bigcap_{N \geq 1} C_N = C$.

Chúng ta có $\mu(C_n) = (2/3)^N$ với mọi N. Vì thế $\mu(C) = 0$. Mặt khác, C có lực lượng c do tồn tại song ánh giữa C và $2^{\mathbb{N}}$.

$^{2/}$4.2 Độ đo Lebesgue trong không gian $\mathbb{R}^k$

Trong không gian này ta gọi gian là tập gồm những điểm $x = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$ mà mỗi toạ độ t_i chạy trên một gian nào đó của $\mathbb{R}$. Nếu t_i chạy trên một gian của $\mathbb{R}$ có hai đầu mút là α_i, β_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ thì thể tích của Δ là số

$$|\Delta| = \prod_{i=1}^{k} (\beta_i - \alpha_i).$$

Gọi $\mathscr{C}^k$ là lớp những tập trong $\mathbb{R}^k$ có thể biểu diễn thành hợp của một số hữu hạn gian rời nhau. Ta có thể chứng minh rằng:

1. $\mathscr{C}^k$ là một đại số.

2. Nếu với mỗi tập $P \in \mathscr{C}^k$ có dạng $P = \cup_{i=1}^{n} \Delta_i$, trong đó Δ_i là những gian rời nhau, ta đặt

$$m^k(P) = \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i|,$$

thì hàm m^k là một hàm tập σ-cộng tính trên đại số $\mathscr{C}^k$.

3. Hàm tập m^k có thể thác triển thành một độ đo m^k trên σ-đại số $\mathscr{L}^k \supset \mathscr{C}^k$. Độ đo m^k này gọi là độ đo Lebesgue trong $\mathbb{R}^k$, và các tập thuộc lớp $\mathscr{L}^k$ gọi là *tập đo được* ($\mathscr{L}$) trong $\mathbb{R}^k$.

Độ đo Lebesgue m^k cũng là một độ đo đủ và σ-hữu hạn.

$^{2/}$4.3 Độ đo Lebesgue-Stieltjes trên $\mathbb{R}$

Nhắc lại một hàm $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được gọi là *liên tục trái* tại u nếu $F(u^-) = \lim_{t \to u^-} F(t) = F(u)$ và *liên tục phải* tại u nếu $F(u^+) = \lim_{t \to u^+} F(t) = F(u)$.

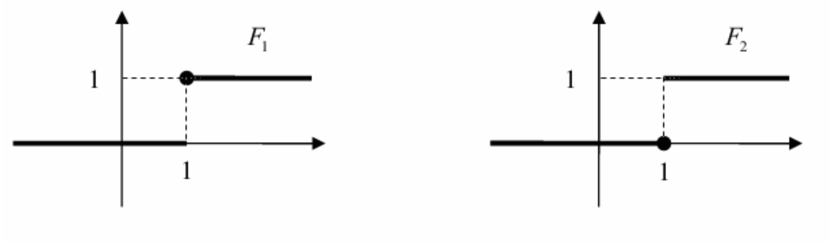
Ví dụ 2.14. Xét hàm số sau

$$F_1(t) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } t \in [1, \infty), \\ 0 \text{ nếu } t \in (-\infty, 1) \end{cases}$$

không liên tục trái tại $t = 1$ do $F_2(1) = 1$ còn $F_2(1^-) = 0$ trong khi hàm số

$$F_2(t) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } t \in (1, \infty), \\ 0 \text{ nếu } t \in (-\infty, 1] \end{cases}$$

là liên tục trái tại 1.



Cho $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm không giảm và liên tục trái tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$ và m_F là một hàm tập trên $\mathbb{R}$ được xác định như sau: $m_F([a,b)) = F(b) - F(a)$ và

$$m_F(\cup_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i)) = \sum_{i=1}^{\infty}[F(b_i) - F(a_i)],$$

trong đó các khoảng mở phải đóng trái $[a_i,b_i)$ là rời nhau. Với $A \subset \mathbb{R}$ bất kỳ, người ta định nghĩa

$$m_F^*(A) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}\Big[F(b_i) - F(a_i)\Big] : \cup_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i) \supset A\Big\}.$$

Có thể chứng minh được m_F^* là một độ đo trên σ-đại số Borel, ta ký hiệu là μ_F.

Độ đo μ_F của điểm $a \in \mathbb{R}$ được xác định như sau:

$$\mu_F(\{a\}) = \inf\{F(t) - F(a) : a < t\} = \lim_{t\to a^+} F(t) - F(a) = F(a^+) - F(a).$$

Như vậy $\mu_F(\{a\})$ bằng độ lớn bước nhảy của hàm F tại a. Khi đó ta có:

$$\mu_F(a,b) = F(b) - F(a^+), \mu_F[a,b] = F(b^+) - F(a), \mu_F(-\infty,a) = F(a) - \lim_{y\to-\infty} F(y), \ldots$$

Ví dụ 2.15. Xét hàm số $F_2(t)$ ở ví dụ 3.29, khi đó ta lần lượt tính được:

$\mu_F([0,1)) = F(1) - F(0) = 0$; $\mu_F(\{1\}) = F(1^+) - F(1) = 1$; $\mu_F((1,\infty)) = \lim_{t\to\infty} F(t) - F(1^+) = 0$; $\mu_F([1,\infty)) = \mu_F((0,\infty)) + \mu_F(\{1\}) = 1$.

2.23 Định nghĩa. Độ đo μ_F xác định như trên được gọi là *độ đo Lebesgue-Stieltjes* cảm sinh bởi hàm F.

Chú ý. Độ đo Lebesgue m xác định trên $\mathbb{R}$ ở phần trước cũng là một độ đo Lebesgue-Stieltjes cảm sinh bởi hàm $F(t) = t$.

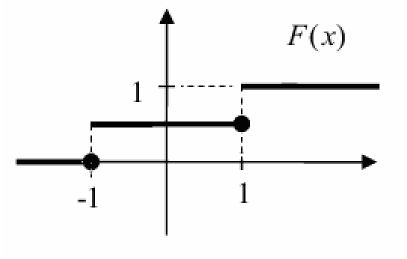
Chú ý. Người ta thấy rằng với một độ đo μ xác định trên σ-đại số Borel, ta định nghĩa hàm F như sau:

$$F(t) = \mu(-\infty,t).$$

Khi đó sử dụng các tính chất của độ đo có thể chỉ ra F là không âm, đơn điệu không giảm và liên tục trái trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2.16. Cho hàm số $F(t)$ được định nghĩa như sau:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } t \leq -1, \\ \frac{1}{2}, & \text{nếu } -1 < t \leq 1, \\ 1, & \text{nếu } t > 1. \end{cases}$$



Có thể thấy hàm $F(t)$ đơn điệu không giảm và liên tục trái trên $\mathbb{R}$. Khi đó ta có

$$\mu_F(-\infty, a) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } a \leq -1, \\ \frac{1}{2}, & \text{nếu } -1 < a \leq 1, \\ 1, & \text{nếu } a > 1. \end{cases}$$

Từ hình vẽ ta cũng dễ dàng thấy $\mu_F\{-1\} = \mu_F\{1\} = \frac{1}{2}$.

BÀI TẬP

B.1. Cho $X = (0,1)$. Lớp nào trong các lớp sau đây là một đại số:

$\mathscr{F}_1 = \{\emptyset, (0,1), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1)\}$,

$\mathscr{F}_2 = \{\emptyset, (0,1), (0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, 1), (0, \frac{2}{3}], (\frac{2}{3}, 1)\}$,

$\mathscr{F}_3 = \{\emptyset, (0,1), (0, \frac{2}{3}), [\frac{2}{3}, 1)\}$?

B.2. Chứng minh rằng nếu $\mathscr{A}_1$ và $\mathscr{A}_2$ là hai đại số các tập con của X, thì $\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2$ cũng là một đại số.

B.3. Tìm hai đại số mà hợp của chúng không còn là đại số.

B.4. Cho $X = [0,1]$. Chứng minh rằng đại số sinh bởi lớp $\{[0, \frac{1}{2}), \{1\}\}$ là

$\mathscr{A} = \{\emptyset, [0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, 1), \{1\}, [0,1), [0, \frac{1}{2}) \cup \{1\}, [\frac{1}{2}, 1], X\}$.

B.5. Cho $X = \{0,1,2,3\}$. Chứng minh rằng đại số sinh bởi lớp $\{\{0,1\}, \{1,2,3\}\}$ là

$\mathscr{A} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2,3\}, \{0,1\}, \{0,2,3\}, \{1,2,3\}, X\}$.

B.6. Cho tập X và $\mathscr{A}$ là một đại số (σ-đại số) các tập con của X. Tập $A \subset X$ được gọi là *nguyên tử* của $\mathscr{A}$ nếu $A \neq \emptyset$ và nếu $\emptyset \neq B \subset A, B \in \mathscr{A}$ thì $B = A$.

a) Chỉ ra tập nào là nguyên tử trong các đại số sau:

$\mathscr{A}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ với $X = \{1,2,3,4\}$,
$\mathscr{A}_2 = \{\emptyset, (0,1), (0, \frac{2}{3}), [\frac{2}{3}, 1)\}$ với $X = (0,1)$?

b) Chứng minh rằng hai nguyên tử khác nhau phải rời nhau.

c*) Chứng minh rằng nếu $\mathscr{A}$ là một đại số chỉ gồm một số hữu hạn các tập con của X thì tập hợp $\mathscr{M}$ gồm các nguyên tử của $\mathscr{A}$ tạo thành một phân hoạch hữu hạn của X và $\mathscr{A}$ là đại số sinh bởi $\mathscr{M}$.

d*) Chứng minh kết quả tương tự câu c) trong trường hợp $\mathscr{A}$ là một đại số chỉ gồm một số hữu hạn hoặc đếm được các tập con của X.

Nếu không có giả thiết A gồm hữu hạn (đếm được) các tập con thì kết luận của câu B.6 c) và d) chưa chắc đúng, hai bài tập sau là ví dụ.

B.7. Cho X là một tập vô hạn và $\mathscr{M}$ là lớp các tập chỉ gồm một phần tử trong X. Chứng minh đại số sinh bởi $\mathscr{M}$ là lớp tất cả các tập con $A \subset X$ mà A hữu hạn hoặc A^c hữu hạn.

B.8*. Với X và $\mathscr{M}$ được cho như trên. Chứng minh σ-đại số sinh bởi $\mathscr{M}$ là lớp tất cả các tập con $A \subset X$ mà 1 trong hai tập A hay A^c là hữu hạn hoặc đếm được.

B.9*. Cho $\mathscr{M}$ là họ tất cả các tập con của X gồm đúng hai phần tử. Tìm $\sigma(\mathscr{M})$ (σ-đại số sinh bởi $\mathscr{M}$).

B.10. Cho $\mathscr{F}$ là σ-đại số trên $X = [0,1]$ thoả mãn $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \in \mathscr{F}$ với mọi $n = 1, 2, \dots$. Chứng tỏ rằng

$a)\{0\} \in \mathscr{F}$, $\quad b)(\frac{1}{n}, 1] \in \mathscr{F}$ với mọi n,

$c)\{\frac{1}{n} : n = 2, 3, \dots\} \in \mathscr{F}$, $\quad d)(0, \frac{1}{n}] \in \mathscr{F}$ với mọi n.

B.11*. Xét tập X và lớp $\emptyset \neq \mathscr{M} \subset 2^X$. Lớp $\mathscr{M}$ được gọi là *lớp đơn điệu* nếu thoả mãn 2 điều kiện:

a) với mọi dãy các tập đơn điệu tăng $A_n \in \mathscr{M}$ thì $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M}$, hoặc

b) với mọi dãy các tập đơn điệu giảm $A_n \in \mathscr{M}$ thì $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M}$.

Giả sử $\mathscr{A}$ là một đại số. Chứng minh rằng $\mathscr{A}$ là σ - đại số khi và chỉ khi $\mathscr{A}$ là lớp đơn điệu.

B.13. Trong không gian đo được $(X, \mathscr{A})$ ở bài tập B.4, một độ đo μ xác định trên $(X, \mathscr{A})$ thoả mãn

$$\mu[0,1) = 0.8; \mu[\frac{1}{2}, 1) = 0.3; \mu[\frac{1}{2}, 1] = 0.2.$$

Hãy tính $\mu(X)$ và $\mu\{1\}$.

B.14. Trong không gian đo được $(X, \mathscr{A})$ ở bài tập B.5, một độ đo μ xác định trên $(X, \mathscr{A})$ thoả mãn

$$\mu\{0\} = 0.3; \mu\{2,3\} = 0.1; \mu\{0,1,2,3\} = 1.$$

Hãy tính $\mu\{0,1\}$ và $\mu\{1,2,3\}$.

B.15. Trong không gian độ đo $(X, \mathscr{F}, \mu)$, tập X có độ đo 1, chứng minh rằng nếu A_1, A_2 là các tập có độ đo 0 thì $A = A_1^c \cap A_2^c$ cũng là tập đo được. Độ đo của tập này bằng bao nhiêu?

B.16. Cho $(X, \mathscr{F}, \mu)$ là một không gian có độ đo σ-hữu hạn với $\mu(X) = +\infty$. Chứng minh rằng với $M < \infty$ bất kỳ, tồn tại một $A \in \mathscr{F}$ sao cho $M < \mu(A) < \infty$.

B.17. Cho X là tập vô hạn. Đặt $m(A) = 0$ với A hữu hạn bất kỳ, và $m(A) = +\infty$ nếu A vô hạn. Chứng minh m là hữu hạn cộng tính nhưng không cộng tính đếm được.

B.18. Cho không gian xác suất $(X, \Sigma, p), m \in \mathbb{N}$ và $A_i \in \Sigma, i = 1, \ldots, n$. Chứng minh rằng

$$p\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{m} (p(A_i) - (m-1)).$$

Gợi ý: Chứng minh bằng phương pháp quy nạp, đầu tiên kết luận đúng với $m = 2$. Nếu kết luận đúng với $m = k$ thì cũng đúng với $m = k + 1$.

B.19. Cho không gian độ đo $(X, \mathscr{F}, \mu)$. Chứng minh rằng nếu dãy $A_i \in \mathscr{F}$ thoả mãn $\mu(A_i \cap A_j) = 0, \forall i \neq j$ thì

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Gợi ý: Sử dụng phương pháp tách hợp của dãy $\{A_n\}$ bất kỳ thành hợp của các tập rời nhau B_n, như trong chứng minh của định lý 2.10.iii).

B.20*. Cho không gian độ đo $(X, \mathscr{F}, \mu)$. Chứng minh rằng

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\mu(A_i) - \mu(B_i)).$$

với mọi dãy $A_i, B_i \in \mathscr{F}$ thoả mãn $B_i \subseteq A_i, i = 1, 2, \ldots$.

B.21. Cho tập $X \neq \emptyset$. Với mỗi tập con $A \subset X$, đặt

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } A \neq \emptyset, \\ 0 & \text{nếu } A = \emptyset. \end{cases}$$

Chứng minh μ^* là một độ đo ngoài. Chỉ ra họ các tập μ^* đo được.

B.22*. Cho X là ma trận vuông cấp 10 gồm 100 số thực, A là các tập gồm các số thực trong 100 số đã cho. Ta định nghĩa hàm tập μ^*: $\mu^*(A) = \{$ số cột mà mỗi cột chứa ít nhất một phần tử $x_i \in A\}$. Chứng minh μ^* là độ đo ngoài và E là μ^* - đo được $\Leftrightarrow \forall x \in E$ thì cả cột chứa x cũng thuộc E.

B.23. Cho X là một tập vô hạn. $\mathscr{A}$ là họ các tập con A của X sao cho hoặc A hữu hạn thì đặt $m(A) = 0$, hoặc phần bù của A hữu hạn, thì đặt $m(A) = 1$.

a) Chứng minh $\mathscr{A}$ là một đại số nhưng không là σ-đại số.

b) Chứng minh rằng m là hữu hạn cộng tính trên $\mathscr{A}$.

B.24. Tìm các ví dụ để chứng tỏ:

a) hợp không đếm được các tập có độ đo không có thể có độ đo dương;

b) giao không đếm được các tập có độ đo 1 có thể có độ đo không.

B.25*. Giả sử $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ là chuỗi số dương hội tụ. Với mỗi tập $A \subset \mathbb{N}$ hữu hạn, đặt $\varphi(A) = \sum_{n \in A} a_n$. Nếu $A \subset \mathbb{N}$ vô hạn thì đặt $\varphi(A) = +\infty$. Chứng tỏ rằng φ cộng tính hữu hạn nhưng không σ-cộng tính trên lớp tất cả các tập con của $\mathbb{N}$.

B.26. Cho ba hàm số sau

$$F_1(t) = \begin{cases} -1 \text{ nếu } t < 2, \\ 2 \text{ nếu } 2 \le t < 4, \\ -1 \text{ nếu } 4 \le t < 5, \\ 0 \text{ nếu } t \ge 5, \end{cases} \qquad F_2(t) = \begin{cases} t \text{ nếu } t < 1, \\ 2 \text{ nếu } 1 \le t < 3, \\ \dfrac{5t+1}{t+1} \text{ nếu } t \ge 3, \end{cases}$$

$$F_3(t) = \begin{cases} -2 \text{ nếu } t < 0, \\ -1 \text{ nếu } 0 \le t < 2, \\ 2 \text{ nếu } 2 \le t < 3, \\ 3 \text{ nếu } t \ge 3, \end{cases}$$

a) Vẽ đồ thị của ba hàm số trên.

b) Trong các hàm số trên, hàm nào là hàm đơn điệu không giảm và liên tục trái.

Hãy tìm độ đo Lebesgue-Stieltjes cảm sinh bởi các hàm đó của các tập sau:

c) $(-\infty, 1]$ d) $[3, 3]$ e) $(3, \infty)$.

Phụ Lục

Chứng minh của một số định lý

Chứng minh (**Chứng minh phần tiếp theo của định lý 2.13).** Bây giờ giả sử $\mu : \mathscr{F} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ là hàm tập hữu hạn cộng tính thoả mãn $\mu(\emptyset) = 0$. Ta cần chỉ ra μ là σ-cộng tính nếu μ thoả mãn một trong hai điều kiện i) hoặc ii).

Nếu μ thoả mãn điều kiện i) và cho $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, trong đó các $B_i \in \mathscr{F}$ rời nhau. Đặt

$$A_1 = B_1, A_2 = B_1 \bigcup B_2, \ldots, A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, \ldots$$

thì $B = \cup_{n=1}^{\infty} A_n, A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, nên $\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$. Từ tính cộng tính của μ ta có

$$\mu(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)$$

nên

$$\mu(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i).$$

Còn nếu μ thoả mãn điều kiện ii) thì với các ký hiệu như trước, ta xét thêm giả thiết mọi $\mu(B_i) < +\infty$, (vì nếu có một $\mu(B_i) = +\infty$ thì kết quả là rõ ràng). Ta có

$$\emptyset = B \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (B \setminus A_n),$$

trong đó các $A'_n = B \setminus A_n \in \mathscr{F}$ và $A'_1 \supset A'_2 \supset \ldots$. Vậy

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B \setminus A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A'_n) = 0.$$

Nhưng do $A_n \subset B$ và $\mu(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) < \infty$ nên $\mu(B \setminus A_n) = \mu(B) - \mu(A_n)$. Từ đó

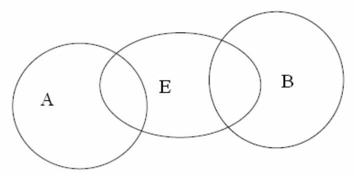
$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i).$$ ■

Chứng minh (**Chứng minh của định lý 2.17).** Ở đây ta ký hiệu $A \cap B = AB, A \setminus B = AB^c$.

B1 ($\mathscr{L}$ là một đại số): Thật vậy, dễ thử thấy rằng $\mathscr{L}$ kín đối với phép lấy phần bù và $\emptyset, X \in \mathscr{L}$. Ta chỉ ra $\mathscr{L}$ kín đối với phép giao (và do đó $\mathscr{L}$ là một đại số). Giả sử $A, B \in \mathscr{L}$. Ta có

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(EA) + \mu^*(EA^c) \quad \text{(do } A \text{ là } \mu^* \text{ - đo được)}\\
&= \mu^*(EAB) + \mu^*(EAB^c) + \mu^*(A^cEB) + \mu^*(A^cEB^c) \quad \text{(do } B \text{ là } \mu^* \text{ - đo được)}\\
&\geq \mu^*(EAB) + \mu^*(EAB^c \cup EA^cB \cup EA^cB^c)\\
&\geq \mu^*(EAB) + \mu^*\big(E(AB)^c\big).
\end{aligned}$$

Vậy $AB \in \mathscr{L}$.



B2 (μ^* cộng tính hữu hạn trên $\mathscr{L}$): Giả sử $A, B \in \mathscr{L}$ và $AB = \emptyset$, ta có

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*\big((A \cup B)A\big) + \mu^*\big((A \cup B)A^c\big) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

B3 ($\mathscr{L}$ là σ-đại số): Không giảm tổng quát, ta giả sử dãy $\{A_k\} \subset \mathscr{L}$ từng cặp rời nhau và $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Theo bước 1, $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{L}$. Do đó

$$\mu^*(E) = \mu^*(EB_n) + \mu^*(EB_n^c) \geq \sum_{k=1}^{n} \mu^*(EA_k) + \mu^*(EA^c),$$

vì theo chứng minh của bước 2

$$\mu^*(EB_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(EA_k).$$

Cho $n \to \infty$ ta được

$$\mu^*(E) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(EA_k) + \mu^*(EA^c) \geq \mu^*(EA) + \mu^*(EA^c).$$

Từ đó suy ra $A \in \mathscr{L}$.

B4 (μ^* là σ-cộng tính trên $\mathscr{L}$): Điều này rút ra từ chứng minh của bước 3 (lấy $E = A$). ■

Chứng minh (**Chứng minh của định lý 2.14).** Với mỗi $A \subset X$, ta đặt:

$$\mu^*(A) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} p(P_i) : \cup_{i=1}^{\infty} P_i \supset A, P_i \in \mathscr{A}\Big\}. \tag{2.23}$$

2.24 Bổ đề. *μ^* là một độ đo ngoài .*

Chứng minh. Rõ ràng, $\mu^*(\emptyset) = 0$ và $\mu^*(A) \geq 0, \forall A \subset A$. Ta chỉ cần chứng minh μ^* thoả mãn điều kiện thứ ba trong định nghĩa độ đo ngoài. Giả sử $\{A_k\} \subset 2^X$ và $\varepsilon > 0$ cho trước. Với mỗi $k \in \mathbb{N}$ ta luôn có thể chọn được dãy $\{A_{k_j}\} \subset \mathscr{A}$ sao cho $A_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{k_j}$, và

$$\sum_{j=1}^{\infty} p(A_{k_j}) \leq \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Do $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{k_j} \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ nên $\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) + \varepsilon.$

Cho $\varepsilon \downarrow 0$ ta có điều phải chứng minh. ■

1) Lấy $A \in \mathscr{A}$. Rõ ràng $\mu^*(A) \leq p(A)$, vì $A \in \mathscr{A}$ và $A \subset A \cup \emptyset \cup \cdots \cup \emptyset$. Ngoài ra, nếu $A \in \mathscr{A}$ thì với mọi dãy $A_k \in A$ $(k = 1, 2, \dots)$ sao cho $A \subset \cup_{k=1}^{\infty} A_k$, ta đều có $p(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} p(A_i)$. Vì vậy, $p(A) \leq \mu^*(A)$. Do đó $\mu^*(A) = p(A)$ với mọi $A \in \mathscr{A}$.

2) Để chứng minh μ^* là độ đo trên $\sigma(\mathscr{A})$, ta sẽ chỉ ra $\sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{L}$ - lớp tất cả các tập μ^* đo được. Nhưng do $\mathscr{L}$ là một σ-đại số nên ta chỉ cần chứng minh $\mathscr{A} \subset \mathscr{L}$, tức với $A \in \mathscr{A}$ bất kỳ, A là μ^* đo được.

Theo 1) μ^* là độ đo ngoài, nên với $A \in \mathscr{A}, E \subset X$ ta có

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(EA) + \mu^*(E \setminus A).$$

Mặt khác, với $\varepsilon > 0$ cho trước, ta chọn $\{A_k\} \subset \mathscr{A}$ sao cho $E \subset \cup_{k=1}^{\infty} A_k$ và

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(A_k) \leq \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Sử dụng giả thiết $\mathscr{A}$ là một đại số, ta có:

$$EA \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} AA_k, E \setminus A = EA^c \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A^c A_k,$$

$$\varepsilon + \mu^*(E) \geq \sum_{k=1}^{\infty} p(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} [p(AA_k) + p(A^c A_k)] \geq \mu^*(EA) + \mu^*(E \setminus A).$$

Từ đó cho $\varepsilon \downarrow 0$, ta có điều phải chứng minh.

3) Giả sử p là σ-hữu hạn và μ_1 là một độ đo khác xác định trên $\sigma(\mathscr{A})$ sao cho $\mu\big|_{\mathscr{A}} = \mu_1\big|_{\mathscr{A}} = p$. Ta cần chứng minh $\mu(A) = \mu_1(A), \forall A \in \sigma(\mathscr{A})$.

Theo giả thiết, $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$, $p(X_n) < \infty$, các X_n đôi một rời nhau. Ta có $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ với $A_n = X_n \cap A \in \sigma(\mathscr{A})$, $n = 1, 2, \ldots$, các A_n đôi một rời nhau. Vậy chỉ cần chứng minh $\mu(A_n) = \mu_1(A_n)$ với mọi số tự nhiên n. Thật vậy, nếu $\{E_{n,i}\}_{i=1}^{\infty}$ là một dãy bất kỳ những tập thuộc $\mathscr{A}$ sao cho $A_n \subset \cup_{i=1}^{\infty} E_{n,i}$ thì $\mu_1(A_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} p(E_{n,i})$. Do đó

$$\mu_1(A_n) \leq \mu(A_n). \tag{1}$$

Tương tự,

$$\mu_1(X_n \setminus A_n) \leq \mu(X_n \setminus A_n) \tag{2}$$

Ngoài ra,

$$\mu_1(A_n) + \mu_1(X_n \setminus A_n) = \mu_1(X_n) = p(X_n) = \mu^*(X_n) = \mu^*(A_n) + \mu^*(X_n \setminus A_n). \tag{3}$$

Vì các số hạng trong (1), (2), (3) đều hữu hạn nên ta suy ra $\mu_1(A_n) = \mu(A_n), \forall A_n \in \sigma(A)$. ■

Chứng minh (**Chứng minh của định lý 2.20).** Ta sẽ chỉ ra rằng $\mathscr{A}_\mu = \sigma(\mathscr{A} \cup \mathscr{N})$. Thật vậy, nếu $N \subset B \in \mathscr{A}$, $\mu(B) = 0$ thì

$$(A \cup N)^c \subset (A \cup B)^c + B \cap (A \cup N)^c, \mu(B \cap (A \cup N)^c) = 0.$$

Như vậy, $\mathscr{A}_\mu$ kín đối với phép lấy phần bù.

Mặt khác, rõ ràng $\mathscr{A}_\mu \supset \mathscr{A}$, $\mathscr{A}_\mu \supset \mathscr{N}$ và $\mathscr{A}_\mu$ kín đối với phép hợp đếm được. Vậy, $\mathscr{A}_\mu$ là σ-đại số. Từ đó suy ra $\mathscr{A}_\mu = \sigma(\mathscr{A} \cup \mathscr{N})$.

Tiếp theo, ta chứng minh $\widetilde{\mu}$ là độ đo trên $\mathscr{A}_\mu$. Nếu $A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$ với $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$; $N_1, N_2 \in \mathscr{N}$ thì $A_1 \triangle A_2 \subset N_1 \cup N_2$. Do đó, $\mu(A_1 \triangle A_2) = 0$. Suy ra $\mu(A_1) = \mu(A_2)$. Như vậy, $\widetilde{\mu}$ xác định đơn trị (không phụ thuộc vào cách biểu diễn $A \cup N$). Từ tính σ-cộng tính của μ ta suy ra $\widetilde{\mu}$ là σ-cộng tính. Vậy $\widetilde{\mu}$ là độ đo trên $\mathscr{A}_\mu$.

Ngoài ra, giả sử $M \subset \widetilde{A} \in \mathscr{A}_\mu$, và $\widetilde{\mu}(\widetilde{A}) = 0$. Khi đó, do $\widetilde{A} = A \cup N$ với $A \in \mathscr{A}$, $N \in \mathscr{N}$ và $\widetilde{\mu}(\widetilde{A}) = \mu(A) = 0$, suy ra $\mu(M) = 0$. Vậy M là tập μ-không, tức là $\widetilde{\mu}$ là độ đo đủ.

Cuối cùng, dễ dàng thấy được tính duy nhất của $\widetilde{\mu}$. ■

CHƯƠNG 3

TÍCH PHÂN LEBESGUE

Trong chương này, ta xét không gian độ đo $(X, \mathscr{F}, \mu)$ với $\mathscr{F}$ là một σ - đại số.

§ 1. TÍCH PHÂN LEBESGUE CỦA HÀM ĐƠN GIẢN KHÔNG ÂM

3/1.1 Khái niệm

Cho tập A bất kỳ trong X, ta gọi ***hàm đặc trưng*** của A là hàm số $\mathbf{1}_A(x)$ xác định như sau:

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x \notin A, \\ 1, & \text{nếu } x \in A. \end{cases}$$

3.1 Định nghĩa. Một hàm số $f(x) : X \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm ***đơn giản*** nếu nó chỉ có một số hữu hạn giá trị $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{R}}$ thoả mãn

$$A_i = \{x : f(x) = \alpha_i\} = f^{-1}(\alpha_i) \text{ là tập đo được, tức } A_i \in \mathscr{F}.$$

Với hàm f và các tập A_i được định nghĩa ở trên, khi đó các tập A_i là rời nhau và:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\mathbf{1}_{A_i}(x). \tag{3.1}$$

Ngược lại, nếu $f(x)$ có dạng trên, và các tập A_i đo được, rời nhau thì $f(x)$ là một hàm đơn giản.

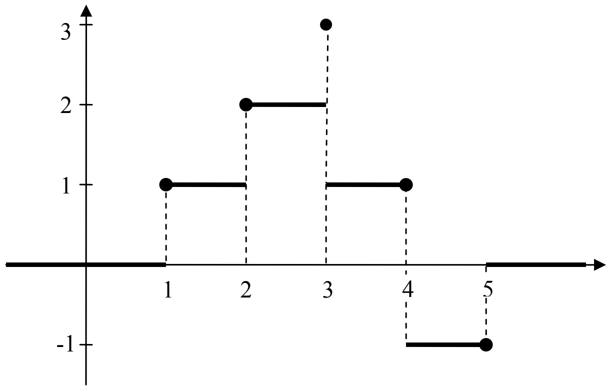
Chú ý ở đây các giá trị của $\alpha_i, i = 1, \ldots, n$ có thể bằng ∞.

Ví dụ 3.1. Xét hàm số $F(t)$ ở ví dụ 2.16 chương 2 có thể biểu diễn thành hàm đơn giản như sau:

$$F(t) = \frac{1}{2}.\mathbf{1}_{[-1,1)} + \mathbf{1}_{[1,\infty)}.$$

Ví dụ 3.2. Tương tự, cho hàm số $f_2(x)$ sau:

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x < 1, \\ 1, & \text{nếu } 1 \leq x < 2, \\ 2, & \text{nếu } 2 \leq x < 3, \\ 3, & \text{nếu } x = 3, \\ 1, & \text{nếu } 3 < x \leq 4, \\ -1, & \text{nếu } 4 < x \leq 5, \\ 0, & \text{nếu } x > 5. \end{cases}$$



Ta thấy $f_2(x)$ được biểu diễn dưới dạng (3.1) như sau:

$$f_2(x) = \mathbf{1}_{[1,2)\cup(3,4]} + 2.\mathbf{1}_{[2,3)} + 3.\mathbf{1}_3 - \mathbf{1}_{(4,5]}.$$

Nếu $f(x)$ là hàm đơn giản có mọi giá trị không âm thì f được gọi là một *hàm đơn giản không âm*.

3.2 Định nghĩa. ***Tích phân (Lebesgue)*** của hàm đơn giản không âm $f(x)$ trên X là giá trị sau

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) =: \int_X f(x) d\mu(x).$$

Nếu không sợ nhầm lẫn, ta ký hiệu ngắn gọn là: $\int_X f d\mu$.

Nếu tập $A \in \mathscr{F}$ bất kỳ, ta định nghĩa tích phân (Lebesgue) của hàm đơn giản không âm $f(x)$ trên A như sau:

$$\int_A f d\mu := \int_X f.\mathbf{1}_A d\mu.$$

Nhận xét. Với quy ước $0.\infty = 0$, tích phân của hàm đơn giản không âm theo cách định nghĩa trên luôn tồn tại (có thể bằng vô hạn).

Ví dụ 3.3. Xét hàm f(x) sau trên đoạn $[0,1]$ với độ đo Lebesgue m:

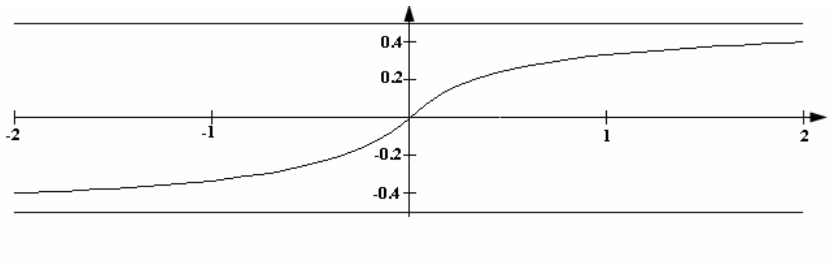
$$f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0, & \text{nếu } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Tích phân của hàm $f(x)$ trên $[0,1]$ là

$$\int_{[0,1]} f(x) dm = 0 \times m([0,1] \setminus \mathbb{Q}) + 1 \times m(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0 \times 1 + 1 \times 0 = 0.$$

Ví dụ 3.4. Cho hàm số $F(t) = \dfrac{t}{2|t|+1}$ và độ đo Lebesgue - Stieltjes cảm sinh từ F là μ_F. Một hàm số f trên $\mathbb{R}$ được xác định như sau:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x < 0, \\ 2 \text{ nếu } x \geq 0. \end{cases}$$



Hàm số $F(t) = \dfrac{t}{2|t|+1}$

Theo định nghĩa ta sẽ có:

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_F = 1.\mu_F(-\infty, 0) + 2.\mu_F[0, \infty).$$

Đồng thời ta thấy $\mu_F(-\infty, 0) = F(0^-) - F(-\infty) = \frac{1}{2}$, $\mu_F[0, \infty) = F(\infty) - F(0^-) = \frac{1}{2}$, do vậy

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_F = \frac{3}{2}.$$

Định nghĩa trên không phụ thuộc cách biểu diễn của hàm đơn giản. Thật vậy ta có định lý sau:

3.3 Định lý. *Nếu một hàm đơn giản $f(x)$ có hai cách biểu diễn*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbf{1}_{B_j}$$

thì $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j)$.

Như vậy, tích phân của một hàm đơn giản $f(x)$ trên X được xác định duy nhất.

3/1.2 Tính chất

Từ định nghĩa, ta suy ra một số tính chất của tích phân trên như sau:

i) $\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$ với mọi $\alpha \geq 0$.

ii) Nếu f, g là các hàm đơn giản, không âm trên X thì $f + g$ cũng là hàm đơn giản không âm thoả mãn

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

iii)Nếu f, g là các hàm đơn giản, không âm và $f \leq g$ trên X thì $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

Để chứng minh ii), ta giả sử $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}; g = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbf{1}_{B_j}$. Vì $A_i = \cup_{j=1}^{m}(A_i B_j)$ và $B_j = \cup_{i=1}^{n}(B_j A_i)$ nên:

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i B_j}, \quad g = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \beta_j \mathbf{1}_{B_j A_i}. \tag{3.3}$$

Do đó, ta có $\int_X (f+g)d\mu = \sum_{i,j}(\alpha_i + \beta_j)\mu(A_iB_j) = \sum_{i,j}\alpha_i\mu(A_iB_j) + \sum_{i,j}\beta_j\mu(A_iB_j) = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$.

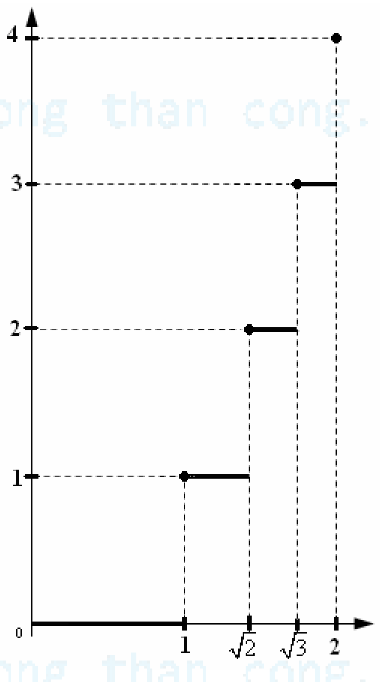
Với tính chất iii), ta thấy vì $f \leq g$ nên trên $A_i \cap B_j$ ta có $\alpha_i \leq \beta_j$. Từ đó theo (3.3) ta được điều phải chứng minh.

Ví dụ 3.5. Cho hàm f xác định trên $(E, \mathscr{B}, m)$ trong đó: $f(x) = \mathrm{Int}(x^2), E = [0,2]$. Ở đây ký hiệu $\mathrm{Int}(x)$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

Ta nhận thấy $f(x)$ bằng 0 nếu $0 \leq x < 1$, bằng 1 nếu $1 \leq x < \sqrt{2}$, bằng 2 nếu $\sqrt{2} \leq x < \sqrt{3}$, bằng 3 nếu $\sqrt{3} \leq x < 2$, bằng 4 nếu $x = 2$.

Do vậy

$$\begin{aligned} f &= \mathbf{1}_{[1,\sqrt{2})} + 2.\mathbf{1}_{[\sqrt{2},\sqrt{3})} + 3.\mathbf{1}_{[\sqrt{3},2)} + 4.\mathbf{1}_{[2]} \\ \Rightarrow \int_E f dm &= (\sqrt{2}-1) + 2(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + 3(2-\sqrt{3}) + 4.0 \\ &= 5 - \sqrt{3} - \sqrt{2}. \end{aligned}$$



Hàm số $f(x) = \mathrm{Int}(x^2)$

Giống như với tích phân Riemann, khái niệm tích phân trong chương này cũng gắn liền với việc lấy giới hạn. Ta mở rộng khái niệm tích phân Lebesgue cho lớp các hàm là giới hạn của một dãy các hàm đơn giản, sẽ được gọi là các hàm *đo được*. Khi đó, tích phân của một hàm đo được không âm sẽ là giới hạn của dãy tích phân các hàm đơn giản không âm hội tụ tới nó. Tuy nhiên cũng như nhiều khái niệm khác trong toán học, chúng ta sẽ sử dụng định nghĩa hàm đo được thông qua một tính chất tương đương nhưng dễ kiểm tra hơn rất nhiều so với việc định nghĩa nó là giới hạn của một dãy các hàm đơn giản.

§ 2. HÀM SỐ ĐO ĐƯỢC

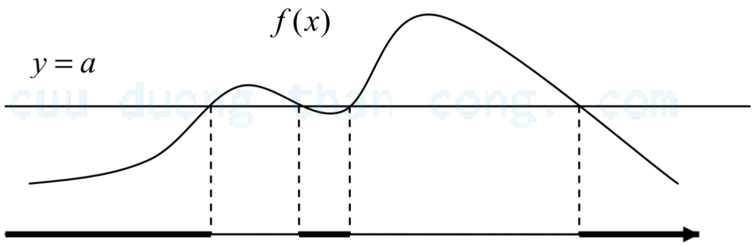
3/2.1 Định nghĩa và các phép toán

Trong mục này ta luôn giả thiết có một không gian đo được $(X, \mathscr{F})$, $\mathscr{F}$ là σ - đại số những tập con của X.

3.4 Định nghĩa. Một hàm số $f : X \to \mathbb{R}$ được gọi là *đo được* đối với σ-đại số $\mathscr{F}$ (hoặc $\mathscr{F}$ - đo được) nếu

$$(\forall a \in \mathbb{R}) \quad f^{-1}(-\infty, a) = \{x \in X : f(x) < a\} \in \mathscr{F}. \tag{3.4}$$

Khi trên $\mathscr{F}$ có một độ đo μ thì $f(x)$ cũng gọi là *đo được đối với độ đo* μ hay μ *- đo được*. Trong trường hợp $X = \mathbb{R}^k, \mathscr{F} = \mathscr{L}^k$ thì ta nói $f(x)$ là *đo được theo nghĩa Lebesgue*, hay *đo được (L)*. Trường hợp $\mathscr{F}$ là σ - đại số Borel, $f(x)$ được gọi là *đo được theo nghĩa Borel* hay *hàm đo được Borel*.



Tập $\{x \mid f(x) < a\}$

3.5 Mệnh đề. *Điều kiện* (3.4) *có thể thay thế bằng một trong các điều kiện sau:*

$$(\forall a \in \mathbb{R}) \quad \{x \in X : f(x) > a\} \in \mathscr{F} \tag{3.5}$$

$$(\forall a \in \mathbb{R}) \quad \{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathscr{F} \tag{3.5}$$

$$(\forall a \in \mathbb{R}) \quad \{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathscr{F}. \tag{3.5}$$

Chứng minh. Thật vậy, (3.4) ⇔ (3.5) vì các tập bù nhau. Tương tự, (3.5) ⇔ (3.5), ta cần chứng minh (3.4) ⇔ (3.5).

(3.4) ⇒ (3.5): Rõ ràng $f(x) \leq a$ khi và chỉ khi $(\forall n) f(x) < a + 1/n$, nên $\{x \in X : f(x) \leq a\} = \cap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) < a + 1/n\} \in \mathscr{F}$.

(3.5) ⇒ (3.4): Rõ ràng $f(x) < a$ khi và chỉ khi $(\exists n) f(x) \leq a - 1/n$, nên $\{x \in X : f(x) < a\} = \cup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \leq a - 1/n\} \in \mathscr{F}$. ■

3.6 Hệ quả. *Nếu hàm f là đo được thì tập $f^{-1}(\{a\}), a \in \mathbb{R}$ là tập đo được.*

Chứng minh. Chúng ta có $f^{-1}(\{a\}) = f^{-1}(-\infty, a] \setminus f^{-1}(-\infty, a)$ nên thuộc $\mathscr{F}$. ■

Ví dụ 3.6. Cho hàm $f : X \to \mathbb{R}$ là hàm hằng số $f(x) = c$. Khi đó $f^{-1}(-\infty, a) = \emptyset$ nếu $a \leq c$, bằng X nếu $a > c$ nên f là đo được.

Ví dụ 3.7. Cho $A \subset X$ và hàm $f = \mathbf{1}_A = 1$ nếu $x \in A$, 0 trong trường hợp còn lại. Khi đó $f^{-1}(-\infty, a) = \emptyset, X$ hoặc A nên f là đo được khi và chỉ khi A là tập đo được.

Ví dụ 3.8. Giả sử X là tập số thực, $\mathscr{F}$ là σ-đại số Borel $\mathscr{B}$. Hàm số $f(x) = x$ là hàm đo được do $f^{-1}(-\infty, a) = (-\infty, a) \in \mathscr{B}$.

Ví dụ 3.9. Nếu $\mathscr{F} = 2^X$ thì hàm số *bất kỳ* từ X vào $\mathbb{R}$ đều đo được.

Câu hỏi: Hãy đưa ra ví dụ về một hàm không đo được.

Chú ý. Trong lý thuyết xác suất, hàm đo được sẽ được gọi là *biến ngẫu nhiên*.

Tiếp theo, chúng ta sẽ chỉ ra các cách tạo ra hàm đo được "mới" từ các hàm đã cho. Đó là cách lấy tổng, hiệu, tích, thương, ... các hàm đo được.

3.7 Định lý. *i) Nếu $f(x)$ đo được thì với mọi $\alpha > 0$ hàm số $|f(x)|^\alpha$ cũng đo được.*

ii) Nếu $f(x)$ và $g(x)$ đo được và hữu hạn thì các hàm số

$$kf(x), f \pm g, fg, \max\{f, g\}, \min\{f, g\}$$

cũng đo được, và nếu $g(x)$ không triệt tiêu thì f/g cũng đo được.

Chứng minh. i) Nếu $f(x)$ đo được thì với mọi $a > 0$:

$$\{|f(x)|^\alpha < a\} = \{|f(x)| < a^{1/\alpha}\} = \{-a^{1/\alpha} < f(x) < a^{1/\alpha}\} =$$
$$= \{f(x) < a^{1/\alpha}\} \cap \{f(x) > -a^{1/\alpha}\} \in \mathscr{F}.$$

Trường hợp $a \leq 0$ thì $\{|f(x)|^\alpha < a\} = \emptyset \in \mathscr{F}$.

Vậy $|f(x)|^\alpha$ là đo được.

ii) Hàm kf đo được là hiển nhiên. Bây giờ ta chứng minh $f + g$ là đo được.

Cho a là một số thực bất kỳ, $r_1, r_2, \ldots$ là dãy các số hữu tỉ. Rõ ràng

$$f(x) + g(x) < a \Leftrightarrow f(x) < a - g(x) \Leftrightarrow \exists n,\ f(x) < r_n < a - g(x),$$

do đó

$$\begin{aligned} \{f(x) + g(x) < a\} &= \cup_{n=1}^\infty \{f(x) < r_n < a - g(x)\} \\ &= \cup_{n=1}^\infty \left[\{|f(x) < r_n\} \cap \{g(x) < a - r_n\}\right] \in \mathscr{F}. \end{aligned}$$

Vậy $f+g$ đo được. Chứng minh tương tự với $f-g$.

Từ các kết quả trên và dựa vào các hệ thức

$$fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2], \quad \max\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|),$$
$$\min\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|),$$

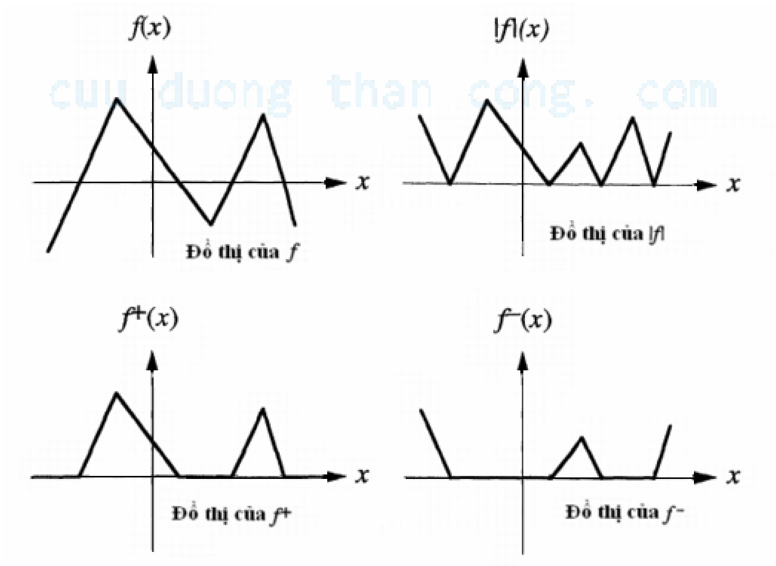
ta suy ra các hàm số $fg, \max\{f,g\}$ và $\min\{f,g\}$ là đo được.

Nếu $g(x)$ không triệt tiêu thì với mọi a

$$\left\{\frac{1}{g^2} < a\right\} = \begin{cases} \emptyset \in \mathscr{F} & \text{nếu } a \leq 0, \\ \{g^2 > \frac{1}{a}\} \in \mathscr{F} & \text{nếu } a > 0, \end{cases}$$

nên $\frac{1}{g^2}$ đo được và do $\frac{f}{g} = fg\frac{1}{g^2}$, ta có f/g đo được. ■

Ký hiệu $f^+(x) = \sup\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\}$. Dễ thấy $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ là hiệu hai hàm dương và $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$, do đó $f^+ = \dfrac{f+|f|}{2}, f^- = \dfrac{|f|-f}{2}$.



3.8 Hệ quả. *Hàm số f đo được khi và chỉ khi hai hàm $f^\pm = \sup(\pm f, 0)$ là đo được.*

Chứng minh. Nếu f đo được thì vì hàm $g \equiv 0$ đo được nên $f^\pm$ cũng đo được. Ngược lại, nếu $f^\pm$ đo được thì $f = f^+ - f^-$ cũng đo được. ■

Ví dụ 3.10. Chúng ta thấy hàm f đo được dẫn đến hàm $|f| = f^+ + f^-$ là đo được. Tuy nhiên điều ngược lại không đúng.

Giả sử $\mathscr{F} \neq 2^X$ và A là tập không đo được. Đặt $f(x) = 2$ nếu $x \in A$ và -2 nếu $x \notin A$. Khi đó f không đo được nhưng $|f|$ lại đo được.

3.9 Định lý. *Nếu dãy $\{f_n(x)\}$ là những hàm số đo được và hữu hạn thì*

i) Các hàm số $\sup_n f_n(x), \inf_n f_n(x); \overline{\lim} f_n(x); \underline{\lim} f_n(x)$ là đo được,

ii) Tập hợp những điểm tại đó dãy f_n hội tụ là một tập đo được,

iii) Nếu tồn tại $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ thì hàm số đó đo được.

Chứng minh. i) Với mọi số thực a:

$$\{\sup_n f_n(x) \le a\} = \cap_{n=1}^{\infty}\{f_n(x) \le a\} \in \mathscr{F},$$

$$\{\inf_n f_n(x) \ge a\} = \cap_{n=1}^{\infty}\{f_n(x) \ge a\} \in \mathscr{F},$$

cho nên các hàm số $\sup_n f_n(x)$ và $\inf_n f_n(x)$ đo được. Do đó suy ra các hàm số

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) = \inf\{\sup_k f_{n+k}(x)\},$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) = \sup\{\inf_k f_{n+k}(x)\},$$

là đo được.

ii) Tập hợp những điểm mà tại đó dãy f_n hội tụ là tập hợp $\{x : \overline{\lim}_n f_n = \underline{\lim}_n f_n\}$, do đó đo được.

iii) Nếu $f_n \to f$ thì $f = \overline{\lim}_n f_n = \underline{\lim}_n f_n$, theo kết quả trên f là hàm đo được. ■

Chú ý rằng, (xem chương "Không gian metric"), các hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ là đo được Borel. Ngoài ra, các hàm đơn điệu trên $\mathbb{R}$ cũng đo được Borel như trong mệnh đề dưới đây.

3.10 Mệnh đề. *Nếu hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là đơn điệu không tăng hoặc không giảm thì f là đo được Borel.*

Chứng minh. Giả sử f là đơn điệu không tăng. Với $a \in \mathbb{R}$ bất kỳ, đặt $x_0 = \inf\{x : f(x) \ge a\}$. Khi đó nếu $f(x_0) = a$ thì $f^{-1}(-\infty, a) = (-\infty, x_0)$, ngược lại nếu $f(x_0) \neq a$ thì $f^{-1}(-\infty, a) = (-\infty, x_0]$. Như vậy, trong trường hợp nào thì $f^{-1}(-\infty, a)$ cũng thuộc $\mathscr{B}$. ■

3.11 Mệnh đề. *Giả sử f đo được trên $(X, \mathscr{F})$. Khi đó nếu A là tập Borel thì $f^{-1}(A) \in \mathscr{F}$.*

Chứng minh. Đặt $\mathscr{C} = \{A \in \mathscr{B} : f^{-1}(A) \in \mathscr{F}\}$. Dễ dàng chứng minh được $\mathscr{C}$ là một σ-đại số và chứa họ các khoảng $(-\infty, a)$ nên cũng chứa σ-đại số sinh bởi họ các khoảng này. Vậy $\mathscr{C}$ chứa $\mathscr{B}$. ■

Chúng ta biết rằng σ-đại số Borel $\mathscr{B}$ nằm trong σ-đại số các tập đo được Lebesgue tuy nhiên chưa chắc chắn chúng có khác nhau hay không. Bây giờ, sử dụng hai mệnh đề trên, ta sẽ chỉ ra một tập đo được Lebesgue nhưng không đo được Borel.

Ví dụ 3.11. Nhắc lại tập Cantor là tập sau

$$C := \left\{ \sum_{n\geq 1} x_n/3^n : x_n = 0 \text{ hoặc } 2 \text{ với mọi } n \right\}.$$

Định nghĩa một hàm f như sau:

$$f(x) = \sup\{y \in C : y \leq x\}.$$

Như vậy nếu $x \in (1/3, 2/3)$ thì $f(x) = 1/3$, nếu $x \in (1/9, 2/9)$ thì $f(x) = 1/9$, v.v. Dễ thấy tập giá trị của f là tập Cantor, đồng thời f là không giảm nên nó đo được theo mệnh đề 3.10.

Gọi A là một tập không đo được Lebesgue (người ta đã chứng minh luôn tồn tại tập như vậy). Khi đó $f(A) \subset C$ nên nó là tập đo được và có độ đo 0. Tuy nhiên $f(A)$ không là tập Borel bởi nếu thế thì theo mệnh đề 3.11, $A = f^{-1}(f(A))$ sẽ đo được Borel, vô lý.

Ví dụ trên cũng cho thấy việc lấy σ-đại số các tập đo được Lebesgue trên $\mathbb{R}$ làm miền giá trị có thể là quá lớn.

3/2.2 Cấu trúc của hàm số đo được

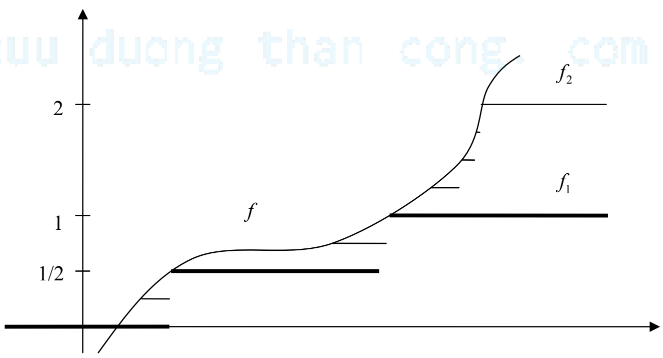
3.12 Định lý (Về cấu trúc của hàm đo được). *Mỗi hàm số đo được, không âm là giới hạn của một dãy tăng các hàm đơn giản không âm.*

Ta đã chỉ ra $\mathbf{1}_A(x)$ đo được $\Leftrightarrow$ A đo được nên hàm đơn giản bất kỳ trên $(X, \mathscr{F})$ luôn đo được.

Chứng minh. Ta chia đoạn $[0, n]$ thành $n.2^n$ đoạn bằng nhau với độ dài 2^{-n}. Đặt

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{nếu } f(x) \geq n, \\ \frac{k}{2^n} & \text{nếu } \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}, (k = 0, 1, \ldots, n.2^n - 1). \end{cases}$$

Rõ ràng $f_n(x)$ là hàm số đơn giản. Ta sẽ chỉ ra $f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \geq 0$.



Hàm $f_n(x)$

Thật vậy, với $x : f(x) \geq n$ thì $f_n(x) = n \leq f_{n+1}(x)$. Còn lại, tồn tại k sao cho $\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}$. Khi đó $f_n(x) = \frac{k}{2^n}$. Ta có $k \leq 2^n f(x) < k+1$ hay $k = [2^n f(x)]$. Từ đó suy ra $2k \leq 2^{n+1} f(x)$. Vì thế k' ứng với hàm f_{n+1} là $k' = [2^{n+1} f(x)]$ thoả mãn hệ thức $2k \leq k'$. Chứng tỏ $f_n(x) = \frac{k}{2^n} = \frac{2k}{2^{n+1}} \leq \frac{k'}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x)$.
Tiếp theo, ta chứng minh rằng $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Nếu $f(x) < +\infty$ thì với n đủ lớn $f(x) < n$, nên $\exists k : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}$. Khi đó $f_n(x) = \frac{k}{2^n}$, suy ra $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n} \to 0$ $(n \to \infty)$.

Nếu $f(x) = +\infty$ thì $\forall n : f(x) \geq n$, nên $f_n(x) = n \to \infty$.
Vậy trong mọi trường hợp $f_n(x) \to f(x)$. ■

3.13 Hệ quả. *Mọi hàm số đo được là giới hạn của một dãy các hàm đơn giản.*

Chứng minh. Đặt $f^{\pm} = \sup\{\pm f, 0\}$, ta có $f = f^+ - f^-$. Các hàm $f^{\pm}$ là những hàm không âm, đo được nên theo định lý vừa chứng minh, tồn tại hai dãy hàm đơn giản $\{f_n^{\pm}\}$ hội tụ tương ứng tới $f^{\pm}$. Đương nhiên, mỗi hàm số $f_n = f_n^+ - f_n^-$ cũng đơn giản vì cũng đo được và chỉ lấy một số hữu hạn giá trị. Hơn nữa, ta có $f_n \to f^+ - f^- = f$ khi $n \to \infty$.■

3/2.3 Hàm số tương đương

Xét không gian độ đo $(X, \mathscr{F}, \mu)$. Ta nói điều kiện $P(x)$ được thoả mãn với *hầu hết mọi* x hay *được thoả mãn h.k.n* nếu có một tập B sao cho $\mu(B) = 0$ và $P(x)$ được thoả mãn với mọi $x \in B^c$.

Ta nói rằng dãy hàm số đo được $\{f_n\}$ hội tụ hầu khắp nơi (h.k.n) tới hàm số đo được f nếu

$$\mu\{x : f_n(x) \nrightarrow f(x)\} = 0$$

Ký hiệu: $f_n \to f$ h.k.n.

Ví dụ 3.12. Xét dãy hàm $g_n(x) = n\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x) = \begin{cases} n, & \text{nếu } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0, & \text{trong trường hợp còn lại.} \end{cases}$.

Ta có thể kiểm tra $\{x : g_n(x) \nrightarrow 0\} = \{0\}$ có độ đo bằng 0 nên $g_n \to 0$ hkn.

Hai hàm số $f(x) = g(x)$ h.k.n có nghĩa là

$$\exists B, \mu(B) = 0 \text{ sao cho } (\forall x \in B^c)\ f(x) = g(x).$$

Khi đó, $f(x)$ và $g(x)$ được gọi là *tương đương*. Ký hiệu: $f(x) \sim g(x)$.

Ví dụ 3.13. $\mathbf{1}_{[a,b)} = \mathbf{1}_{(a,b)}$ (h.k.n) đối với độ đo Lebesgue.

3.14 Định lý. *Nếu μ là độ đo đủ thì mọi hàm số $g(x)$ tương đương với một hàm số đo được $f(x)$ cũng là đo được.*

Chứng minh. Với mọi số thực a, ta có

$$\{f(x) < a\} \triangle \{g(x) < a\} \subset \{f(x) \neq g(x)\}.$$

Theo giả thiết, tập $\{f(x) \neq g(x)\}$ có độ đo 0 mà μ là độ đo đủ, nên tập $\{f(x) < a\} \triangle \{g(x) < a\}$ cũng đo được và có độ đo 0. Chứng tỏ tập $\{g(x) < a\}$ chỉ khác tập $\{f(x) < a\}$ một tập có độ đo 0. Nhưng vì $f(x)$ đo được nên tập $\{f(x) < a\}$ đo được, do đó tập $\{g(x) < a\}$ cũng đo được. Vậy hàm số $g(x)$ đo được. ■

Như vậy, nếu μ là một độ đo đủ, việc thay đổi giá trị của hàm số trên một tập có độ đo 0 không làm ảnh hưởng tới tính đo được của hàm số.

Dưới đây ta phát biểu hai kết quả về hàm số đo được, mà không chứng minh. Bạn đọc có thể tham khảo chứng minh trong [5], tr. 111-113.

3.15 Định lý (Egorov). *Cho một dãy hàm số $f_n(x)$ đo được, hữu hạn h.k.n và hội tụ h.k.n trên một tập đo được A có độ đo $\mu(A) < +\infty$. Với mỗi $\varepsilon > 0$ luôn tồn tại một tập đo được $B \subset A$ sao cho $\mu(A \setminus B) < \varepsilon$ và dãy $f_n(x)$ hội tụ đều trên tập B.*

Như vậy, trên một tập có độ đo hữu hạn ta có thể "gọt bớt" đi một tập có độ đo nhỏ tuỳ ý để sự hội tụ trở thành hội tụ đều.

3.16 Định lý (Lusin). *Cho một tập $A \subset \mathbb{R}^k$ có độ đo $\mu(A) < +\infty$. Một hàm số $f(x)$ xác định và hữu hạn trên tập A là đo được khi và chỉ khi với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một tập đóng $F \subset A$ sao cho $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$ và $f(x)$ liên tục trên tập F.*

Từ định lý trên, ta thấy rằng, mặc dù hàm đo được rộng hơn hàm liên tục rất nhiều nhưng hàm đo được chỉ khác hàm liên tục trên một tập có độ đo không đáng kể.

§ 3. TÍCH PHÂN LEBESGUE CỦA HÀM ĐO ĐƯỢC KHÔNG ÂM

3/3.1 Định nghĩa và một số tính chất

Cho không gian độ đo bất kỳ $(X, \mathscr{F}, \mu)$ và một hàm f đo được không âm:

$$f : X \to [0, +\infty],$$

3.17 Định nghĩa. *Tích phân (Lebesgue) của $f(x)$ trên X đối với độ đo μ* là giá trị (hữu hạn hoặc vô hạn) sau:

$$\int_X f\,d\mu := \sup\left\{\int_X \varphi\,d\mu : 0 \leq \varphi \leq f, \text{hàm } \varphi \text{ là đơn giản không âm}\right\}.$$

Nếu f là hàm đo được không âm và $A \in \mathscr{F}$ thì $f\mathbf{1}_A$ cũng là hàm đo được không âm và ta sẽ định nghĩa *tích phân Lebesgue của f trên A đối với độ đo μ* là giá trị

$$\int_A f d\mu = \int_X f.\mathbf{1}_A\,d\mu.$$

Bổ đề sau cho thấy rằng tích phân Lebesgue có tính đơn điệu đối với cả hàm lấy tích phân và tập lấy tích phân.

3.18 Bổ đề. *a) Nếu các f, g là các hàm đo được không âm trên không gian độ đo $(X, \mathscr{F}, \mu)$ và $f \leq g$ thì*

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu. \tag{3.18}$$

b) Nếu f là hàm đo được không âm trên không gian độ đo $(X, \mathscr{F}, \mu)$ và $A, B \in \mathscr{F}$, $A \subset B$ thì

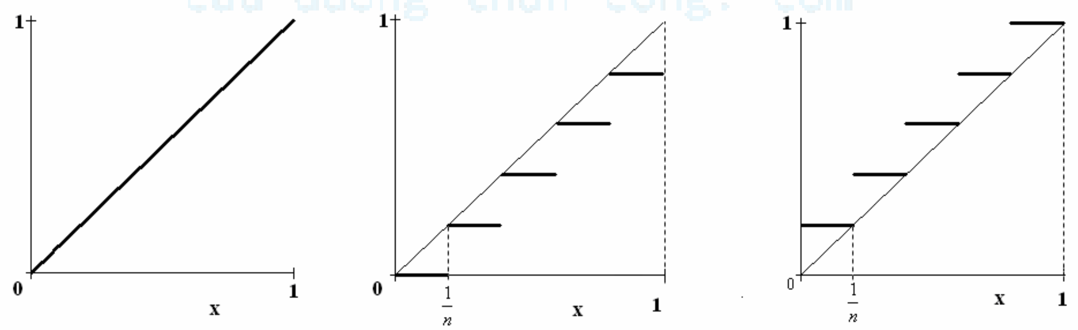
$$\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu.$$

Chứng minh. a) Nếu φ là hàm đơn giản không âm thỏa mãn $0 \leq \varphi \leq f$ thì $0 \leq \varphi \leq g$. Từ định nghĩa, ta suy ra (3.18).

b) Vì $f\mathbf{1}_A \leq f\mathbf{1}_B$, kết quả b) nhận được từ a). ■

Ví dụ 3.14. Xét không gian $X = [0,1], \mathscr{F} = \mathscr{B}[0,1], \mu = m$ và hàm số $f(x) = x$. Khi đó với $n \in \mathbb{N}$ bất kỳ ta xét hai hàm đơn giản sau:

$$f_n(x) = \frac{k}{n}, g_n(x) = \frac{k+1}{n} \text{ nếu } x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}), 0 \leq k < n.$$



Hàm $f(x) = x$ Hàm $f_n(x)$ Hàm $g_n(x)$

Dễ dàng thấy rằng $f_n(x) \le f(x) \le g_n(x)$, do đó $\int_X f_n(x)dm \le \int_X f(x)dm \le \int_X g_n(x)dm$. Ta tính được $\int_X f_n(x)dm = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n}\frac{1}{n} = \frac{n-1}{2n}$ trong khi $\int_X g_n(x)dm = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n}\frac{1}{n} = \frac{n+1}{2n}$. Vậy

$$\frac{n-1}{2n} \le \int_X f(x)dm \le \frac{n+1}{2n}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_X f(x)dm = \frac{1}{2}.$$

Định lý sau là một định lý quan trọng về tính hội tụ của tích phân Lebesgue.

3.19 Định lý (Định lý hội tụ đơn điệu 1 (Beppo - Levi)). *Nếu $\{f_n\}$ là dãy đơn điệu tăng các hàm đo được không âm hội tụ đến f trên không gian độ đo $(X, \mathscr{F}, \mu)$, thì*

$$\int_X f d\mu = \lim \int_X f_n d\mu. \tag{3.19}$$

Định lý hội tụ đơn điệu 1 chỉ hữu dụng khi xét sự hội tụ đối với tích phân của dãy các hàm đo được không âm *đơn điệu*. Trong khi đó, hệ quả sau của nó, được chứng minh bởi Pierre Fatou năm 1906 lại rất hữu ích khi nghiên cứu sự hội tụ đối với tích phân của dãy các hàm đo được không âm *bất kỳ*.

3.20 Định lý (Fatou). *Cho $\{f_n\}$ là dãy các hàm đo được, không âm. Khi đó $\int_X \underline{\lim} f_n d\mu \le \underline{\lim} \int_X f_n d\mu$.*

Chứng minh. Đặt $g_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, \dots\}$. Khi đó, $\{g_n\}$ là dãy hàm không âm đơn điệu tăng đến $\underline{\lim} f_n$: $g_m \le f_n, \forall m \le n$. Từ tính đơn điệu của tích phân, ta suy ra $\int_X g_m d\mu \le \int_X f_n d\mu, \forall m \le n$. Theo định lý về sự hội tụ đơn điệu, ta có

$$\int_X \underline{\lim} f_n d\mu = \underline{\lim} \int_X g_n d\mu \le \underline{\lim} \int_X f_n d\mu.$$

Bất đẳng thức trong Bổ đề Fatou có thể xảy ra dấu nhỏ hơn thực sự. Thật vậy, xét ví dụ sau.

Ví dụ 3.15. Xét dãy hàm đo được không âm trên không gian độ đo $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \mu)$:

$$f_m(x) = \begin{cases} m, & \text{nếu } 0 < x < \frac{1}{m}, \\ 0, & \text{trong trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Khi đó $\underline{\lim} f_m = \lim f_m = 0$ trong khi $\int_X f_n d\mu = 1$ với mỗi m, do vậy $\int_X \underline{\lim} f_n d\mu < \underline{\lim} \int_X f_n d\mu$.

Ví dụ này cũng cho thấy giả thiết đơn điệu trong định lý 3.19 không thể bỏ qua.

Như vậy sử dụng định nghĩa ban đầu ta dễ dàng chứng minh được tính đơn điệu và hội tụ của tích phân Lebesgue hàm đo được không âm. Rõ ràng mọi hàm đo được không âm đều là giới hạn của một dãy tăng các hàm đơn giản không âm. Do đó, theo định lý 3.19, tích phân của nó sẽ bằng giới hạn của dãy tích phân các hàm đơn giản không âm hội tụ tới nó. Điều đó trùng với nhận xét ban đầu của chúng ta. Sử dụng nhận xét đó, ta sẽ sớm đạt được một tính chất hết sức quan trọng từ tích phân Lebesgue của hàm đơn giản không âm mà chúng ta muốn bảo toàn, đó là tính chất cộng tính.

3/3.2 Tính chất cộng tính của tích phân Lebesgue

3.21 Định lý. *Cho f, g là các hàm đo được, không âm xác định trên không gian độ đo $(X, \mathscr{F}, \mu)$, số $c \geq 0$ bất kỳ, khi đó ta có:*

i) $\int_X cf d\mu = c \int_X f d\mu$.

ii) $\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$.

Chứng minh. i) Giả sử $\{f_n\}$ là dãy hàm đơn giản không âm hội tụ đến f. Khi đó $\{cf_n\}$ là dãy hàm đơn giản không âm hội tụ đến cf. Theo nhận xét trên, ta suy ra kết quả cần chứng minh.

ii) Thật vậy, giả sử $\{f_n\}$ và $\{g_n\}$ là các dãy hàm đơn giản, không âm, hội tụ đến f và g tương ứng. Khi đó ta có $\int_X (f_n + g_n) d\mu = \int_X f_n d\mu + \int_X g_n d\mu$. Ngoài ra, $f_n + g_n$ cũng là hàm đơn giản, không âm, hội tụ đơn điệu tăng đến $f+g$, nên từ đẳng thức trên cho $n \to \infty$ ta nhận được điều phải chứng minh. ■

Từ tính chất cộng tính của tích phân, kết hợp với tính hội tụ đơn điệu, ta rút ra một số hệ quả sau. Trước hết là tính cộng tính có thể mở rộng đối một số vô hạn đếm được các hàm đo được không âm.

3.22 Hệ quả. *Giả sử $\{g_n\}$ là một dãy các hàm đo được không âm bất kỳ trên không gian độ đo $(X, \mathscr{F}, \mu)$. Khi đó*

$$\int_X \Big(\sum_{n=1}^{\infty} g_n\Big) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int_X g_n d\mu\Big).$$

Chứng minh. Đặt $f_n = g_1 + \cdots + g_n$, sử dụng tính chất cộng tính của tích phân ta có

$$\int_X f_n d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_X g_i d\mu.$$

Mặt khác, dãy f_n là dãy các hàm đo được không âm, đơn điệu tăng tới $f := \sum_{n=1}^{\infty} g_n$, sử dụng Định lý hội tụ đơn điệu, ta có

$$\int_X \Big(\sum_{n=1}^{\infty} g_n\Big) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_X g_i d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int_X g_n d\mu\Big).$$

Hệ quả đã được chứng minh. ■

Như vậy nếu $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbf{1}_{A_i}$ với $a_i > 0, \forall i$ và các A_i rời nhau thì $\int_X f(x)d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mu(A_i)$.

Tích phân Lebesgue cũng có tính chất cộng tính đối với tập lấy tích phân như kết quả dưới đây.

3.23 Hệ quả. *Cho f là một hàm số đo được, không âm trên không gian độ đo $(X, \mathscr{F}, \mu)$, khi đó hàm số m_f xác định trên $\mathscr{F}$ bởi đẳng thức:*

$$m_f(A) = \int_A f d\mu \quad \forall A \in \mathscr{F}$$

là một độ đo.

Như vậy theo hệ quả trên ta có

$$\int_{\cup_{n=1}^{\infty} A_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu,$$

với A_n là các tập rời nhau thuộc $\mathscr{F}$.

3.24 Định lý. *Giả sử f là một hàm đo được, không âm. Khi đó $\int_X f d\mu = 0$ khi và chỉ khi $f = 0$ (h.k.n).*

3.25 Hệ quả. *Nếu f, g là các hàm đo được, không âm và $f = g$ (h.k.n) thì $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.*

Chứng minh. Đặt $A = \{x : f(x) \neq g(x)\}$. Theo giả thiết, ta có $\mu(A) = 0$. Từ đó suy ra

$$\int_X f d\mu = \int_A f d\mu + \int_{A^c} f d\mu = \int_{A^c} f d\mu = \int_{A^c} g d\mu = \int_X g d\mu.$$ ■

Định lý về sự hội tụ đơn điệu 1 vẫn còn đúng khi sự hội tụ là sự hội tụ h.k.n.

3.26 Hệ quả. *Giả sử $\{f_n\}$ là dãy hàm đo được không âm đơn điệu tăng, hội tụ h.k.n trên X đến hàm đo được không âm f. Khi đó*

$$\int_X f d\mu = \lim \int_X f_n d\mu.$$

§ 4. TÍCH PHÂN LEBESGUE CỦA HÀM ĐO ĐƯỢC BẤT KỲ

3/4.1 Khái niệm

Xét hàm số $f(x)$ bất kỳ đo được trên tập X. Ta biểu diễn

$$f = f^+ - f^-, \text{ trong đó } f^+ = \sup\{f, 0\}, f^- = \sup\{-f, 0\} \geq 0.$$

3.27 Định nghĩa. Nếu hiệu $\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$ có nghĩa (tức là không có dạng $\infty - \infty$) thì ta gọi nó là *tích phân (Lebesgue) của hàm f trên X*, và ký hiệu là $\int_X f(x)d\mu(x)$ (hoặc đơn giản là $\int_X f d\mu$):

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

(tích phân này có thể là hữu hạn hoặc vô hạn).

3.28 Định nghĩa. Nếu $\int_X f^{\pm} d\mu < \infty$ thì $\int_X f d\mu$ là một số hữu hạn và f được gọi là *khả tích trên X đối với độ đo μ.*

Tập hợp các hàm khả tích trên X được ký hiệu là $\mathscr{L}^1(X, \mathscr{F}, \mu)$ hay $\mathscr{L}^1(X)$.

3.29 Định nghĩa. Ta định nghĩa *tích phân của f trên tập $A \in \mathscr{A}$* như sau:

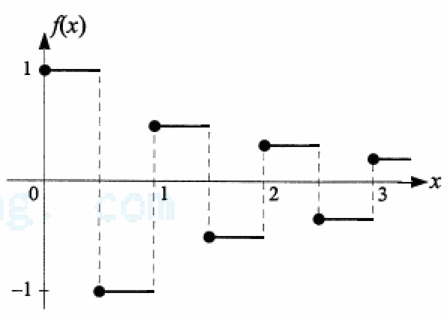
$$\int_A f d\mu := \int_X f \mathbf{1}_A d\mu.$$

Nếu tích phân trên tồn tại và hữu hạn thì ta nói *f khả tích trên tập A.*

Lẽ dĩ nhiên tồn tại những hàm đo được không khả tích. Thật vậy, xét ví dụ sau:

Ví dụ 3.16. Cho hàm số $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \text{ nếu } n - 1 \leq x < n - \frac{1}{2}, \\ -\dfrac{1}{n} \text{ nếu } n - \frac{1}{2} \leq x < n. \end{cases}$$



Gọi m là độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}$, khi đó theo định lý hội tụ đơn điệu $\int_{[0,n]} f^+(x)dm \to \int_{[0,\infty)} f^+(x)dm$ khi $n \to \infty$. Mà ta thấy

$$\int_{[0,n]} f^+(x)dm = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i} \to \infty$$

nên $\int_{[0,\infty)} f^+(x)dm = +\infty$. Tương tự $\int_{[0,\infty)} f^-(x)dm = +\infty$ nên không tồn tại $\int_{[0,\infty)} f(x)dm$.

Như vậy chúng ta đã định nghĩa đầy đủ về tích phân đối với hàm đo được. Đầu tiên chúng ta định nghĩa tích phân đối với các hàm đơn giản đo được, rồi mở rộng chúng đối với lớp các hàm đo được không âm. Để đạt được điều đó, chúng ta phải kết hợp định lý hội tụ đơn điệu và sự xấp xỉ một hàm đo được không âm bất kỳ bằng một dãy hàm đơn giản không âm. Cuối cùng chúng ta mở rộng khái niệm tích phân đối với hàm đo được bất kỳ bằng cách định nghĩa nó là hiệu của tích phân hai phần dương và âm của hàm số. Chú ý rằng mặc dù việc đưa ra tính chất đo được của một hàm số trên không gian đo được là nhằm mục đích tính tích phân nhưng không phải hàm đo được nào cũng có thể lấy tích phân được.

Ví dụ 3.17. Xét trường hợp không gian $(X, 2^X, \mu)$ với X là vô hạn đếm được : $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$.

Giả sử hàm đo được f trên $(X, 2^X, \mu)$ thoả mãn $\sum_{x\in X}^{\infty} |f(x)|\mu(x) < \infty$, khi đó ta có thể xác định $\int_X f(x)d\mu$.

Dựa vào nhận xét sau hệ quả 3.23 ta thấy nếu f là đo được không âm thì

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)\mu(x_i). \tag{3.29}$$

Ta sẽ chứng minh kết quả trên vẫn đúng nếu f là hàm đo được bất kỳ thoả mãn $\sum_{x\in X}^{\infty} |f(x)|\mu(x) < \infty$. Thật vậy, khi đó $\int_X f^+ d\mu$ và $\int_X f^- d\mu$ là hữu hạn nên đẳng thức (3.29) đúng với f^+ và f^-. Suy ra (3.29) đúng với mọi hàm $f = f^+ - f^-$.

Nếu $X = \mathbb{N}, \mu(n) = 2^{-n}, f(x) = x$. Khi đó

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2^{n-1}} - \frac{n+2}{2^n}\right) = 2.$$

3/4.2 Các tính chất cơ bản của tích phân

Chúng ta luôn giả thiết không gian độ đo là $(X, \mathscr{F}, \mu)$.

3.30 Mệnh đề. *Cho hàm số f đo được trên $(X, \mathscr{F}, \mu)$. Khi đó ta có:*

i) Nếu tích phân $\int_X f d\mu$ tồn tại thì $\left|\int_X f d\mu\right| \le \int_X |f| d\mu$.

ii) f khả tích khi và chỉ khi $|f|$ khả tích.

Chứng minh. i) Ta có

$$\int_X |f| d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu \ge \left|\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu\right| = \left|\int_X f d\mu\right|.$$

ii) Nếu f hoặc $|f|$ khả tích thì cả hai tích phân $\int_X f^{\pm} d\mu$ đều hữu hạn. Do đó tính khả tích của f kéo theo tính khả tích của $|f|$ và ngược lại. ■

Như vậy ta có $f \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{F}, \mu)$ tương đương với $|f| \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{F}, \mu)$.

3.31 Mệnh đề. *Nếu f, g là hai hàm đo được trong không gian độ đo $(X, \mathscr{F}, \mu)$ và $\int_X f\, d\mu$ và $\int_X g\, d\mu$ có nghĩa, khi đó*

$$f \leq g \text{ h.k.n thì } \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

Vì thế

$$f = g \text{ h.k.n thì } \int_X f d\mu = \int_X g d\mu.$$

Chứng minh. Trong trường hợp $f, g \geq 0$ thì bất đẳng thức là đúng.

Giả sử f, g là hai hàm đo được bất kỳ có tích phân trên X. Nếu $f \leq g$ h.k.n thì $f^+ \leq g^+$ h.k.n và $f^- \geq g^-$ h.k.n.

Khi đó ta có:

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \leq \int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu = \int_X g d\mu.$$

Nếu $f = g$ h.k.n thì $f \leq g \leq f$ h.k.n nên $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu \leq \int_X f d\mu$. Vậy $\int_X g d\mu = \int_X f d\mu$ ■

3.32 Hệ quả. *Nếu f khả tích trong $(X, \mathscr{F}, \mu)$ thì f hữu hạn h.k.n đối với độ đo μ.*

Chứng minh. Xét hàm g không âm, khả tích. Đặt $B = \{x \in X : g(x) = \infty\}$. Ta có:

$$g(x) \geq n\mathbf{1}_B(x) \quad \text{với mọi } x \in X.$$

Do đó:

$$n\mu(B) = \int_X n\mathbf{1}_B d\mu \leq \int g d\mu \quad \text{với mọi } n.$$

Suy ra: $\mu(B) = 0$.

Do f khả tích nên từ trên ta có $f^{\pm}$ hữu hạn h.k.n. Do đó f hữu hạn h.k.n. ■

3.33 Hệ quả. *Nếu hàm f là đo được và $A \in \mathscr{F}$ thoả mãn $\mu(A) = 0$ thì $\int_A f d\mu = 0$.*

Ví dụ 3.18. Cho hàm số sau xác định trên $[0, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} n \text{ nếu } x = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \ldots \\ x \text{ nếu } x \neq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Khi đó $f(x) = x$ hkn trên $[0, 1]$ theo độ đo Lebesgue nên $\int\limits_{[0,1]} f dm = \int\limits_{[0,1]} x dm = \dfrac{1}{2}$ (theo ví dụ 3.14).

Ngoài ra $m(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$ nên $\int\limits_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} f dm = 0$.

Tiếp theo, tính chất tuyến tính của tích phân vẫn được bảo toàn đối với hàm đo được bất kỳ.

3.34 Định lý. *(tính chất tuyến tính của tích phân) Giả sử hai hàm số f, g đo được trên $(X, \mathscr{F}, \mu)$ sao cho $\int_X f\, d\mu$ và $\int_X g\, d\mu$ có nghĩa, $\alpha \in \mathbb{R}$ bất kỳ. Khi đó:*

i) Tích phân $\int_X (\alpha f)\, d\mu$ có nghĩa và $\int_X (\alpha f) d\mu = \alpha \int_X f d\mu$.

ii) Nếu hàm g khả tích thì tích phân $\int_X (f+g) d\mu$ có nghĩa và

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

Nhận xét. Ta đã biết $\int_X f\ \mu = \int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu$, bây giờ nếu hàm đo được f là hiệu hai hàm khả tích không âm f_1, f_2 nào đó: $f = f_1 - f_2$ thì f cũng khả tích và ta cũng có

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f_1\, d\mu - \int_X f_2\, d\mu.$$

3.35 Mệnh đề. *Giả sử $A, B \in \mathscr{F}$; $A \cap B = \emptyset$, f là hàm đo được. Khi đó:*

i) Nếu $\int_{A\cup B} f d\mu$ tồn tại thì $\int_A f d\mu$ và $\int_B f d\mu$ cũng tồn tại, và

$$\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu \tag{*}$$

ii) Ngược lại, nếu tổng ở vế phải của (*) có nghĩa thì $\int_{A\cup B} f d\mu$ tồn tại và ta có (*).

3.36 Hệ quả. *Giả sử $A, B \in \mathscr{F}$, $B \subset A$ và f đo được trên A. Khi đó:*

i) Nếu $f \geq 0$ trên A thì $\int_B f d\mu \leq \int_A f d\mu$.

ii) Nếu $\int_A f d\mu$ tồn tại thì $\int_B f d\mu$ cũng tồn tại.

ii) Nếu f khả tích trên A thì f cũng khả tích trên B.

Chứng minh. i) là hiển nhiên.

ii) được suy từ mệnh đề 3.31.

Ta chứng minh ii): Do f khả tích trên A nên $\int_A f^{\pm} d\mu$ đều hữu hạn. Từ i) suy ra $\int_B f^{\pm} d\mu$ đều hữu hạn nên f khả tích trên B. ■

3.37 Hệ quả. *Nếu $\mu(B) = 0$ thì $\int_A f d\mu = \int_{A\cup B} f d\mu = \int_{A\setminus B} f d\mu$ (giả thiết 1 trong 3 tích phân tồn tại).*

Chú ý. Hệ quả trên cho thấy việc thay đổi giá trị của một hàm số trên một tập hợp có độ đo không thì tích phân của hàm số đó (nếu có) không thay đổi. Từ đó người ta có thể mở rộng định nghĩa hàm số đo được và tích phân như sau:

Giả sử f là hàm số đo được trên E, $E \subset A \in \mathscr{F}$ và $\mu(A \setminus E) = 0$. Khi đó ta vẫn nói rằng fđo được trên A (ở đây f có thể chỉ xác định hầu khắp nơi trên A).

Nếu f là hàm số đo được trên A theo nghĩa trên thì

$$\int_A f d\mu := \int_E f d\mu.$$

Các định lý về tích phân vẫn đúng nếu trong giả thiết một điều kiện nào đó xảy ra trên toàn bộ A được hạn chế bởi việc xảy ra hầu khắp nơi trên A.

3/4.3 Các định lý về giới hạn của tích phân

3.38 Định lý (Định lý hội tụ đơn điệu 2). *Cho $\{f_n\}$ là một dãy đơn điệu tăng (giảm) các hàm đo được trên không gian độ đo $(X, \mathscr{F}, \mu)$ và $\int_X f_1 d\mu > -\infty$ ($\int_X f_1 d\mu < +\infty$). Khi đó:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

Đẳng thức cũng nhận được trong trường hợp đặc biệt: $\{f_n\}$ là dãy đơn điệu các hàm đo được trên X và f là khả tích.

Chú ý. Ta không thể bỏ điều kiện $\int_X f_1 d\mu > -\infty$ cho dù có thể thay bằng $\int_X f_k d\mu > -\infty$ với $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Thật vậy, ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 3.19. Cho không gian độ đo $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ trong đó $\mu(\varnothing) = 0$ và $\mu(S) = \sum_{i\in S} \frac{1}{2^i}$ với $S \in \mathbb{N}$. Dãy hàm f_n xác định trên $\mathbb{N}$ như sau:

$$f_n(i) = -\frac{2^i}{n}.$$

Dễ dàng thấy dãy hàm f_n hội tụ đến 0 trong khi

$$\int_{\mathbb{N}} f_n d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} f_n(i)\mu(i) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m} = -\infty.$$

Như vậy rõ ràng $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n d\mu = -\infty \neq 0 = \int_{\mathbb{N}} \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu$

Sử dụng định lý hội tụ đơn điệu trên kết hợp với bổ đề Fatou về hàm đo được không âm, và tính chất tuyến tính quan trọng của tích phân ta sẽ chứng minh được các định lý hội tụ sau. Trước hết là định lý sau, nó thực chất là sự mở rộng của bổ đề Fatou cho trường hợp hàm đo được bất kỳ.

3.39 Định lý. *Giả sử $\{f_n\}$ là một dãy các hàm khả tích và tồn tại hàm g khả tích thỏa mãn $|f_n| \le g$ với mọi n. Khi đó ta có:*

$$\int_X \underline{\lim} f_n d\mu \le \underline{\lim} \int_X f_n d\mu \le \overline{\lim} \int_X f_n d\mu \le \int_X \overline{\lim} f_n d\mu.$$

3.40 Định lý (Định lý Lebesgue về hội tụ bị chặn (trội) 1). *Cho dãy hàm đo được f_n và g trên không gian độ đo $(X, \mathscr{F}, \mu)$. Giả sử $f_n \to f$ h.k.n , f đo được và $|f_n| \leq g$ h.k.n, $\forall n$, g là khả tích. Khi đó*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Nhận xét. Như vậy để kiểm tra xem giới hạn của một dãy tích phân các hàm đo được có bằng tích phân của hàm giới hạn hay không, ta có hai phương pháp. Trước hết nếu dãy là tăng (giảm), ta kiểm tra điều kiện của định lý hội tụ đơn điệu rồi sử dụng. Nếu không được hãy kiểm tra liệu giá trị tuyệt đối của dãy hàm này có bị chặn bởi một hàm khả tích hay không rồi áp dụng định lý hội tụ bị chặn.

Ví dụ 3.20. Xét tích phân $\int\limits_{[0,1]} xdm$. Ta thấy dãy hàm $f_n(x) = \frac{k}{n}$ nếu $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}), 0 \leq k < n$ thoả mãn $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$ nên dãy $f_n(x)$ hội tụ đến $f(x)$. Ngoài ra $f_n(x) \leq \mathbf{1}_{[0,1]}$ là hàm khả tích trên $[0,1]$ nên theo định lý hội tụ bị chặn 3.40 ta có

$$\int\limits_{[0,1]} f dm = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} f_n dm = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Kết quả này trùng với kết quả ta đã tính trước ở ví dụ 3.14.

Ví dụ 3.21. Xét dãy hàm $\sin^n(x)$ hội tụ tới hàm $\mathbf{1}_{\pi/2}$ với mọi $x \in [0,\pi]$. Ngoài ra $\sin^n x \leq \mathbf{1}_{[0,\pi]}$ là hàm khả tích trên $[0,\pi]$, do vậy theo định lý hội tụ bị chặn 3.40 :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\pi]} \sin^n(x) dm = \int_{[0,\pi]} \mathbf{1}_{\pi/2} dm = 0.$$

Ví dụ 3.22. Nếu bỏ tính chất bị chặn đi thì định lý 3.40 không còn đúng. Thật vậy xét dãy hàm số ở ví dụ 3.15 trong không gian độ đo $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), m)$:

$$f_m(x) = \begin{cases} m, & \text{nếu } 0 < x < \frac{1}{m}, \\ 0, & \text{trong trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Dễ thấy $f_m(x)$ hội tụ đến 0 trên $[0,1]$ trong khi $\int_{[0,1]} f dm = 1 \neq \int \int_{[0,1]} 0 dm$.

Tóm lại các định lý hội tụ đối với tích phân đòi hỏi các điều kiện sau:

- Với dãy hàm đo được không âm, trong khi điều kiện bị chặn dưới luôn được bảo đảm, phải thoả mãn là dãy hàm đơn điệu không giảm.
- Với dãy hàm đo được bất kỳ, nếu là dãy hàm đơn điệu không giảm thì phải bị chặn dưới, nếu là dãy hàm hội tụ thì phải bị chặn trên lẫn dưới.

Các định lý hội tụ không áp dụng được với tích phân Riemann. Chẳng hạn ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 3.23. Giả sử tập số hữu tỷ trong đoạn $[0,1]$ được liệt kê thành dãy sau: $Q \cap [0,1] = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Cho dãy hàm số $f_n(x)$ xác định như sau:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in \{x_1, \ldots, x_n\}; \\ 0 & \text{trong trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Khi đó dễ thấy dãy hàm đơn giản f_n đơn điệu không giảm, bị chặn và hội tụ tới hàm $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$. Tuy nhiên hàm này không khả tích Riemann.

§ 5. TÍCH PHÂN LEBESGUE TRÊN $\mathbb{R}$

Xét không gian độ đo Borel $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), m)$. Khi đó tích phân Lebesgue của hàm f trên $\mathbb{R}$ được ký hiệu như sau:

$$\int_{\mathbb{R}} f \, dm.$$

Tích phân lấy trên một tập $S \subset \mathbb{R}$ nào đó cũng được ký hiệu là

$$\int_S f \, dm.$$

Khi $S = [a,b]$, ta gọi đó là tích phân Lebesgue của hàm f trên đoạn $[a,b]$ và có thể ký hiệu như sau:

$$\int_a^b f \, dm = \int_{[a,b]} f \, dm.$$

Tập các hàm khả tích đối với độ đo Lebesgue trên $[a,b]$ (tức $\int_{[a,b]} f \, dm$ tồn tại hữu hạn) được ký hiệu là $\mathscr{L}^1[a,b]$.

Các định lý về tính tuyến tính cũng như hội tụ của tích phân vẫn đúng trên $\mathbb{R}$. Tuy nhiên để tính tích phân Lebesgue trên theo định nghĩa là không dễ. Chúng ta sẽ chỉ ra mối liên hệ giữa tích phân Riemann với tích phân Lebesgue, sau đó sử dụng định lý cơ bản trong tích phân (công thức Newton-Leibnitz) để tính ra kết quả.

3.41 Định lý. *Cho hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bị chặn. Khi đó ta có*

i) Hàm f khả tích Riemann nếu và chỉ nếu f liên tục hkn theo độ đo Lebesgue trên $[a,b]$.

ii) Hàm f khả tích Riemann thì cũng khả tích đối với độ đo Lebesgue trên $[a,b]$ và hai tích phân này là bằng nhau.

Ví dụ 3.24. $\int_{[0,1]} x dm = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 3.25. Xét hàm Diriclet sau trên $[0,1]$:

$$D(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ nếu } x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}; \\ 0 \text{ nếu } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ta sẽ chứng minh hàm số này liên tục tại các điểm vô tỷ thuộc đoạn $[0,1]$. Thật vậy, xét $x_0 \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ bất kỳ. Với mọi $\varepsilon > 0$, cần chỉ ra tồn tại $\delta > 0$ sao cho khi $|x - x_0| < \delta$ thì $|D(x) - D(x_0)| = D(x) < \varepsilon$.

Giả sử $1/\varepsilon < n_0 \in \mathbb{N}$, đặt $\delta = \min\left\{\frac{m}{n} - x_0 | m \le n \le n_0\right\}$. Khi đó nếu $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ thì hiển nhiên $D(x) = 0 < \varepsilon$. Nếu $x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ và $|x - x_0| < \delta$ thì rõ ràng $b > n_0$ nên $D(x) = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

Vậy hàm số này liên tục hkn trên $[0,1]$ (tập các điểm gián đoạn là $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ có độ đo 0) nên nó khả tích Riemann và cũng khả tích Lebesgue. Ta tính tích phân này như sau:

Do $D(x) = 0$ hkn trên $[0,1]$ nên $\int\limits_0^1 D(x)dx = \int\limits_{[0,1]} D(x)dm = \int\limits_{[0,1]} 0dm = 0$.

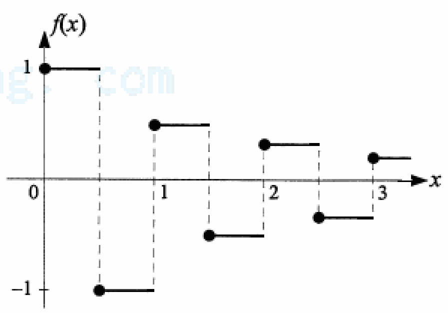
Mở rộng kết quả trên đối với các tích phân suy rộng ta có kết quả sau:

3.42 Định lý. *Giả sử hàm $f(x) \ge 0$ và tồn tại tích phân suy rộng $\int\limits_a^b f(x)dx$ (a, b có thể bằng vô hạn), khi đó f(x) khả tích Lebesgue trên $[a,b]$ và hai tích phân bằng nhau.*

Khi f nhận cả hai dấu trên $[a,b]$ thì có thể xảy ra tình huống $\int\limits_{[a,b]} f^+ dm$ và $\int\limits_{[a,b]} f^- dm$ đều bằng ∞ nên không khả tích Lebesgue trong khi vẫn có thể tồn tại tích phân Riemann suy rộng. Thật vậy ta xét lại ví dụ 3.16 sau.

Ví dụ 3.26. Cho hàm số $f(x)$ ở ví dụ 3.16:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{nếu } n-1 \le x < n - \frac{1}{2}, \\ -\dfrac{1}{n} & \text{nếu } n - \frac{1}{2} \le x < n. \end{cases}$$



Trước hết ta kiểm tra được $\int\limits_0^c f(x)dx = \dfrac{c - [c]}{n}$ với $n - 1 \le c < n - \frac{1}{2}$ và bằng $\dfrac{1 - c + [c]}{n}$ nếu $n - \frac{1}{2} \le c < n$. Do đó $\int\limits_0^\infty f(x)dx = \lim\limits_{c \to \infty} \int\limits_0^c f(x)dx = 0$ trong khi ta đã biết $f \notin \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.

Sự khác biệt cơ bản giữa tích phân Riemann và tích phân Lebesgue là phương thức lấy phân hoạch. Trong khi tích phân Riemann phân hoạch miền xác định của hàm số thành nhiều khoảng thì tích phân Lebesgue làm việc đó với *miền giá trị* của hàm số và xét tập các điểm trên miền xác định có giá trị của hàm số rơi vào một trong các khoảng đó. Chúng ta có thể so sánh hai cách lấy tích phân trong trường hợp tập $X \subset \mathbb{R}$ và f đo được không âm có tập giá trị đếm được . Nếu ta nhóm các phần tử có cùng giá trị qua f thành một tập rồi lấy độ đo của tập này nhân với giá trị đó ta sẽ được một số hạng dương. Tích phân Lebesgue chính là tổng chuỗi số dương này. Còn việc lấy tích phân Riemann, ta làm bằng cách chia tập X thành các phân hoạch rời nhau, lấy độ đo các phân hoạch này nhân với một giá trị *nào đó* trong tập giá trị của phân hoạch. Khi đó khi ta lấy tổng lại ta sẽ được một kết quả được hy vọng là *gần đúng* với tích phân. Rõ ràng cách làm trước có vẻ chính xác hơn so với cách thực hiện sau.

Sau đây chúng ta sẽ trình bày các ví dụ áp dụng các định lý hội tụ và sự liên hệ giữa hai tích phân này.

Ví dụ 3.27. Tính $\int_0^1 \frac{1}{1+x^{10}}dx$.

Trước hết ta thấy $\frac{1}{1+x^{10}} = 1 - x^{10} + x^{20} - x^{30} + \cdots$ với $\forall x \in [0,1]$. Ta đặt $g_j(x) = (1-x^{10})x^{20j}$ là các hàm không âm khả tích trên $[0,1]$. Áp dụng hệ quả (3.22) ta có

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^{10}}dx = \int_0^1 \sum_{j=0}^{\infty} g_j(x)dx = \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^1 g_j(x)dx = 1 - \frac{1}{11} + \frac{1}{21} - \frac{1}{31} + \cdots$$

Ví dụ 3.28. Tính $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x}dx$.

Trước hết ta thấy rằng dãy $f_n(x) = \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x} \to 0$ khi $n \to \infty$. Tuy nhiên để áp dụng được định lý hội tụ bị chặn, ta cần tìm một hàm g không âm khả tích trên $[0,\infty)$ sao cho $|f_n(x)| \le g(x), \forall x \in [0,\infty)$.

Ta thấy rằng $\ln y \le y$ với $y \ge 1$, do đó $\frac{\ln(x+n)}{n} \le \frac{x+n}{n} \le x+1 \le 2x$. Nếu $x < 1$, dễ thấy $\frac{\ln(x+n)}{n} \le 2$. Như vậy dãy hàm số f_n bị chặn bởi hàm g sau

$$g(x) = \begin{cases} 2xe^{-x} & \text{khi } x \ge 1, \\ 2e^{-x} & \text{khi } x < 1. \end{cases}$$

Hàm này khả tích trên $[0,\infty)$ (bạn đọc tự kiểm tra) nên sử dụng định lý hội tụ bị chặn ta có

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x}dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x}dm = 0.$$

§ 6. Hội tụ theo độ đo

3.43 Định nghĩa. Cho các hàm số $f_n(x)$, $(n = 1, 2, \dots)$ và $f(x)$ đo được. Ta nói dãy $f_n(x)$ *hội tụ theo độ đo* μ tới $f(x)$ và viết: $f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x)$ hoặc $f_n \to f$ *theo độ đo*, nếu

$$(\forall \varepsilon > 0) \lim_{n\to\infty} \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Ví dụ 3.29. Xét $X = [0, 1]$ và đặt:

$$g_1 = 1_X$$
$$g_2 = \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]} \quad g_3 = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1]}$$
$$g_4 = \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{4}]} \quad g_5 = \mathbf{1}_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]} \quad g_6 = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]} \quad g_7 = \mathbf{1}_{[\frac{3}{4},1]} \cdots$$

Khi đó dễ dàng thấy $\mu\{x : |f_n(x) - 0| \geq \varepsilon\} = 2^{-m}$ nếu $2^m \leq n < 2^{m+1}$.
Vậy $g_n(x)$ hội tụ theo độ đo tới 0.

Sau đây là liên hệ giữa hai khái niệm hội tụ theo độ đo và hội tụ hầu khắp nơi.

3.44 Định lý. *Giả sử độ đo μ là hữu hạn và các hàm f_n, f là đo được.*

C.1. Nếu $f_n \to f$ hkn thì $f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x)$.

C.2. Nếu $f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x)$ thì tồn tại một dãy con f_{n_k} hội tụ h.k.n tới $f(x)$.

Ví dụ 3.30. Xét dãy hàm g_n ở ví dụ 3.12. Dãy hàm này hội tụ đến 0 nên cũng hội tụ đến 0 theo độ đo Lebesgue. Thật vậy, ta xét

$$m\{|g_n - 0| > \varepsilon\} = m\{g_n(x) > \varepsilon\} = m[0, \frac{1}{n}] = \frac{1}{n} \to 0.$$

Ví dụ 3.31. Phần 1 của định lý trên không còn đúng nếu $\mu(X) = \infty$. Thật vậy, xét $X = \mathbb{R}$ và dãy hàm $f_n = \mathbf{1}_{[n,n+1]}$. Khi đó $f_n \to 0$ nhưng $\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 1$.

Ví dụ 3.32. Dãy hàm g_n được xây dựng ở ví dụ 3.29 hội tụ theo độ đo đến 0 nhưng không hội tụ hkn. Thật vậy, với mọi $x \in [0, 1]$ có vô số n để $g_n(x) = 1$. Tuy nhiên dãy con g_{2^m} lại hội tụ đến 0 hkn.

3.45 Định lý (Định lý Lebesgue về hội tụ bị chặn (trội) 2). *Giả sử dãy hàm đo được $f_n \xrightarrow{\mu} f$ trên không gian độ đo $(X, \mathscr{F}, \mu)$ và $|f_n| \leq g$, $\forall n$, g, f là các hàm đo được; g là một hàm số khả tích, khi đó*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

3.46 Hệ quả. *Nếu dãy hàm số đo được* $\{f_n\}$ *hội tụ h.k.n hoặc theo độ đo đến một hàm số đo được* f *trên không gian độ đo* $(X, \mathscr{F}, \mu)$, $\mu(X) < \infty$ *và* $|f_n| \le M$ *h.k.n trên* $X, \forall n$, M *là hằng số thì*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

BÀI TẬP

C.1. Trong ba hàm số ở bài tập B.26 chương 2, hàm nào là hàm đơn giản. Hãy biểu diễn các hàm đơn giản này ở dạng (3.1).

C.2. Hãy biểu diễn ở dạng (3.1) và tính tích phân Lesbegue của hàm đơn giản f trên miền X trong các trường hợp sau:

(a) $f(x) = \text{Int}(\sqrt{x}), X = [0, 10], \mu = m.$

(b) $f(x) = \text{Int}(2x), X = [0, 2], \mu = m.$

(c) $f(x) = \text{Int}(\sin x), X = [0, 2\pi], \mu = m.$

C.3. Giả sử μ_F và μ_G là hai độ đo Lebesgue-Stieltjes cảm sinh bởi các hàm số

$$F(s) = \begin{cases} s & \text{nếu } s \le 1, \\ 2 & \text{nếu } 1 < s \end{cases} \qquad G(t) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } t \le 2, \\ 2 & \text{nếu } 2 < t \le 3, \\ \frac{5t+1}{t+1} & \text{nếu } t > 3 \end{cases}$$

Cho $f = 2.\mathbf{1}_{[-1,1]} + 3.\mathbf{1}_{[2,3]}$, $\quad g = 4.\mathbf{1}_{(-\infty,1)} - 5.\mathbf{1}_{[1,2]} - 2.\mathbf{1}_{[3,\infty)}$.

Hãy xác định

a. $\int\limits_{\mathbb{R}} f d\mu_F$ b. $\int\limits_{\mathbb{R}} g d\mu_F$ c. $\int\limits_{\mathbb{R}} f d\mu_G$ d. $\int\limits_{\mathbb{R}} g d\mu_G$.

C.4. Cho không gian đo $(X, \mathscr{A})$ ở bài tập B.4 chương 2, hãy kiểm tra xem các hàm số sau có đo được không ?

$a) f_1(x) = \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]} + 2.\mathbf{1}_{(\frac{1}{2},1]}$ $\qquad b) f_2(x) = \mathbf{1}_{[0,1)} + 2.\mathbf{1}_{\{1\}}$

$c) f_3(x) = 3.\mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1)} - \mathbf{1}_{\{1\}}$ $\qquad d) f_4(x) = 2.\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2})} + \mathbf{1}_{(\frac{1}{2},1)}$

C.5. Cho không gian đo $(X, \mathscr{A})$ ở bài tập B.5 chương 2, hãy kiểm tra xem các hàm số sau có đo được không ?

$a) g_1(x) = \mathbf{1}_{\{0,1\}} - \mathbf{1}_{\{2,3\}}$ $\qquad b) g_2(x) = 2.\mathbf{1}_{\{0,3\}} + \mathbf{1}_{\{1,2\}}$

$c) g_3(x) = \mathbf{1}_{\{0\}} + 2.\mathbf{1}_{\{1,2\}}$ $\qquad d) g_4(x) = 3.\mathbf{1}_{\{1,3\}} + \mathbf{1}_{\{2\}}$

C.6*. Trong việc xây dựng các hàm đơn giản f_n với $f(x) \equiv x$ trên $[0, \infty)$ (định lý (3.12)), giá trị lớn nhất của f_3 bằng bao nhiêu? f_3 có bao nhiêu giá trị khác nhau trong miền giá trị của nó?

C.7. Nếu f là một hàm số đo được trong không gian $(X, \mathscr{F})$ thì hàm số

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \leq 1 \\ 1 & \text{nếu } f(x) > 1. \end{cases}$$

có đo được trên A không? Tại sao?

C.8. Chứng minh rằng, nếu hàm số $f(x)$ đo được trên $(X, \mathscr{F})$ thì hàm số $[f(x)]_a^b$ cũng đo được trên $(X, \mathscr{F})(X, \mathscr{F})$, trong đó $[f(x)]_a^b$, $(a < b)$ được xác định bởi

$$[f(x)]_a^b = \begin{cases} f(x) & \text{với các } x \text{ mà } a \leq f(x) \leq b, \\ b & \text{với các } x \text{ mà } f(x) > b, \\ a & \text{với các } x \text{ mà } f(x) < a. \end{cases}$$

C.9*. Cho $(X, \mathscr{A})$ là một không gian đo được và các tập E_n đo được không cần rời nhau, có hợp là X. Giả sử với mỗi n, f_n đo được trên E_n và với x bất kỳ thuộc $E_m \cap E_n$, m, n bất kỳ thì $f_m(x) = f_n(x)$. Đặt $f(x) := f_n(x)$ với $x \in E_n$ và n bất kỳ. Chứng minh f đo được.

C.10. Chứng minh tính đo được của hàm Riemann trên đoạn $[0, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{nếu } x = \dfrac{p}{q} \text{ là số hữu tỉ,} \\ 0 & \text{nếu } x \text{ là số vô tỉ.} \end{cases}$$

C.12. Cho dãy hàm $f_n(x) = \mathbf{1}_{[n,n+1)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với $n = 1, 2, \ldots$.

(a) Hãy tìm $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

(b) Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x)dm \neq \int\limits_{\mathbb{R}} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dm$.

(c) Giải thích xem giả thiết nào trong định lý hội tụ đơn điệu cũng như trong định lý hội tụ trội không được thoả mãn trong trường hợp này.

C.13. Cho $X = \mathbb{R}$ với σ-đại số $\mathscr{F}$ sinh bởi họ các khoảng $(n, n+1], n \in \mathbb{Z}$ với độ đo được gán như sau

$$\mu(n, n+1] = \frac{1}{n^2} \text{ với } |n| \geq 1, = 0 \text{ khi } n = 0.$$

Một hàm đo được f từ $(\mathbb{R}, \mathscr{F})$ vào $\mathbb{R}$ được xác định như sau: $f(x) = \mathrm{Int}(x)$. Chứng minh rằng không tồn tại $\int\limits_X f(x)d\mu$.

C.14*. Trong không gian $(X, \mathscr{F}, \mu)$, chứng minh rằng nếu $|f| \leq g$ (h.k.n), f đo được và g khả tích trên X thì f khả tích trên X.

C.15*. Sử dụng kết quả bài tập trên, chứng minh nếu f là một hàm số đo được và bị chặn h.k.n trên tập hợp X có độ đo hữu hạn thì f khả tích trên X.

C.16*. Sử dụng kết quả bài tập trên, chứng minh nếu f là một hàm số khả tích trên một tập hợp X, g là một hàm số đo được bị chặn h.k.n trên X thì fg là một hàm số khả tích trên X.

C.17*. Cho f là một hàm khả tích trên X đối với độ đo μ và đặt $A_n = \{x \in X : |f(x)| \geq n\}$. Chứng minh $n\mu(A_n) \to 0$.

C.18*. Cho $f_n \in \mathscr{L}^1(X)$ thoả mãn $f_n \geq 0, f_n(x) \to f_0(x), \forall x$ và $\int f_n d\mu \to \int f_0 d\mu < +\infty$. Chứng minh $\int |f_n - f_0| d\mu \to 0$.

Gợi ý: $(f_n - f_0)^- \leq f_0$; áp dụng định lý về sự hội tụ trội ta chỉ ra $\int (f_n - f_0)^- d\mu \to 0$.

C.19*. Xét không gian độ đo $(X, \mathscr{F}, \mu)$ và f là hàm thực đo được, sao cho $\int f^2 d\mu < \infty$. Cho dãy hàm đo được g_n hội tụ đến g đo được sao cho $|g_n(x)| \leq f(x), \forall x \in X$. Chứng minh rằng:

$$\int (g_n + g)^2 d\mu \to 4 \int g^2 d\mu < +\infty.$$

C.20*. Giả sử $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $f_n \geq 0$ và $\int f_n d\mu \to \int f d\mu < \infty$. Chứng minh rằng $\int |f_n - f| d\mu \to 0$.
Gợi ý: xem bài tập C.13 .

C.21. Cho $f_n := \mathbf{1}_{[0,n]}/n$. Hỏi có tồn tại hàm g khả tích (đối với độ đo Lebesgue) mà trội hơn mọi f_n?

C.22. Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ vô tỉ}, x \geqslant 1/4 \\ x, & x \text{ vô tỉ}, x \leqslant 1/4 \\ 10, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Tính tích phân Lebesgue của $f(x)$ trên đoạn $[0,1]$?

C.23. Tính tích phân Lebesgue $\int_{[0,1]} f(x) dm$ của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ vô tỉ}, \\ 1, & x \text{ hữu tỉ}. \end{cases}$$

C.24. Tính tích phân Lebesgue $\int_{[0,1]} f(x) dm$ của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{với } x \in F, \\ \frac{1}{\sqrt{x+1}}, & \text{với } x \notin F \end{cases}$$

trong đó F là tập bất kỳ có độ đo không.

C.25. Giả sử f là hàm số không bị chặn, khả tích Lebesgue trên $(X, \mathscr{F}, \mu)$. Đặt

$$[f]_n = \begin{cases} f & \text{nếu } |f| \le n, \\ 0 & \text{nếu } |f| > n. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X [f]_n d\mu$.

C.26*. Chứng minh $\int_0^1 n\cos x/(1+n^2x^{3/2})dx \to 0$ khi $n \to \infty$.

C.27. Tính tích phân Lebesgue: $\displaystyle\int\limits_{[1,2]} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dm$.

C.28. Cho hàm số $f(x) = n$ nếu $x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n+1})$ và bằng $-n$ nếu $x \in [\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n+2})$. Chứng minh rằng tồn tại tích phân Riemann suy rộng $\int\limits_0^1 f(x)dx = \lim\limits_{a\to 0} \int_a^1 f(x)dx$ nhưng không tồn tại $\int\limits_{[0,1]} f(x)dm$.

C.29. Cho hàm $f = \dfrac{d}{dx}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = \sin\frac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$. Chứng minh tồn tại tích phân Riemann suy rộng $\int_0^1 f(x)dx = \lim\limits_{a\to 0}\int_a^1 f(x)dx$ nhưng không tồn tại tích phân $\int\limits_{[0,1]} f(x)dm$.

C.30*. Trên đoạn $[0,1]$, xét các hàm

$$f_i^{(n)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in \left[\dfrac{i-1}{n}, \dfrac{i}{n}\right] \\ 0 & \text{nếu } x \notin \left[\dfrac{i-1}{n}, \dfrac{i}{n}\right] \end{cases}$$

Ta viết các hàm này dưới dạng một dãy hàm như sau:

$$\varphi_1(x) = f_1^{(1)}(x), \varphi_2(x) = f_1^{(2)}(x), \varphi_3(x) = f_2^{(2)}(x),$$
$$\varphi_4(x) = f_1^{(3)}(x), \varphi_5(x) = f_2^{(3)}(x), \varphi_6(x) = f_3^{(3)}(x), \dots$$

Hãy chứng minh dãy hàm $\varphi_n(x)$ hội tụ theo độ đo đến 0.

C.31. Với μ là độ đo đủ, hãy chứng minh: Nếu $f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x)$ và $f(x) \sim g(x)$ thì $f_n(x) \xrightarrow{\mu} g(x)$.

C.32. Chứng minh nếu $f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x)$ và $f_n(x) \xrightarrow{\mu} g(x)$ thì $f(x) \sim g(x)$.

C.33*. Cho dãy hàm f_n $(n = 1, 2, \dots)$ đo được không âm trong $(X, \mathscr{F}, \mu)$. Chứng minh rằng nếu $\int_X f_n d\mu \to 0$ thì $f_n \to 0$ theo độ đo μ.

Phụ Lục

Chứng minh của một số định lý

Chứng minh (**Chứng minh của định lý 3.3).** Xét $A_i = A_i \cap X = A_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^m B_j\right) = \bigcup_{j=1}^m \left(A_i \cap B_j\right)$; trong đó các tập $A_i \cap B_j, (j = 1, 2, \ldots, m)$ đôi một rời nhau.

Vì thế
$$\sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n a_i \Big(\sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j)\Big) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a a_i \mu(A_i \cap B_j).$$
Tương tự,
$$\sum_{j=1}^m b_j \mu(B_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_j \mu(A_i \cap B_j).$$
Nếu $A_i \cap B_j = \varnothing$ thì $\mu(A_i B_j) = 0$, còn nếu $A_i \cap B_j \neq \varnothing$ thì với $x \in A_i \cap B_j$ ta có $f(x) = a_i = b_j$, suy ra $a_i = b_j$. ■

Chứng minh (**Chứng minh của định lý 3.19).** Do f là giới hạn của một dãy hàm đo được không âm nên f là hàm đo được, không âm. Vì $f_n \leq f_{n+1} \leq f$ nên theo bổ đề 3.18 ta có
$$\int_X f_n d\mu \leq \int_X f_{n+1} d\mu \leq \int_X f d\mu, \forall n \in \mathbb{N}.$$
Do vậy
$$\lim \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu.$$

Để chứng minh bất đẳng thức ngược lại, ta lấy α là số thực thỏa mãn $0 < \alpha < 1$ và φ là hàm đơn giản thỏa mãn $0 \leq \varphi \leq f$. Đặt
$$A_n = \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}.$$
Khi đó, $A_n \in \mathscr{F}, A_n \subset A_{n+1}$ và $X = \bigcup A_n$. Dựa vào kết quả của bổ đề 3.18, ta nhận được
$$\int_{A_n} \alpha\varphi d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu. \tag{3.46}$$
Vì dãy $\{A_n\}$ đơn điệu tăng và có hợp là X, theo tính chất của độ đo, ta có
$$\int_X \varphi d\mu = \lim \int_{A_n} \varphi d\mu.$$
Khi đó, bằng cách lấy giới hạn theo n, từ công thức (3.46), ta nhận được
$$\alpha \int_X \varphi d\mu \leq \lim \int_X f_n d\mu.$$
Điều này đúng với mọi α thỏa mãn $0 < \alpha < 1$, cho α tiến tới 1 ta có
$$\int_X \varphi d\mu \leq \lim \int_X f_n d\mu.$$
Hơn nữa, vì φ là hàm đơn giản không âm bất kỳ thỏa mãn $0 \leq \varphi \leq f$ nên
$$\int_X f d\mu = \sup_{\varphi} \int_X \varphi d\mu \leq \lim \int_X f_n d\mu.$$
Như vậy, ta nhận được đẳng thức cần chứng minh. ■

Chứng minh (**Chứng minh của hệ quả 3.23).** Rõ ràng $m_f(A) \geq 0, \forall A \in \mathscr{F}$. Ta lại có $f.\mathbf{1}_\varnothing \equiv 0$ nên $m_f(\varnothing) = \int_\varnothing f d\mu = \int_X f\mathbf{1}_\varnothing d\mu = \int_X 0 d\mu = 0$.

Cuối cùng, ta phải kiểm tra tính σ-cộng tính của m_f. Giả sử $A_n \in \mathscr{F}$ $(n = 1, 2, \dots)$ rời nhau từng đôi một. Ta có $\mathbf{1}_{\cup_{n=1}^\infty A_n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}$. Áp dụng hệ quả (3.22) suy ra

$$m_f\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big) = \int_X f\mathbf{1}_{\cup_{n=1}^\infty} d\mu = \int_X \sum_{n=1}^\infty f\mathbf{1}_{A_n} d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_X f\mathbf{1}_{A_n} d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} f d\mu = \sum_{n=1}^\infty m_f(A_n).$$

Vậy m_f là một độ đo trên $\mathscr{A}$. ■

Chứng minh (**Chứng minh của định lý 3.24).** 1) *Điều kiện cần.* Giả sử $\int_X f d\mu = 0$. Ta cần chỉ ra $f = 0$ (h.k.n).

Đặt $A = \{x : f(x) \neq 0\}$; $B_n = \{x : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$. Ta có: $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ và $A = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$.

Theo giả thiết:

$$0 = \int_X f d\mu = \int_{B_n} f d\mu + \int_{B_n^c} f d\mu \geq \int_{B_n} f d\mu \geq \int_{B_n} \frac{1}{n} d\mu = \frac{1}{n}\mu(B_n).$$

Vì thế $\mu(B_n) = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Từ đó suy ra A là hợp đếm được các tập có độ đo 0 nên A cũng có độ đo 0 hay $f = 0$ (h.k.n).

2) *Điều kiện đủ.* Giả sử $f = 0$ (h.k.n).

Nếu $A = \{x : f(x) > 0\}$ thì $\mu(A) = 0$. Đặt $f_n = n\mathbf{1}_A$. Khi đó, $f \leq \underline{\lim} f_n = \infty\mathbf{1}_A$. Từ bổ đề Fatou ta nhận được

$$0 \leq \int_X f d\mu \leq \int_X \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n d\mu.$$

Nhưng $\int_X f_n d\mu = n\mu(A) = 0$. Từ đó suy ra $\int_X f d\mu = 0$. ■

Chứng minh (**Chứng minh của hệ quả 3.26).** Giả sử $N \in \mathscr{A}, \mu(N) = 0$ và $f_n \to f$ trên $M = X \setminus N$. Khi đó $f_n\mathbf{1}_M \to f\mathbf{1}_M$ trên X. Theo định lý hội tụ đơn điệu, ta có

$$\int_X f\mathbf{1}_M d\mu = \lim \int_X f_n\mathbf{1}_M d\mu.$$

Ngoài ra,

$$\int_X f\mathbf{1}_N d\mu = \int_X f_n\mathbf{1}_N d\mu = 0.$$

Vì $f = f\mathbf{1}_M + f\mathbf{1}_N; f_n = f_n\mathbf{1}_M + f_n\mathbf{1}_N$, ta suy ra

$$\int_X f d\mu = \int_X f\mathbf{1}_M d\mu = \lim \int_X f_n\mathbf{1}_M d\mu = \lim \int_X f_n d\mu.$$

Chứng minh (**Chứng minh của định lý 3.34).** i) Ta đã biết điều này đúng với hàm f là đo được không âm trên X và $\alpha \geq 0$.

Với hàm f như giả thiết, kết quả này hiển nhiên đúng khi $\alpha = 0$. Nếu $\alpha > 0$ thì $(\alpha f)^\pm = \alpha f^\pm$. Suy ra

$$\int_X (\alpha f)^+ d\mu - \int_X (\alpha f)^- d\mu = \alpha\Big[\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu\Big] =,$$

nên tích phân $\int_X (\alpha f)\, d\mu$ có nghĩa và bằng $\alpha \int_X f d\mu$.

Còn nếu $c < 0$ thì $(cf)^{\pm} = (-c) f^{\mp}$, ta chứng minh tương tự.

ii) Đầu tiên, ta chú ý rằng phân tích $f = f^+ - f^-$ là theo nghĩa "cực tiểu", tức là: nếu $f = h - g$ với $h, g \geq 0$ thì $f^+ \leq h$ và $f^- \leq g$. Thật vậy, $f = h - g \leq h$ do đó $f^+ = \sup(f, 0) \leq h$ và $f = h - g \geq -g$ do đó $-f \leq g$ và $f^- = \sup(-f, 0) \leq g$.

Theo giả thiết, do $\int_X f\, d\mu$ có nghĩa nên khi đó hoặc $\int_X f^+ d\mu$ hữu hạn hoặc $\int_X f^- d\mu$ hữu hạn. Giả sử $\int_X f^- d\mu$ hữu hạn. Hiển nhiên do g khả tích nên $\int_X g^+ d\mu$ và $\int_X g^- d\mu$ đều hữu hạn. Khi đó f^-, g^- đều hữu hạn h.k.n trên X, do đó $f = f^+ - f^- > -\infty$, $g = g^+ - g^- > -\infty$ nên $f + g$ xác định h.k.n trên X.

Đặt $h = f + g$. Ta có $h^- \leq f^- + g^-$. Do đó h^- hữu hạn h.k.n trên X và

$$\int_X h^- d\mu \leq \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu < \infty.$$

Do f^-, g^-, h^- đều hữu hạn trên X nên từ

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

suy ra

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+.$$

Như vậy

$$\int_X h^+ d\mu + \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu = \int_X h^- d\mu + \int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu.$$

Do $\int_X f^- d\mu$, $\int_X g^- d\mu$ và $\int_X h^- d\mu$ đều hữu hạn nên chuyển vế đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Trường hợp $\int_X f^+ d\mu$ hữu hạn được chứng minh tương tự. ■

Chứng minh (**Chứng minh của mệnh đề 3.35).** Trường hợp f là đo được , không âm trên $A \cup B$ ta đã có:

$$\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.$$

Trường hợp f là hàm đo được bất kỳ trên $A \cup B$ và tồn tại $\int_{A\cup B} f d\mu$. Khi đó $f^{\pm}$ là các hàm đo được, không âm trên $A \cup B$. Theo kết quả trên ta có:

$$\int_{A\cup B} f^+ d\mu = \int_A f^+ d\mu + \int_B f^+ d\mu \tag{3.46}$$

$$\int_{A\cup B} f^- d\mu = \int_A f^- d\mu + \int_B f^- d\mu \tag{3.46}$$

Vì $\int_{A\cup B} f d\mu$ tồn tại nên ít nhất một trong 2 tích phân $\int_{A\cup B} f^+ d\mu$ và $\int_{A\cup B} f^- d\mu$ hữu hạn. Chẳng hạn $\int_{A\cup B} f^- d\mu$ hữu hạn. Từ (3.46) ta suy ra cả hai tích phân $\int_A f^- d\mu$ và $\int_B f^- d\mu$ hữu hạn. Như vậy $\int_A f d\mu$ và $\int_B f d\mu$ đều tồn tại. Trừ (3.46) cho (3.46) ta nhận được (*).

Điều ngược lại, nếu tổng vế phải của (*) có nghĩa thì $\int_A f^+ d\mu + \int_B f^+ d\mu$ hoặc $\int_A f^- d\mu + \int_B f^- d\mu$ là hữu hạn. Từ (3.46) và (3.46) ta suy ra $\int_{A\cup B} f^+ d\mu$ hoặc $\int_{A\cup B} f^- d\mu$ là hữu hạn. Vậy $\int_{A\cup B} f d\mu$ tồn tại. ■

Chứng minh (**Chứng minh của định lý 3.38).** Xuất phát từ giả thiết $-g \le f_n \le g$. Trước tiên, ta xét các hàm $f_n + g \ge 0$. Áp dụng định lý Fatou, ta có

$$\int_X \underline{\lim}(f_n+g)d\mu \le \underline{\lim}\int_X (f_n+g)d\mu \quad \text{hay} \quad \int_X \underline{\lim}\, f_n d\mu + \int_X g d\mu \le \underline{\lim}\int_X f_n d\mu + \int_X g d\mu.$$

Do g khả tích, $0 \le \int_X g d\mu < +\infty$ nên ta suy ra

$$\int_X \underline{\lim}\, f_n d\mu \le \underline{\lim}\int_X f_n d\mu.$$

Tiếp theo, xét các hàm $g - f_n \ge 0$. Ta có

$$\int_X \underline{\lim}(g-f_n)d\mu \le \underline{\lim}\int_X (g-f_n)d\mu.$$

Từ đó chú ý rằng $\underline{\lim}(-f_n) = -\overline{\lim}\, f_n$, ta suy ra $\overline{\lim}\int_X f_n d\mu \le \int_X \overline{\lim}\, f_n d\mu$. ■

Chứng minh (**Chứng minh của định lý 3.39).** Ta xét trường hợp hàm đơn điệu tăng, $\int_X f_1 d\mu > -\infty$ nên $\int_X f_1^- d\mu < \infty$. Do đó f_1^- hữu hạn h.k.n. Bằng cách thay đổi giá trị của hàm f_1^- trên tập $B \in \mathscr{F}$, $\mu(B) = 0$ (nếu cần) ta có thể coi f_1^- hữu hạn trên X. Vì $f_n^- \le f_1^-$ nên $\{f_n + f_1^-\}$ là một dãy đơn điệu tăng những hàm số đo được không âm. Theo định lý hội tụ đơn điệu 3.19, ta có

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu + \int_X f_1^- d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty}(f_n + f_1^-)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X (f_n+f_1^-)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu + \int_X f_1^- d\mu.$$

Do $\int_X f_1^- d\mu < \infty$ ta có thể cộng hai vế với $\int_X f_1^- d\mu$ để nhận được đpcm.

Trường hợp dãy hàm đơn điệu tăng, ta nhận được kết quả cần chứng minh nhờ việc đổi dấu các hàm số. ■

Chứng minh (**Chứng minh của định lý 3.40).** Vì g khả tích nên do $f_n \le g$, h.k.n, $\forall n$ ta suy ra f_n khả tích. Nếu cần ta có thể thay đổi giá trị các hàm số f_n trên tập có độ đo không để có f_n hữu hạn, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ và $|f_n| \le g$ h.k.n.

Vì $|f_n| \le g$ nên $f_n + g \ge 0$ và $g - f_n \ge 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Cho $n \to \infty$ ta được $|f| \le g$ h.k.n nên f khả tích.

Áp dụng bổ đề Fatou cho 2 dãy $\{f_n \pm g\}$ ta được tương ứng

$$\int_X (f \pm g)d\mu = \int_X \underline{\lim}_{n\to\infty}(f_n \pm g)d\mu \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_X (f_n \pm g)d\mu.$$

Trừ hai vế của các bất đẳng thức trên cho $\int_X g d\mu$ ta được

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu \ge \int_X f d\mu \tag{3.46}$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu \le \int_X f d\mu \tag{3.46}$$

Do $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$ tồn tại nên ta có đpcm. ■

Chứng minh (**Chứng minh của định lý 3.44).** 1. Đặt $B = \{x : f_n(x) \nrightarrow f(x)\}$. Xét ε là một số dương tuỳ ý. Nếu $\forall n, \exists k : |f_{n+k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon$ thì rõ ràng $x \in B$, cho nên

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \{|f_{n+k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset B,$$

do đó,

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \{|f_{n+k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Đặt tiếp $E_n = \cup_{k=1}^{\infty} \{|f_{n+k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ ta thấy rằng

$$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset \ldots$$

và vì $\mu(E_1) < +\infty$ nên $\mu(\cap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$, do đó $\mu\{|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \leq \mu(E_n) \to 0$. Như vậy, $f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x)$.

2. Theo giả thiết $f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x)$, lấy $n_1 = 1$ ta có thể chọn một dãy $n_k > n_{k-1}$ sao cho

$$\mu\{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\} < 2^{-k}.$$

Đặt $A_i = \cup_{k=i}^{\infty} \{|f_{n_k} - f| \geq \frac{1}{k}\}$. Khi đó $\mu(A_i) \leq \sum_{k=i}^{\infty} \mu\{|f_{n_k} - f| \geq \frac{1}{k}\} < \sum_{k=i}^{\infty} 2^{-k} = 2^{1-k}$. Xét tập hợp sau

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

có độ đo nhỏ hơn A_i với mọi i nên từ đó suy ra $\mu(A) = 0$. Nếu $x \notin A$ thì có một số i sao cho $x \notin A_i$, tức là với mọi $k \geq i$: $|f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$. Điều này có nghĩa là $f_{n_k}(x) \to f(x)$, với mọi $x \in A^c$. Vậy $f_{n_k} \to f$ hkn. ■

Chứng minh (**Chứng minh của định lý 3.45).** Giả sử a là giới hạn riêng của dãy $\{\int_X f_n d\mu\}$ (*). Khi đó tồn tại dãy con $\{f_{n_k}\}$ của dãy hàm số $\{f_n\}$ sao cho $\lim_{k\to\infty} \int_X f_{n_k} d\mu = a$. Vì dãy hàm số $\{f_{n_k}\} \xrightarrow{\mu} f$ nên tồn tại một dãy con $\{f_{n_{k_j}}\}$ của nó hội tụ h.k.n đến f. Vì $|f_{n_{k_j}}| \leq g$ h.k.n, theo định lý trên ta suy ra $\lim_{j\to\infty} \int_X f_{n_{k_j}} d\mu = \int_X f d\mu$, do đó $\lim_{j\to\infty} \int_X f_{n_{k_j}} d\mu = a$. Vậy $a = \int_X f d\mu$ là giới hạn riêng duy nhất của dãy (*). Từ đó suy ra dãy (*) hội tụ đến $\int_X f d\mu$. ■

CHƯƠNG 4

TÍCH PHÂN STIELTJES

Có thể thấy tích phân Lebesgue của hàm đo được f được tính khá dễ dàng trong trường hợp tập giá trị của f là đếm được. Tuy nhiên, nếu tập giá trị của f là các khoảng trong $\mathbb{R}$ (tập không đếm được) thì tính tích phân Lebesgue bằng định nghĩa sẽ khó hơn nhiều. Để giải quyết vấn đề này, chúng ta sẽ xem xét mối liên hệ giữa tích phân Lebesgue và một loại tích phân được gọi là tích phân Stieltjes, cũng như cách chuyển tích phân Stieltjes về tích phân Riemann cổ điển.

Từ bây giờ cho đến hết mục chúng ta sẽ luôn xét một đoạn $[a, b]$ cố định trong đó $a < b$.

§ 1. CÁC KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT

4/1.1 Khái niệm tích phân Stieltjes

Cho hai hàm số φ và F xác định và hữu hạn trên $[a, b]$. Ta chia đoạn $[a, b]$ bởi các điểm chia

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

trong đó $n \in \mathbb{N}$ nào đó và gọi họ tập hợp $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ là một *phân hoạch* của $[a, b]$, ký hiệu là $\mathbb{P}$. Giá trị lớn nhất trong số chiều dài các khoảng $[a_{i-1}, a_i]$ của $\mathbb{P}$ được gọi là *bán kính* của $\mathbb{P}$, ký hiệu $d(\mathbb{P})$.

Ta lấy các điểm $\xi_i \in [a_{i-1}, a_i], i = 1, \ldots, n$ bất kỳ và gọi tổng sau

$$R_{\mathbb{P}} = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)[F(a_i) - F(a_{i-1})]$$

là một tổng Riemann-Stieltjes đối với $\mathbb{P}$.

Bây giờ chúng ta chuyển đến định nghĩa chính của mục này.

4.1 Định nghĩa. Cho φ, F là hai hàm số xác định và bị chặn trên $[a,b]$. Ký hiệu $\mathbb{P}$ là phân hoạch của $[a,b]$ và lấy các điểm $\xi_i \in [a_{i-1}, a_i]$ bất kỳ. Giả sử tồn tại giới hạn hữu hạn

$$I = \lim_{d(\mathbb{P})\to 0} R_{\mathbb{P}},$$

theo nghĩa với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|I - R_{\mathbb{P}}| < \varepsilon$ với mọi $\mathbb{P}$ thoả mãn $d(\mathbb{P}) < \delta$ thì I được gọi là *tích phân (Riemann-)Stieltjes* của hàm số φ với hàm F và ký hiệu là $\int\limits_a^b \varphi(t)dF(t)$ hoặc $\int\limits_a^b \varphi dF$.

Nếu tích phân $\int\limits_a^b \varphi dF$ tồn tại, ta sẽ nói φ là *khả tích Stieltjes* với độ đo F hoặc F *- khả tích*.

Nhận xét. Dễ dàng chứng minh được hàm φ là F- khả tích có tích phân là I tương đương với khẳng định sau: với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|R_{\mathbb{P}} - I| < \varepsilon$ với mọi phân hoạch $\mathbb{P}$ thoả mãn $d(\mathbb{P}) < \delta$.

Nếu bạn nhớ lại định nghĩa của tích phân Riemann thì rõ ràng cách xây dựng nên tích phân Stieltjes cũng được áp dụng ở đây. Trong khi với tích phân Riemann, độ đo của một khoảng con $[a_{i-1}, a_i]$ thuộc $[a,b]$ bằng chiều dài của nó $a_i - a_{i-1}$ thì đối với tích phân Stieltjes, độ đo của một khoảng con $[a_{i-1}, a_i]$ là bằng $F(a_i) - F(a_{i-1})$. Nói cách khác tích phân Riemann là trường hợp đặc biệt của tích phân Stieltjes.

Khi ta thay hàm số $F(t)$ trong định nghĩa của tích phân Stieltjes bằng hàm số $F(t) = t$ và hàm số φ là t - khả tích thì φ được gọi là *khả tích Riemann*. *Tích phân Riemann* của φ khi đó được ký hiệu $\int\limits_a^b \varphi(t)dt$.

Trước khi xét các ví dụ sau, ta nhắc lại hàm chỉ tiêu $\mathbf{1}_S$ với $S \subset \mathbb{R}$ là hàm số

$$\mathbf{1}_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in S, \\ 0 & \text{trong trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Ví dụ 4.1. Xét trường hợp $\varphi(t) = 1, \forall t \in \mathbb{R}$, F xác định và hữu hạn trên $[a,b]$. Khi đó tổng $\sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i)[F(a_i) - F(a_{i-1})] = F(b) - F(a)$ với mọi phân hoạch $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ nên $\int\limits_a^b dF = F(b) - F(a)$.

Ví dụ 4.2. Cho $F = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1]}$ và $\varphi = \mathrm{id}_{[0,1]}$.

Với mọi $\varepsilon > 0$, ta chọn một phân hoạch $\mathbb{P}$ bất kỳ của $[0,1]$ sao cho $d(\mathbb{P}) < \varepsilon$. Khi đó

$$\frac{1}{2} + \varepsilon > R_{\mathbb{P}} \geq \frac{1}{2} - \varepsilon,$$

cho nên hàm số φ là F- khả tích. Do $\varepsilon > 0$ là tùy ý, ta dễ dàng suy ra

$$\int_0^1 \varphi dF = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 4.3. Cho $F = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1]} = \varphi$. Khi đó ta có với phân hoạch $\mathbb{P}$ bất kỳ không chứa $\frac{1}{2}$ thì $R_{\mathbb{P}} = 1$ nếu chọn một ξ_i nào đó nhỏ hơn $\frac{1}{2}$, bằng 0 nếu chọn ξ_i nào đó bằng $\frac{1}{2}$. Vậy không tồn tại tích phân Stieltjes $\int_0^1 \varphi dF$.

Sau đây chúng ta sẽ bàn đến trong trường hợp nào thì φ là F-khả tích cũng như liên hệ giữa tích phân Stieltjes với tích phân Riemann.

4/1.2 Hàm số có biến phân bị chặn và hàm số liên tục tuyệt đối

Cho hàm số $F(t)$ xác định trên đoạn $[a, b]$ và phân hoạch $\mathbb{P}$ nào đó của đoạn $[a, b]$ gồm n điểm chia :

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b.$$

Ký hiệu $v(\mathbb{P})$ là tổng sau:

$$v(\mathbb{P}) = \sum_{i=1}^{n} |F(a_{i-1}) - F(a_i)|. \tag{4.1}$$

4.2 Định nghĩa. *Biến phân toàn phần (biến phân)* của $F(t)$ trên đoạn $[a, b]$ là cận trên đúng tập tất cả các giá trị $v(\mathbb{P})$, ký hiệu là

$$\operatorname*{var}_{[a,b]}(F) = \sup_{\mathbb{P}} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} |F(a_{i+1}) - F(a_i)| \right\}. \tag{4.2}$$

4.3 Định nghĩa. Hàm số $F(t)$ được gọi là có *biến phân bị chặn (hay biến phân giới nội)* nếu $\operatorname*{var}_{[a,b]}(F) < \infty$.

Ví dụ 4.4. Dễ dàng thấy hàm hằng số $F(t) = C$ có biến phân bằng 0 trên $[a, b]$.

Ta có thể chứng minh điều ngược lại cũng đúng tức nếu hàm số $F(t)$ có biến phân bằng 0 trên $[a, b]$ thì $F(t)$ là hằng số.

Thật vậy nếu $F(t)$ không là hằng số tức tồn tại $a_1 < a_2 \in [a, b]$ sao cho $F(a_1) \neq F(a_2)$ thì ta chỉ cần chọn phân hoạch $\mathbb{P}$ gồm a, a_1, a_2, b thì

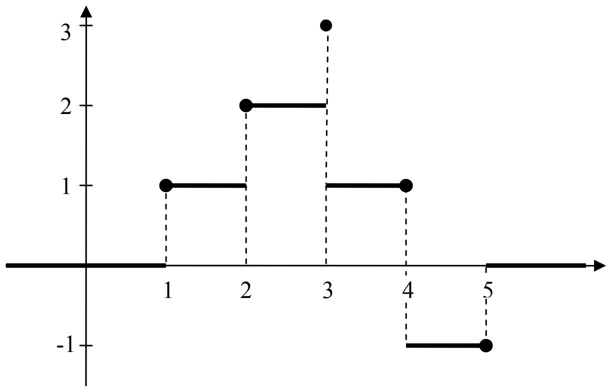
$$v(\mathbb{P}) = |F(a_1) - a| + |F(a_2) - F(a_1)| + |F(b) - F(a_2)| \geq |F(a_2) - F(a_1)| > 0$$

nên $\operatorname*{var}_{[a,b]}(F) > 0$.

Ví dụ 4.5. Cho F là hàm bước nhảy sau trên $[a,b]$: $F(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathbf{1}_{[a_i, a_{i+1}]}$. Khi đó người ta chứng minh được $\underset{[a,b]}{\text{var}}(F) = \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha_{i+1} - \alpha_i|$.

Chẳng hạn cho hàm F sau xác định trên $\mathbb{R}$

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } t < 1, \\ 1, & \text{nếu } 1 \le t < 2, \\ 2, & \text{nếu } 2 \le t < 3, \\ 3, & \text{nếu } t = 3, \\ 1, & \text{nếu } 3 < t \le 4, \\ -1, & \text{nếu } 4 < t \le 5, \\ 0, & \text{nếu } t > 5. \end{cases}$$



Khi đó $\underset{[1,4]}{\text{var}}(F) = 1 + 1 + 2 + 2 = 6$.

Nhận xét.
- Một hàm số đơn điệu không giảm bất kỳ $F(t)$ có biến phân bị chặn, vì tổng (4.1) của nó luôn bằng $F(b) - F(a)$, bất kể chia đoạn $[a,b]$ như thế nào.

  Như vậy hiển nhiên hàm đơn điệu không tăng cũng có biến phân bị chặn.

- Do $\underset{[a,b]}{\text{var}}(F \pm G) \le \underset{[a,b]}{\text{var}}(F) + \underset{[a,b]}{\text{var}}(G)$, nên tổng hay hiệu của hai hàm số có biến phân bị chặn thì cũng có biến phân bị chặn. Nói riêng thì hiệu của hai hàm số đơn điệu không giảm có biến phân bị chặn. Điều ngược lại cũng đúng như được chỉ ra ở định lý 4.7 dưới đây.

4.4 Định lý. *Nếu $F(t)$ thoả mãn điều kiện Lipschitz: tồn tại hằng số C sao cho $|F(u) - F(v)| < C|u - v|, \forall u, v \in [a,b]$ thì $F(t)$ có biến phân bị chặn trên $[a,b]$.*

Chứng minh. Thật vậy, giả sử $F(t)$ thoả mãn điều kiện Lipschitz thì với phân hoạch $\mathbb{P}$ bất kỳ ta có

$$v(\mathbb{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} |F(a_{i+1}) - F(a_i)| \le |C \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)| \le |C(b-a)|.$$

Do đó tập $\{v(\mathbb{P})\}$ bị chặn nên $F(t)$ có biến phân bị chặn. ∎

4.5 Hệ quả. *Nếu hàm số $F(t)$ xác định và liên tục trên $[a,b]$, có đạo hàm bị chặn trên (a,b) thì $F(t)$ có biến phân bị chặn.*

Chứng minh. Nếu $F(t)$ có đạo hàm bị chặn bởi $C > 0$ thì theo định lý Lagrange, với mọi $u, v \in [a,b]$ bất kỳ, tồn tại ξ sao cho

$$|F(u) - F(v)| = |F'(\xi)(u - v)| \le C|u - v|.$$

4.6 Hệ quả. *Nếu hàm số $F(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[a,b]$ thì $F(t)$ có biến phân bị chặn.*

Ví dụ 4.6. Hàm số

$$F(t) = \begin{cases} t^2 \sin\frac{1}{t}, & \text{nếu } t \neq 0, \\ 0, & \text{nếu } t = 0 \end{cases}$$

xác định và liên tục trên $[0,1]$, có đạo hàm bị chặn trên $[0,1]$.

Do vậy hàm số $F(t)$ có biến phân bị chặn.

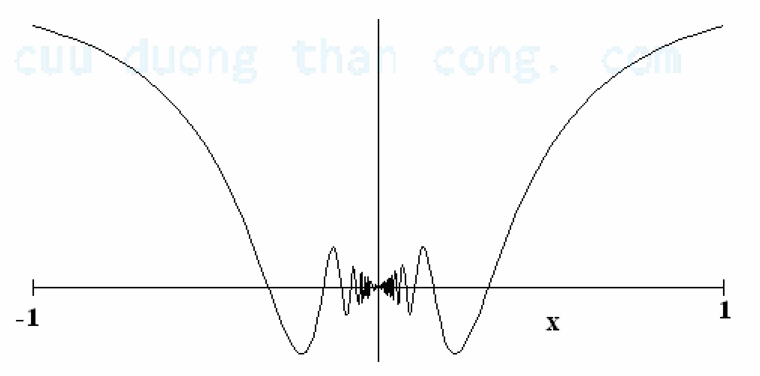
Dĩ nhiên các tính chất bị chặn, liên tục hoặc thậm chí khả vi trên (a,b) chưa đủ để khẳng định một hàm số có biến phân bị chặn.

Ví dụ 4.7. Hàm số

$$F(t) = \begin{cases} t \sin\frac{1}{t}, & \text{nếu } t \neq 0, \\ 0, & \text{nếu } t = 0 \end{cases}$$

liên tục trên đoạn $[0,1]$ nhưng không có biến phân bị chặn trên đoạn đó.

Thật vậy, chỉ cần xét dãy $a_n = \frac{2}{n\pi}$.



Định lý sau đây cho biết dấu hiệu của hàm có biến phân bị chặn:

4.7 Định lý. *Một hàm số $F(t)$ có biến phân bị chặn khi và chỉ khi nó là hiệu của hai hàm số đơn điệu không giảm.*

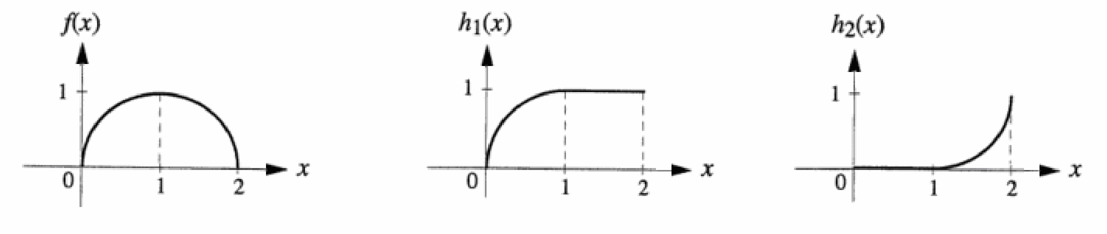
Ví dụ 4.8. Chứng minh hàm số sau có biến phân bị chặn trên [-1,1]:

$$F(t) = \sqrt{1-t^2}.$$

Giải: Trước hết ta thấy hàm $F(t)$ không đơn điệu trên toàn bộ đoạn $[-1,1]$ và cũng không có đạo hàm bị chặn. Do đó chúng ta cần áp dụng định lý 4.7.

Xét hai hàm số sau

$$h_1(t) = \begin{cases} \sqrt{1-t^2}, & \text{nếu } -1 \leq t < 0, \\ 1, & \text{nếu } 0 \leq t \leq 1, \end{cases}; \qquad h_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } -1 \leq t < 0, \\ 1-\sqrt{1-x^2}, & \text{nếu } 0 \leq t \leq 1, \end{cases}$$



Dễ dàng thấy $F(t) = h_1(t) - h_2(t), \forall t \in [-1, 1]$ là hiệu hai hàm đơn điệu không giảm.

Dưới đây là những ứng dụng quan trọng của hàm có biến phân bị chặn.

4.8 Định lý. *Mọi hàm có biến phân bị chặn trên đoạn $[a, b]$ đều có đạo hàm hữu hạn hầu khắp nơi trên đoạn đó.*

Khẳng định ngược lại của định lý trên là không đúng. Chẳng hạn hàm số $f(t) = t.\sin\frac{1}{t}$ có đạo hàm hữu hạn h.k.n trên đoạn $[0, 1]$ nhưng không có biến phân bị chặn.

4.9 Hệ quả. *Giả sử hàm F khả tích Lebesgue trên $[a, b]$, khi đó hàm*

$$F(t) = \int_a^t f dm$$

có biến phân bị chặn trên $[a, b]$.

Chứng minh. Ta thấy $F(t) = \int_a^t f dm = \int_a^t f^+ dm - \int_a^t f^- dm = F_1(t) - F_2(t)$. Dễ dàng kiểm tra được hai hàm $F_1(t), F_2(t)$ là đơn điệu không giảm nên $F(t)$ là hàm có biến phân bị chặn. ■

Theo định lý 4.8, hàm $F(t) = \int_a^t f dm$ có đạo hàm h.k.n và đạo hàm đó chính là $f(t)$.

4.10 Định lý. *Cho hàm f khả tích Lebesgue trên $[a, b]$, khi đó*

$$\frac{d}{dt}\int_a^t f dm = f(t) \quad h.k.n.$$

Chúng ta hy vọng có thể thiết lập công thức

$$\int_a^t F' dm = F(t) - F(a) \text{ hay } F(t) = \int_a^t F' dm + F(a). \tag{4.10}$$

Lẽ dĩ nhiên khi đó hàm $F(t)$ có biến phân bị chặn nhưng điều đó là chưa đủ để công thức (4.10) đúng. Thật vậy ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 4.9. Cho hàm F(t) sau xác định trên [0,2]:

$$F(t) = \mathbf{1}_{[1,2]} = \begin{cases} 0 \text{ nếu } 0 \le t < 1; \\ 1 \text{ nếu } 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Dễ thấy F(t) có biến phân bị chặn và $F' = 0$ hkn nhưng $\int_0^2 F' dm = 0 \ne F(2) - F(0)$.

Lớp các hàm thoả mãn (4.10) sẽ là lớp con của lớp hàm có biến phân bị chặn và được định nghĩa dưới đây.

4.11 Định nghĩa. Một hàm số $F(t)$ được gọi là *liên tục tuyệt đối* trên đoạn $[a,b]$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước đều tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi họ khoảng $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ rời nhau trong $[a,b]$:

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}|F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon.$$

Ví dụ 4.10. Hàm số t^2 liên tục tuyệt đối trên $[a,b]$. Thật vậy giả sử $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$ suy ra

$$\sum_{i=1}^{n}|b_i^2 - a_i^2| = \sum_{i=1}^{n}|b_i - a_i||b_i + a_i| \le (|a| + |b|)(\sum_{i=1}^{n}|b_i - a_i|) < (|a| + |b|)\delta.$$

Vậy với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, chỉ cần chọn $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a| + |b|}$.

Có thể dễ dàng chỉ ra hàm đã liên tục tuyệt đối cũng sẽ liên tục trên $[a,b]$. Ta cũng đã biết hàm liên tục chưa chắc có biến phân bị chặn (ví dụ 4.7), tuy nhiên ta vẫn có kết quả sau.

4.12 Định lý. *Hàm $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục tuyệt đối trên $[a,b]$ thì cũng có biến phân bị chặn trên $[a,b]$.*

Hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$ chưa chắc đã liên tục tuyệt đối trên đoạn đó.

Ví dụ 4.11.

$$F(t) = \begin{cases} t\sin\frac{1}{t} & \text{nếu } t \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } t = 0 \end{cases}$$

liên tục trên đoạn $[0,1]$ nhưng không liên tục tuyệt đối. Thật vậy, bằng cách chọn $n, m \in \mathbb{N}$, xét dãy $x_k = \frac{2}{(n+k)\pi}$ có tổng $\sum_{k=1}^{m}|x_{k+1} - x_k|$ nhỏ tùy ý nhưng tổng $\sum_{k=1}^{m}|F(x_{k+1}) - F(x_k)|$ có thể lớn tùy ý.

Ta sử dụng một số dấu hiệu đơn giản sau đây để nhận biết hàm liên tục tuyệt đối:

4.13 Định lý. *Hàm $F(t)$ thỏa mãn một trong các điều kiện sau sẽ liên tục tuyệt đối trên đoạn $[a,b]$:*

1) $F(t)$ liên tục và đơn điệu trên $[a,b]$.

2) $F(t)$ liên tục trên $[a,b]$ và có đạo hàm bị chặn trên khoảng (a,b).

Định lý tiếp theo chỉ ra sự đồng nhất giữa hàm liên tục tuyệt đối và hàm cận trên.

4.14 Định lý. *Giả sử hàm f khả tích Lebesgue trên $[a,b]$, khi đó*

$$F(t) = \int_a^t f dm$$

liên tục tuyệt đối trên $[a,b]$. Ngược lại ta cũng có nếu F là liên tục tuyệt đối trên $[a,b]$, thì F' là khả tích trên $[a,b]$ và

$$F(t) = \int_a^t F' dm.$$

4/1.3 Các tính chất cơ bản của hàm khả tích Stieltjes

Chúng ta sẽ thấy tích phân Stieltjes và tích phân Riemann có nhiều tính chất chung. Việc chứng minh chúng được vào định nghĩa tích phân Stieltjes.

Trong mục này chúng ta sẽ luôn giả sử là hàm φ, F bị chặn trên $[a,b]$.

Tính chất 4.1.1. Nếu φ là F-khả tích trên $[a,b]$ và $c \in [a,b]$ thì trên $[a,c]$ và $[c,b]$, φ cũng F - khả tích. Khi đó ta có

$$\int_a^b \varphi dF = \int_a^c \varphi dF + \int_c^b \varphi dF.$$

Tích phân Stieltjes cũng có tính chất rất quan trọng như của tích phân Riemann, đó là tính chất tuyến tính đối với biểu thức lấy tích phân. Cụ thể ta có tính chất sau.

Tính chất 4.1.2. Giả sử hai hàm số φ và ψ là F khả tích trên $[a,b]$ và $k \in \mathbb{R}$ bất kỳ, khi đó ta có

$$\int_a^b (k\varphi + \psi) dF = k \int_a^b \varphi dF + \int_a^b \psi dF.$$

Tính chất 4.1.3. Nếu hàm φ là F và G - khả tích trên $[a,b]$ thì φ cũng là $(F+G)$ - khả tích trên $[a,b]$ và ta có

$$\int_a^b \varphi d(F+G) = \int_a^b \varphi dF + \int_a^b \varphi dG.$$

Kết quả sau rất hữu dụng, nó được gọi là *công thức tích phân từng phần*.

Tính chất 4.1.4. Nếu hàm số φ là F khả tích trên $[a,b]$ thì ta có F cũng là φ khả tích trên $[a,b]$ và

$$\int_a^b \varphi dF = F(b)\varphi(b) - F(a)\varphi(a) - \int_a^b F d\varphi.$$

Định lý tiếp theo sẽ chỉ ra một lớp các hàm khả tích Stieltjes.

4.15 Định lý. *Nếu φ là liên tục và F có biến phân bị chặn trên $[a,b]$ thì tồn tại $\int_a^b \varphi dF$. Hơn nữa*

$$\left| \int_a^b \varphi dF \right| \le \sup_{[a,b]} |\varphi| \operatorname*{var}_{[a,b]} (F).$$

Kết hợp định lý với tính chất 4.1.4 (công thức tích phân từng phần), ta thấy rằng chỉ cần một trong hai hàm φ hoặc F là liên tục, hàm kia có biến phân bị chặn trên $[a, b]$ thì sẽ tồn tại tích phân $\int_a^b \varphi dF$.

Nếu chỉ dựa vào định nghĩa không dễ tính được tích phân Stieltjes. Trên thực tế chúng ta phải tìm cách chuyển tích phân Stieltjes về tích phân Riemann. Nếu làm được điều đó, chúng ta có thể sử dụng các công thức tích phân Riemann quen thuộc, giúp cho việc thực hành dễ dàng hơn rất nhiều. Chắc chắn không phải lúc nào chúng ta cũng chuyển được tích phân Stieltjes về tích phân Riemann, tuy nhiên đối với một trường hợp rất quan trọng và hay gặp thì chúng ta lại làm được điều đó.

4.16 Định lý. *Với φ là liên tục và F liên tục tuyệt đối trên $[a, b]$, khi đó*

$$\int_a^b \varphi dF = \int_a^b \varphi F' dx.$$

Ví dụ 4.12. Cho hàm số $\varphi(t) = t$ và $F(t) = t^2$, khi đó ta có:

$$\int_a^b td(t^2) = \int_a^b t(2t)dt = \frac{2(b-a)}{3}.$$

Tích phân này có thể tính bằng định nghĩa. Tuy nhiên, nếu làm như vậy gần như chúng ta phải chứng minh định lý 4.16.

Chú ý. Mặc dù $\int_a^b \varphi dF$ tồn tại khi F có biến phân bị chặn và F' tồn tại h.k.n nhưng định lý 4.16 không đúng khi F chỉ thoả mãn điều kiện có biến phân bị chặn. Chẳng hạn với trường hợp đơn giản khi $\varphi = 1$, ví dụ 4.9 đã chỉ ra tồn tại hàm F có biến phân bị chặn nhưng $\int_a^b dF \neq \int_a^b F' dx$.

Áp dụng định lý 4.16 và định nghĩa của tích phân Stieltjes, ta có thể tính tích phân Stieltjes với điều kiện của F được giảm "nhẹ" như trong định lý sau.

4.17 Định lý. *Cho φ là hàm liên tục và F là hàm bị chặn trên $[a, b]$, F liên tục và có đạo hàm bị chặn trên (a, b). Khi đó:*

$$\int_a^b \varphi(t)dF = \varphi(a).[F(a^+) - F(a)] + \int_a^b \varphi(t)F'(t)dt + \varphi(b)[F(b) - F(b^-)].$$

Ví dụ 4.13. Cho hàm số

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t \leq 0, \\ 3 - 2e^{-t} & \text{nếu } 0 < t \leq 1, \\ 10 - 4e^{-t} & \text{nếu } t > 1. \end{cases}$$

Ta thấy trên đoạn $[0,1]$ hàm $F(t)$ thỏa mãn điều kiện của định lý 4.17 nên

$$\int_0^1 e^t dF = e^0[F(0^+) - F(0)] + \int_0^1 e^t F'(t)dt + e^1[F(1) - F(1^-)] = 1 + 2 + 0 = 3.$$

Chú ý rằng do $F(t)$ liên tục trái tại 1 nên số hạng thứ 3 trong tổng có thể không viết ra.

Tích phân $\int_0^2 e^t dF$ sẽ được tính như sau:

$$\begin{aligned}\int_0^2 e^t dF &= \int_0^1 e^t dF + \int_1^2 e^t dF \\ &= 3 + e^1[F(1+) - F(1)] + \int_1^2 e^t F'(t)dt = 3 + e(7 - \frac{2}{e}) + 4 = 5 + 7e.\end{aligned}$$

Tiếp theo, chúng ta có thể định nghĩa tích phân Stieltjes suy rộng như sau:

4.18 Định nghĩa. Nếu φ và F xác định trên (a,b) thì

$$\int_a^b \varphi dF := \lim_{\substack{a' \to a+ \\ b' \to b-}} \int_{a'}^{b'} \varphi dF \quad \text{(nếu giới hạn này tồn tại).}$$

Ngoài ra

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi dF := \lim_{\substack{a' \to -\infty \\ b' \to \infty}} \int_{a'}^{b'} \varphi dF \quad \text{(nếu giới hạn này tồn tại).}$$

Chúng ta có thể định nghĩa tương tự tích phân trên $[a,b), (-\infty,b)$, v.v.

Định lý 4.16 được mở rộng trong trường hợp tích phân suy rộng như sau.

4.19 Định lý. *Với φ là liên tục và F đơn điệu không giảm, liên tục tuyệt đối trên đoạn $[a,b] \subset \mathbb{R}$ bất kỳ, khi đó*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi dF = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi F' dt.$$

§ 2. LIÊN HỆ GIỮA TÍCH PHÂN LEBESGUE VÀ TÍCH PHÂN STIELTJES

Cho f là một hàm đo được trên không gian độ đo $(X, \mathscr{F}, \mu)$. Hàm F được xác định trên $\mathbb{R}$ bởi công thức

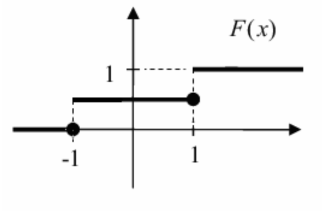
$$F(t) = \mu\{x \in X : f(x) < t\}$$

được gọi là *hàm phân phối* của hàm đo được f.

Ta có thể kiểm tra được $F(t)$ là một hàm không âm, đơn điệu không giảm và liên tục trái trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $F(-\infty) = 0$.

Ví dụ 4.14. Xét hàm F xác định bởi:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } t \le -1, \\ \frac{1}{2}, & \text{nếu } -1 < t \le 1, \\ 1, & \text{nếu } t > 1. \end{cases}$$



Khi đó $F(t)$ là hàm phân phối của hàm đo được f trên X thoả mãn $\mu\{x : f(x) = 1\} = \mu\{x : f(x) = -1\} = \frac{1}{2}$, $\mu(X) = 1$.

Nếu định nghĩa $\mu_F([a,b)) = \mu\{x \in X : a \le f(x) < b\}$ thì rõ ràng $\mu_F([a,b)) = F(b) - F(a)$ hay μ_F là độ đo Lebesgue - Stieltjes cảm sinh bởi hàm F.

Định lý sau cho chúng ta mối liên hệ giữa tích phân Lebesgue với tích phân Stieltjes.

4.20 Định lý. *Giả sử $(X, \mathscr{F}, \mu)$ là không gian độ đo hữu hạn; hàm f đo được, hữu hạn h.k.n trên X và có hàm phân phối là F. Khi đó*

$$\int_{a \le f(x) < b} f d\mu = \int_a^b t dF.$$

Trong định lý trên, hàm f được tính tích phân trên tập mà ở đó f bị chặn, hạn chế đó được loại bỏ trong định lý sau bằng cách sử dụng tích phân Stieltjes ruy rộng.

4.21 Định lý. *Nếu một trong hai tích phân $\int_X f d\mu$ hoặc $\int_{-\infty}^{\infty} t dF$ tồn tại, hữu hạn thì tích phân còn lại cũng tồn tại, hữu hạn. Khi đó, hai tích phân bằng nhau:*

$$\int_X f d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} t dF.$$

Các kết quả trên tiếp tục được mở rộng đối với dạng tích phân $\int_X \varphi(f) d\mu$ trong đó φ là hàm liên tục. Nhớ lại rằng hợp của hàm liên tục với hàm đo được sẽ là hàm đo được.

4.22 Định lý. *Giả sử $(X, \mathscr{F}, \mu)$ là không gian độ đo hữu hạn; hàm f đo được, hữu hạn h.k.n trên X và có hàm phân phối là F; φ là hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$. Khi đó*

$$\int_{a \le f(x) < b} \varphi(f(x)) d\mu = \int_a^b \varphi(t) dF.$$

Trường hợp đặc biệt khi φ liên tục trên $(-\infty, \infty)$ đồng thời $\varphi(f)$ khả tích trên X thì tích phân $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi dF$ tồn tại và

$$\int_X \varphi(f(x)) d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dF.$$

Khi φ là hàm liên tục, không âm thì đẳng thức trên luôn đúng mà không cần giả thiết $\varphi(f)$ khả tích trên X.

Như vậy chúng ta đã có các kết quả liên hệ giữa các tích phân Lebesgue, Stieltjes và Riemann. Sử dụng chúng, ta có thể tính được tích phân Lebesgue mà ở đó hàm đo được f có tập giá trị là những khoảng trong $\mathbb{R}$. Áp dụng định lý 4.17, ta lại có thể chuyển tích phân Stieltjes về tích phân Riemann thông thường. Trong trường hợp đó, ta thấy xuất hiện hàm $F'(t)$. Nếu hàm phân phối $F(t) = \int_{-\infty}^{t} F'(u)du$ thì $F'(t)$ còn được gọi là *hàm mật độ* của hàm f.

Ví dụ 4.15. Trên không gian độ đo $(X, \mathscr{F}, \mu)$, xét hàm đo được f có hàm phân phối F ở dạng sau:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} \phi(u)du.$$

Ở đây $\phi(t) = \frac{d}{dt}F(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$ chính là *hàm mật độ* của hàm f.

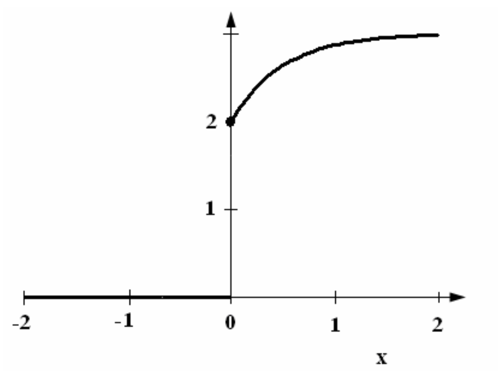
Ta có

$$\int_X f d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} t dF = \int_{-\infty}^{\infty} t\phi(t)dt = \int_0^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Tương tự, xét hàm $\varphi(t) = e^{\lambda t}$ liên tục, không âm. Sử dụng định lý 4.22 ta có

$$\int_X e^{\lambda f} d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} dF = \int_0^{\infty} e^{\lambda t}\lambda e^{-\lambda t}dt = \infty.$$

Ví dụ 4.16. Cho hàm f đo được trên $(X, \mathscr{F}, \mu)$ với hàm phân phối $F = (3 - e^{-2t})\mathbf{1}_{(0,\infty)}$, hãy tính $\int_X e^f d\mu$.



Theo định lý 4.22, ta có:

$$\begin{aligned} \int_X e^f d\mu &= \int_{-\infty}^{\infty} e^t dF = \int_{-\infty}^{0} e^t.0.dt + e^0[F(0^+) - F(0)] + \int_0^{\infty} e^t(3 - e^{-2t})'dt \\ &= 2 + \int_0^{\infty} 2.e^{-t}dt = 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

4.23 Định nghĩa. Xét $f(x) = x$, $\varphi(t)$ khả tích trên $\mathbb{R}$ và hàm F đơn điệu không giảm trên $\mathbb{R}$. Khi đó tồn tại độ đo μ_F cảm sinh bởi hàm F thoả mãn $\mu_F(x < t) = \mu(-\infty, t) = F(t) - F(-\infty)$. Ta gọi tích phân $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)d\mu_F$ là *tích phân Lebesgue-Stieltjes* của hàm φ.

Nhận thấy rằng F là hàm phân phối của hàm f đối với độ đo μ_F. Dựa vào định lý 4.22, ta có hệ quả sau liên hệ tích phân Lebesgue - Stieltjes với tích phân Stieltjes.

4.24 Hệ quả. *Nếu hàm $\varphi(t)$ liên tục h.k.n theo độ đo Lebesgue trên $[a,b]$, hàm F bị chặn, không giảm và liên tục trái thì*

$$\int\limits_{[a,b)} \varphi(t)d\mu_F = \int_a^b \varphi(t)dF.$$

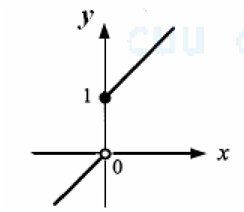
Ví dụ 4.17. Cho hàm số $F(t)$ được xác định như sau

$$F(t) = \begin{cases} t & \text{nếu } t \leq 0, \\ t+1 & \text{nếu } t > 0, \end{cases}$$

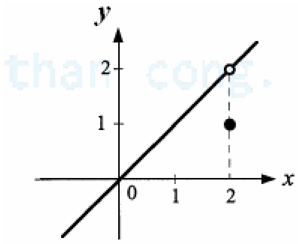
và hai hàm

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} t & \text{nếu } t \neq 2, \\ 1 & \text{nếu } t = 2, \end{cases} \qquad \varphi_2(t) = \begin{cases} t & \text{nếu } t \neq 0, \\ 1 & \text{nếu } t = 0, \end{cases}$$

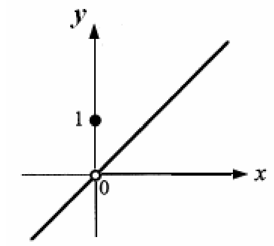
Hãy lần lượt tính các tích phân Lebesgue - Stieltjes $\int\limits_{(1,3)} \varphi_1 d\mu_F$ và $\int\limits_{[-1,1]} \varphi_2 d\mu_F$.



Hàm F



Hàm φ_1



Hàm φ_2

Ở đây, ta thấy $\mu_F(\varphi_1(t) \neq t) = \mu_F(\{2\}) = 0$ nên $\varphi_1(t) = t$ h.k.n theo độ đo μ_F. Do vậy theo mệnh đề 3.31, chương Tích phân Lebesgue và hệ quả 4.24 ta được

$$\int\limits_{(1,3)} \varphi_1 d\mu_F = \int\limits_{(1,3)} t d\mu_F = \int\limits_{[1,3)} t d\mu_F - \int_{\{1\}} t d\mu_F = \int\limits_1^3 t d(t+1) - 0 = 4.$$

Tương tự, $\int\limits_{[-1,1)} \varphi_2 d\mu_F = \int\limits_{-1}^{1} \varphi_2 dF$ nhưng rõ ràng không thể thay φ_2 bằng t trên toàn bộ $[-1,1)$ do $\mu_F(\varphi_2(t) \neq t) = \mu_F(\{0\}) \neq 0$. Thay vào đó ta sẽ làm như sau:

$$\begin{aligned} \int\limits_{[-1,1]} \varphi_2 d\mu_F &= \int\limits_{[-1,1)} \varphi_2 d\mu_F + \int\limits_{\{1\}} \varphi_2 d\mu_F = \int\limits_{-1}^{1} \varphi_2 dF + \varphi_2(1)[F(1^+) - F(1)] \\ &= \int\limits_{-1}^{0} t dt + \varphi_2(0)[F(0^+) - F(0)] + \int\limits_0^1 t d(t+1) + 0 = 1. \end{aligned}$$

Mặc dù tích phân Stieltjes có vẻ hữu dụng hơn tích phân Lebesgue bởi liên hệ trực tiếp của nó với tích phân Riemann quen thuộc, tuy nhiên trong trường hợp tập giá trị của hàm đo được là hữu hạn hoặc đếm được thì việc tính tích phân Lebesgue bằng định nghĩa vẫn đơn giản hơn tích phân Stieltjes, kể cả khi đã biết hàm phân phối. Ngoài ra, để áp dụng được định lý 4.16 thì ta phải có $\varphi(t)$ liên tục trên $[a,b]$.

Ví dụ 4.18. Xét không gian độ đo $([0,1], \mathscr{B}[0,1], m)$ và hàm đo được $f = \mathbf{1}_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}$. Nếu ta muốn sử dụng tích phân Stieltjes thì lưu ý rằng hàm $F = \mathbf{1}_{[1,\infty]}$ không liên tục tuyệt đối nên không thể sử dụng định lý 4.16. Nếu tính tích phân $\int_0^1 tdF$ theo định nghĩa hoàn toàn không dễ. Trong khi đó, nếu sử dụng tích phân Lebesgue trực tiếp ta thấy:

$$\int_{[0,1]} fdm = 0.m(\mathbb{Q}) + 1.m([0,1]\setminus\mathbb{Q}) = 1.$$

Ví dụ 4.19. Cho hàm đo được f có hàm phân phối $F(t) = \mathbf{1}_{(\frac{1}{2},\infty)}(t)$ và hàm $\varphi(t) = \mathbf{1}_{(\frac{1}{2},\infty)}(t)$. Dễ thấy $\varphi(f) = \mathbf{1}_{\{f(x)>\frac{1}{2}\}}$ là hàm đơn giản và $\int_X \varphi(f)d\mu = 0$. Tuy nhiên, trong trường hợp này không tồn tại tích phân Stieltjes trên $[0,1]$ của hàm φ đối với hàm F.

§ 3. ĐỘ ĐO TÍCH VÀ ĐỊNH LÝ FUBINI

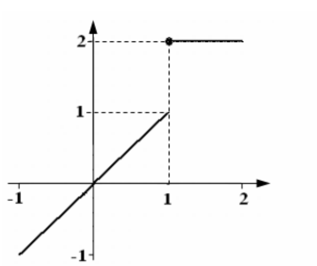
4.25 Định nghĩa. Cho hai không gian đo được $(X,\mathscr{A})$ và $(Y,\mathscr{B})$. Ta ký hiệu $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ là σ-đại số sinh bởi họ các tập $\{A\times B\subset X\times Y | A\in\mathscr{A}, B\in\mathscr{B}\}$.
Không gian đo được $(X\times Y,\mathscr{A}\otimes\mathscr{B})$ được gọi là *không gian tích* của $(X,\mathscr{A})$ và $(Y,\mathscr{B})$.

4.26 Định lý. *Cho $(X,\mathscr{A},\mu)$ và $(Y,\mathscr{B},\nu)$ là hai không gian độ đo. Khi đó tồn tại duy nhất một độ đo xác định trên không gian tích $(X\times Y,\mathscr{A}\otimes\mathscr{B})$, ký hiệu là $\mu\times\nu$ thoả mãn*

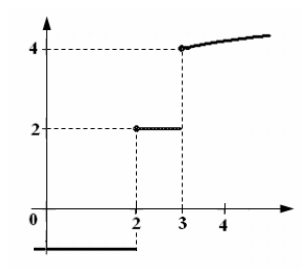
$$\mu\times\nu(A\times B) = \mu(A)\times\nu(B), \forall A\in\mathscr{A}, B\in\mathscr{B}.$$

Ví dụ 4.20. Cho hai hàm số liên tục trái và không giảm sau:

$$F(s) = \begin{cases} s & \text{nếu } s\le 1,\\ 2 & \text{nếu } 1 < s \end{cases} \qquad G(t) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } t\le 2,\\ 2 & \text{nếu } 2 < t \le 3,\\ \dfrac{5t+1}{t+1} & \text{nếu } t > 3. \end{cases}$$



Hàm F



Hàm G

Gọi μ_F, μ_G là hai độ đo cảm sinh bởi F, G, khi đó ta tính được

$$\mu_F(-\infty, 1) = \infty, \mu_G(3, \infty) = 3, \mu_F\{1\} = F(1) - F(1^-) = 1, \mu_G\{3\} = G(3) - G(3^-) = 2.$$

Vậy độ đo tích của miền $(-\infty, 1) \times (3, \infty)$ bằng ∞, độ đo tích của đường thẳng $\{1\} \times (3, \infty)$ bằng 3, độ đo tích của điểm $\{1\} \times \{1\}$ bằng 2.

Cho tập $A \subset X \times Y$. Với mỗi $x \in X$ cố định, đặt $A^x := \{y \in Y : (x, y) \in A\}$ và $y \in Y$ cố định, đặt $A^y := \{x \in Y : (x, y) \in A\}$. Nếu $A \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ thì $\forall x \in X$, $A^x \in \mathscr{B}$; $\forall y \in Y$, $A^y \in \mathscr{A}$.

Giả sử hàm $f(x, y)$ đo được trên $(X \times Y, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}, \mu \times \nu)$, ta gọi tích phân

$$\iint\limits_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu)$$

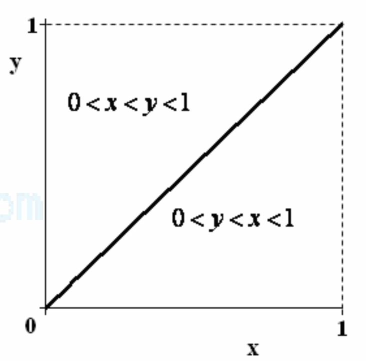
(nếu tồn tại) là *tích phân bội* của hàm $f(x, y)$.

Rõ ràng việc tính tích phân bội theo định nghĩa là rất khó khăn. Thông thường chúng ta sẽ tìm cách lấy tích phân theo một biến trước, rồi lấy tiếp tích phân theo biến kia sau. Tích phân được xác định theo cách trên được gọi là *tích phân lặp*.

Từ hàm $f(x, y)$ trên $X \times Y$, ta định nghĩa các hàm một biến $f(\cdot, y) : x \to f(x, y)$ và $f(x, \cdot) : y \to f(x, y)$. Giả sử tồn tại tích phân $\int_X f(\cdot, y) d\mu(x)$ với mọi $y \in Y$, nó sẽ xác định một hàm số mới $F(y) = \int_X f(\cdot, y) d\mu(x)$. Nếu tiếp tục tồn tại $\int\limits_Y F(y) d\nu(y)$ thì ta gọi đó là *tích phân lặp* của hàm $f(x, y)$ và ký hiệu là $\int\limits_Y \int\limits_X f(x, y) d\mu(x) d\nu(y)$. Tích phân lặp $\int\limits_X \int\limits_Y f(x, y) d\nu(y) d\mu(x)$ được định nghĩa tương tự.

Ví dụ 4.21. Cho $X = Y = [0, 1], \mu = \nu = m$ và hàm số $f(x, y)$ sau

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{nếu } 0 < y < x < 1, \\ -\dfrac{1}{y^2} & \text{nếu } 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{trong trường hợp còn lại .} \end{cases}$$



Khi đó $\int\limits_{[0,1]} f(x, y) d\mu(x) = \int\limits_y^1 \dfrac{1}{x^2} d\mu(x) + \int\limits_0^y -\dfrac{1}{y^2} d\mu(x) = \dfrac{1}{y} - 1 - \dfrac{1}{y} = -1$. Do vậy

$$\int\limits_{[0,1]} \int\limits_{[0,1]} f(x, y) d\mu(x) d\nu(y) = -1$$

Tương tự ta tính được

$$\int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f(x,y)d\nu(y)d\mu(x) = 1.$$

Như vậy $\int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f(x,y)d\mu(x)d\nu(y) \neq \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f(x,y)d\nu(y)d\mu(x)$.

Tiếp theo, ta sẽ kiểm tra liệu $f(x,y)$ có khả tích đối với độ đo tích không. Trước tiên ta tính $\iint_{[0,1]\times[0,1]} f^+(x,y)d(\mu\times\nu)$. Chú ý rằng

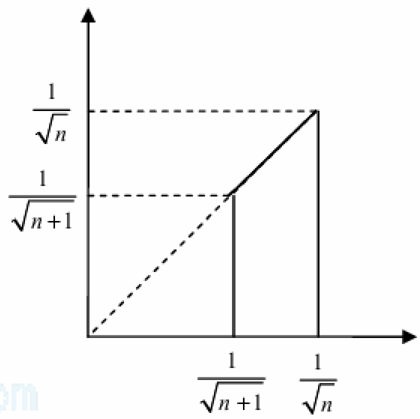
$$f^+(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{nếu } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{trong trường hợp còn lại .} \end{cases}$$

Xét hàm đơn giản sau

$$\varphi(x) = \begin{cases} n \text{ nếu } f^+(x,y) \in [n, n+1) \\ 0 \text{ trong trường hợp còn lại .} \end{cases}$$

Khi đó $\varphi(x) \leq f^+(x)$ với mọi x nên

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} f^+(x,y)d(\mu\times\nu) \geq \iint_{[0,1]\times[0,1]} \varphi(x,y)d(\mu\times\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} n.\left[\mu\times\nu\left\{f(x,y)\in[n,n+1)\right\}\right]$$



Có thể kiểm tra thấy

$\{f^+(x,y) \in [n,n+1)\} = \{(x,y) : x \in [\frac{1}{\sqrt{n+1}}, \frac{1}{\sqrt{n}})\}$

có diện tích bằng

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Thay vào ta có $\iint_{[0,1]\times[0,1]} \varphi(x,y)d(\mu\times\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} = \infty$ nên $\iint_{[0,1]\times[0,1]} f^+(x,y)d(\mu\times\nu) = \infty$.

Tương tự ta cũng tính được $\iint_{[0,1]\times[0,1]} f^-(x,y)d(\mu\times\nu) = \infty$.

Vậy hàm f không khả tích trên miền $[0,1]\times[0,1]$.

Định lý sau cho ta mối liên hệ giữa ba tích phân này. Trong hầu hết các trường hợp thông thường, chúng sẽ bằng nhau.

4.27 Định lý (Định lý Fubini). *Cho* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *và* $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ *là hai không gian độ đo* σ *- hữu hạn,* $f(x,y)$ *là một hàm đo được trên* $(X \times Y, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$*. Nếu* $f(x,y)$ *khả tích trên* $X \times Y$ *thì tồn tại các tích phân lặp* $f(x,y)$ *thoả mãn:*

$$\iint\limits_{X\times Y} f(x,y)d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu \right) d\nu.$$

Mặc dù định lý trên rất hay nhưng thông thường việc kiểm tra hàm $f(x,y)$ khả tích trên $X \times Y$ lại không đơn giản, trong khi việc xác định tích phân lặp dễ hơn nhiều.

Định lý tiếp theo sẽ cho ta thấy với điều kiện nào chỉ cần một trong hai tích phân lặp tồn tại thì tồn tại tích phân bội và chúng bằng nhau.

4.28 Định lý (Định lý Tonelli). *Cho* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *và* $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ *là hai không gian độ đo* σ *- hữu hạn,* $f(x,y) : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}^+$ *là không âm đo được. Khi đó tồn tại các tích phân lặp và bội của* $f(x,y)$ *và các tích phân này đều bằng nhau:*

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu \right) d\nu = \iint\limits_{X\times Y} f(x,y)d(\mu \times \nu).$$

Ví dụ 4.22. Cho hàm số sau xác định trên $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + xy & \text{nếu } 0 \le y, x \le 2, \\ 0 & \text{trong trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Với các độ đo μ_F, μ_G được xác định ở ví dụ 4.20, ta sẽ tính các tích phân lặp $\int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)d(\mu_F \times \mu_G)$ và $\int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)d(\mu_G \times \mu_F)$. Hiển nhiên các điều kiện của định lý Tonelli đều được thoả mãn nên hai tích phân này phải bằng nhau và bằng tích phân bội $\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x,y)d(\mu_F \times \mu_G)$.

Trước hết ta thấy khi $y < 0$ hoặc $y > 2$ thì $f(x,y) = 0$, do đó ta có

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)d\mu_F(x) = \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}} (1 + xy)d\mu_F(x) & \text{nếu } 0 \le y \le 2, \\ 0 & \text{nếu } y \notin [0,2] \end{cases} = \mathbf{1}_{[0,2]}(y) \int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)d\mu_F(x).$$

Chú ý rằng ngoài đoạn $[0,2]$, $f(x,y) = 0$, do đó ta có:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x,y)d\mu_F(x) =& \mathbf{1}_{[0,2]}(y) \int_{[0,2]} f(x,y)d\mu_F(x) \\
=& \mathbf{1}_{[0,2]}(y) \left(\int_{\{0\}} f(x,y)d\mu_F(x) + \int_{(0,1)} f(x,y)d\mu_F(x) + \int_{\{1\}} f(x,y)d\mu_F(x) \right. \\
& \left. + \int_{(1,2]} f(x,y)d\mu_F(x) \right) \\
=& \mathbf{1}_{[0,2]}(y) \left(0 + \int_0^1 (1+xy)dx + (1+1.y).1 + 0 \right) \\
=& \mathbf{1}_{[0,2]}(y) \left(1 + \frac{1}{2}y + y + 1 \right) = \mathbf{1}_{[0,2]}(y) \left(2 + \frac{3}{2}y \right)
\end{aligned}$$

Chú ý rằng theo hệ quả 4.24, tích phân Lebesgue-Stieltjes $\int\limits_{(0,1)} f(x,y)d\mu_F(x) \neq \int\limits_0^1 f(x,y)dF$ nhưng vẫn bằng $\int\limits_0^1 f(x,y)dx$ (Các bạn có thể tự kiểm tra).

Tiếp tục tính

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)d\mu_F(x) \right) d\mu_G(y) =& \int_{[0,2]} \left(2 + \frac{3}{2}y \right) d\mu_G(y) \\
=& \int_{[0,2)} \left(2 + \frac{3}{2}y \right) d\mu_G(y) + \int_{\{2\}} \left(2 + \frac{3}{2}y \right) d\mu_G(y) = 5.\mu_G(2) = 5.3 = 15.
\end{aligned}$$

Bây giờ ta sẽ kiểm tra $\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)d\mu_G(y) \right) d\mu_F(x)$. Trước hết ta có:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x,y)d\mu_G(y) =& \mathbf{1}_{[0,2]}(x) \left(\int_{[0,2)} f(x,y)d\mu_G(y) + \int_{\{2\}} f(x,y)d\mu_G(y) \right) \\
=& \mathbf{1}_{[0,2]}(x) \left(0 + 3.(1+2x) \right) = (6x+3)\mathbf{1}_{[0,2]}(x).
\end{aligned}$$

Tiếp tục tính

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)d\mu_G(y) \right) d\mu_F(x) =& \int_{[0,2]} (6x+3)d\mu_F(x) \\
=& \int_{\{0\}} (6x+3)d\mu_F + \int_{(0,1)} (6x+3)d\mu_F + \int_{\{1\}} (6x+3)d\mu_F + \int_{(1,2]} (6x+3)d\mu_F \\
=& 0 + \int_0^1 (6x+3)dx + 9\mu_F(1) + 0 = 6 + 9 = 15.
\end{aligned}$$

Vậy $\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x,y)d(\mu_F \times \mu_G) = 15$.

BÀI TẬP

D.1. Chứng minh hàm số $H(t)$ thoả mãn điều kiện Lipschitz trên $[a,b]$:

$$|H(u) - H(v)| \leq C|u - v|, \forall u, v \in [a,b], C > 0 \text{ nào đó}$$

sẽ liên tục tuyệt đối trên $[a,b]$.

D.2. Cho hàm số sau xác định trên $\mathbb{R}$:

$$H(t) = \begin{cases} \frac{4}{t^2} & \text{nếu } t \leq -2, \\ t+3 & \text{nếu } -2 < t \leq 2, \\ 6 - e^{2-t} & \text{nếu } t > 2. \end{cases}$$

Chứng minh $H(t)$ thoả mãn điều kiện Lipschitz nên liên tục tuyệt đối.

D.3. Với hàm $H(t)$ cho ở bài tập D.2, hãy tính các tích phân:

a) $\int\limits_{-3}^{2} t^2 dH$;

b) $\int\limits_{(0,4]} e^{2t} d\mu_H$ với μ_H là độ đo Stieltjes trên $\mathbb{R}$ cảm sinh bởi hàm $H(t)$;

c) $\int\limits_X f d\mu$ với hàm f đo được trên $(X, \mathscr{F}, \mu)$ có $H(t)$ là hàm phân phối.

D.4. Cho các hàm số

$$F(s) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } s \leq 0, \\ s & \text{nếu } 0 < s \leq 1, \\ 2 & \text{nếu } 1 < s; \end{cases} \qquad G(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t \leq 0, \\ \frac{5t+1}{t+1} & \text{nếu } t > 0. \end{cases}$$

Hãy tính các tích phân

a) $\int\limits_X f d\mu$ với hàm f đo được nhận F làm hàm phân phối;

b) $\int\limits_X (g+1)^2 d\mu$ với hàm g đo được nhận G làm hàm phân phối;

c) $\int\limits_0^2 G(t) dF$;

d) $\int\limits_0^2 F(t) dG$.

D.5. Tính tích phân $\iint\limits_{(0,4]\times(0,4]} (x+1)(y+1) d(\mu_F \times \mu_G)$ trong đó μ_F, μ_G là các độ đo cảm sinh bởi các hàm F, G.

Phụ Lục

Chứng minh của một số định lý

Chứng minh (**Chứng minh của định lý 4.7).** Trước hết ta có thể chỉ ra $\underset{[a,b]}{\text{var}}(f) = \underset{[a,x]}{\text{var}}(f) + \underset{[x,b]}{\text{var}}(f)$ với $x \in [a,b]$.

Đặt $v(x) = \underset{[a,x]}{\text{var}}(f), x \in [a,b]$. Khi đó dễ dàng thấy rằng $v(x)$ là hàm không giảm. Đặt $g(x) = v(x) - f(x)$. Ta cũng phải chỉ ra $g(x)$ không giảm. Thật vậy, giả sử $a \le x_1 \le x_2 \le b$ thì

$$g(x_2) - g(x_1) = v(x_2) - v(x_1) - (f(x_2) - f(x_1)).$$

Chú ý rằng $v(x_2) - v(x_1) = \underset{[x_1,x_2]}{\text{var}}(f) \ge |f(x_2) - f(x_1)|$ do $\underset{[x_1,x_2]}{\text{var}}(f)$ là cận trên của tất cả các tổng $v(\mathbb{P})$ trong khi $|f(x_2) - f(x_1)|$ chỉ là một tổng $v(\mathbb{P})$ với $\mathbb{P} = \{x_1, x_2\}$.

Do vậy $g(x_2) - g(x_1) \ge 0$ nên g là hàm không giảm. Rõ ràng $f = v - g$ là hiệu hai hàm không giảm. ■

Chứng minh (**Chứng minh của định lý 4.20).** Đầu tiên tích phân Lebesgue ở vế trái tồn tại do f hữu hạn hkn và $\mu(X) < \infty$. Tích phân Stieltjes bên vế phải tồn tại theo định lý 4.15 (ở đây F là không giảm nên hiển nhiên có biến phân bị chặn).

Xét phân hoạch $\mathbb{P} = \{a = \alpha_0 < x_1 < \cdots < \alpha_n = b\}$ và đặt $X_i = (x \in X | \alpha_{i-1} < f(x) \le \alpha_i]$. Khi đó dễ thấy

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$$

với các X_i là rời nhau nên

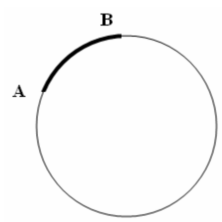
$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_{X_i} f d\mu \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i-1}\mu(X_i) \le \int_X f d\mu \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(X_i).$$

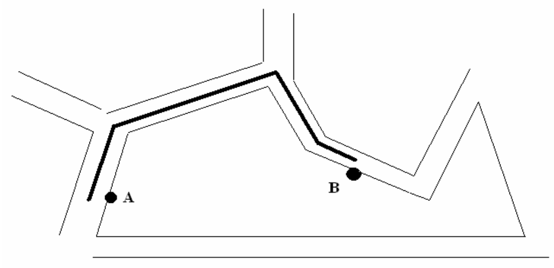
Tuy nhiên $\mu(X_i) = F(\alpha_i) - F(\alpha_{i-1})$. Do đó lấy giới hạn của hai tổng trên khi bán kính $d(\mathbb{P}) \to 0$, ta được $\int_a^b t dF$. do đó $\int_X f d\mu = \int_a^b t dF$. ■

CHƯƠNG 5

KHÔNG GIAN METRIC

Trong nhiều vấn đề của toán học cũng như đời sống, chúng ta cần quan tâm đến khái niệm khoảng cách giữa hai đối tượng. Chẳng hạn khoảng cách giữa hai điểm trong không gian, chúng ta thường nghĩ đến chiều dài đoạn thẳng nối giữa hai điểm. Tuy nhiên nếu hai điểm nằm trên bề mặt Trái Đất thì rõ ràng khoảng cách trên không có mấy ý nghĩa. Khi đó khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm trên Trái Đất sẽ là đường nằm trên bề mặt - đường chim bay. Tuy nhiên để di chuyển giữa hai điểm trên một mạng lưới giao thông, ta bắt buộc phải đi theo mạng lưới đó và khoảng cách được xem như chiều dài đoạn ngắn nhất để đi từ điểm này đến điểm kia và ngược lại.





Trong giáo trình này chúng ta sẽ đặc biệt quan tâm đến các định nghĩa về khoảng cách giữa hai hàm số cũng như các ứng dụng của chúng.

Sử dụng khái niệm về khoảng cách chúng ta có thể nghiên cứu về sự hội tụ một cách tổng quát. Cho một dãy x_n các điểm thuộc một tập X, sự hội tụ của x_n tới một điểm x có thể được hiểu rằng khoảng cách giữa x_n và x dần đến 0.

Tuy nhiên có một số sự hội tụ thú vị sẽ không thể định nghĩa bằng metric. Chẳng hạn nếu chúng ta định nghĩa sự hội tụ của một dãy các hàm f_n "theo điểm" như sau: $f_n \to f$ có nghĩa là $f_n(x) \to f(x)$ với mọi x, nó dẫn đến (với một lớp đủ lớn các hàm xác định trên một tập không đếm được) có thể không tồn tại metric e nào sao cho $f_n \to f$ tương đương với $e(f_n, f) \to 0$.

§ 1. KHÁI NIỆM METRIC

5/1.1 Khái niệm

Chúng ta trước hết nhắc lại khoảng cách thông thường giữa hai điểm r, s trên đường thẳng thực $\mathbb{R}$ bằng $|r-s|$. Nó thoả mãn các tính chất sau:

1) $|r-s| \geq 0, \forall r, s \in \mathbb{R}; \quad |r-s| = 0 \Leftrightarrow r = s$,

2) $|r-s| = |s-r|, \forall r, s \in \mathbb{R}$,

3) $|r-t| \leq |r-s| + |s-t|, \forall r, s, t \in \mathbb{R}$.

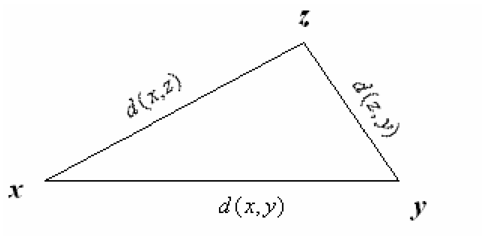
Chú ý rằng tính chất thứ ba rất quan trọng đối với các kết quả về sự hội tụ. Từ đó ta đưa ra định nghĩa về khoảng cách giữa hai điểm trong một tập hợp X cũng sẽ phải thoả mãn ba tính chất trên.

5.1 Định nghĩa. Cho tập $X \neq \emptyset$, một *metric* trên X là một hàm d từ $X \times X$ vào $[0; +\infty)$ thỏa mãn:

$$d(x,y) \geq 0, \forall x, y \in X; \quad d(x,y) = 0 \text{ khi và chỉ khi } x = y,, \tag{5.1}$$

$$d(x,y) = d(y,x), \forall x, y \in X \text{ (tính chất đối xứng)}, \tag{5.2}$$

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \forall x, y, z \in X \text{ (Bất đẳng thức tam giác)}. \tag{5.3}$$



Tập X cùng metric d trên đó được gọi là một *không gian metric*, ta thường ký hiệu là (X, d). Mỗi phần tử $x \in X$ ta gọi là một *điểm* của X, $d(x,y)$ còn được gọi là *khoảng cách* giữa x và y.

Trong mục này, ta luôn quy ước (X, d) là một không gian metric bất kỳ. Dưới đây là một số tính chất dễ thấy của metric.

1) $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$: $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$.

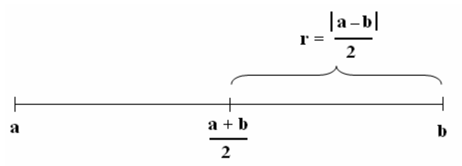
2) Bất đẳng thức tứ giác: $|d(x,y) - d(u,v)| \leq d(x,u) + d(y,v)$, $\forall x, y, u, v \in X$.

   Từ đó suy ra: $|d(x,y) - d(z,y)| \leq d(x,z)$.

Giả sử ta có một điểm $x_0 \in X$ và $r > 0$, đặt $B(x_0, r) := \{y \in X : d(x_0, y) < r\}$. Khi đó $B(x_0, r)$ được gọi là *hình cầu mở* với tâm tại x_0 và bán kính r. Ngoài ra, ta còn gọi $B(x_0, r)$ là r - *lân cận* của x_0.

$B[x_0, r] := \{y \in X : d(x_0, y) \leq r\}$ được gọi là *hình cầu đóng* tâm tại x_0 và bán kính r.

Ví dụ 5.1. Trong $\mathbb{R}$ với metric $|x-y|$ hình cầu $B(x,r)$ là khoảng mở $(x-r, x+r)$. Ngược lại, bất kỳ khoảng mở (a,b) nào với $a<b$ trong $\mathbb{R}$ cũng có thể được viết thành $B(x,r)$, ở đó $x=(a+b)/2$, $r=(b-a)/2$.



5.4 Định nghĩa. Cho không gian metric (X,d), một tập $Y\subset X$ khác rỗng với metric d hạn chế trên Y, ký hiệu là (Y,d), được gọi là *không gian metric con* của không gian (X,d).

Ví dụ 5.2. Đoạn $[a,b]$ với metric $|x-y|$ là không gian metric con của $\mathbb{R}$. Khi đó $[a,c)$ với $c\in(a,b)$ là một hình cầu mở trong $[a,b]$.

5/1.2 Các ví dụ về không gian metric

Ví dụ 5.3. Ví dụ cổ điển của một không gian metric là $\mathbb{R}$ với "metric thông thường" $d(x,y)=|x-y|$. Ngoài ra, ta có thể đưa ra một metric $d(x,y)=A\times|x-y|, A>0$.

Ví dụ 5.4. Một tập X bất kỳ với metric $d(x,y)$ bằng 0 nếu $x=y$; bằng 1 nếu $x\neq y$.
Khi đó ta gọi d là *metric rời rạc* trên X và (X,d) là *không gian metric rời rạc*.

Ví dụ 5.5. Trên không gian $\mathbb{R}^k$ có những metric thông dụng sau:

Với $x=(x_1,\ldots,x_k), y=(y_1,\ldots,y_k)\in\mathbb{R}^k$.

1) $d_1(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{k}|x_i-y_i|$;

2) $d_2(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i-y_i)^2}$, ta gọi riêng metric này trên $\mathbb{R}^k$ là *khoảng cách Euclid*.

Để chỉ ra đó đúng là metric, ta kiểm tra 3 tính chất của metric. Hai tính chất (5.1) *và* (5.2) *đều dễ dàng thấy đúng, với tính chất* (5.3) *ta cần phải chứng minh:*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i-z_i)^2}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i-y_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(y_i-z_i)^2}.$$

Thay $a_i=x_i-y_i, b_i=y_i-z_i$, lấy bình phương hai vế, ta được bất đẳng thức tương đương:

$$\sum_{i=1}^{k}(a_i+b_i)^2\leq\sum_{i=1}^{k}a_i^2+2\sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{k}a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{k}b_i^2\Big)}+\sum_{i=1}^{k}b_i^2.$$

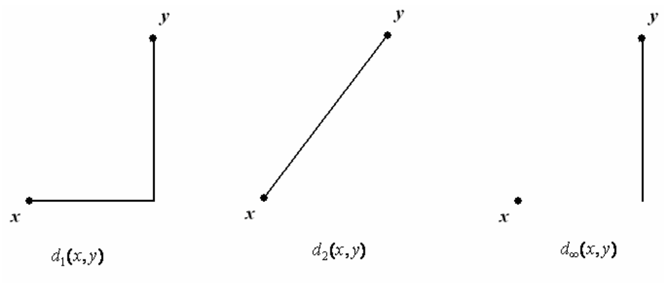
Giản ước tổng $\sum_{i=1}^{k}a_i^2+\sum_{i=1}^{k}b_i^2$ ở hai vế ta có

$$\sum_{i=1}^{k}a_ib_i\leq\sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{k}a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{k}b_i^2\Big)}.$$

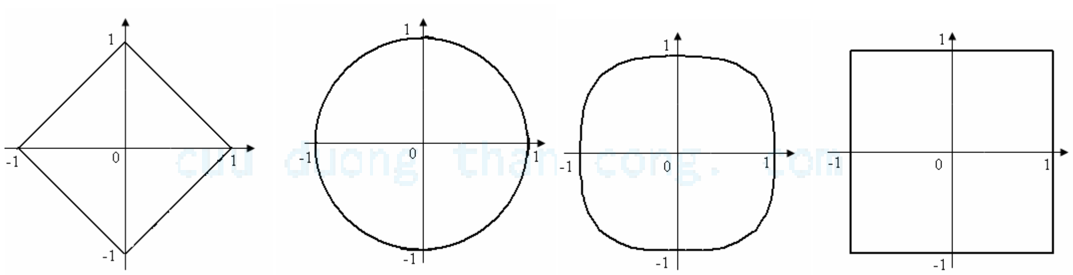
Trong trường hợp $a_i, b_i > 0$, bất đẳng thức trên chính là bất đẳng thức Cauchy-Bunhiacopski nên là đúng, từ đó suy ra nó đúng với mọi a_i, b_i.

3) Tổng quát hơn người ta còn chứng minh được $d_p(x,y) = \sqrt[p]{\sum\limits_{i=1}^{k} |x_i - y_i|^p}$ cũng là một metric trên $\mathbb{R}^k$ với $1 \le p < \infty$.

4) Cho $p \to \infty$, ta có metric $d_\infty(x,y) = \max_{1\le k\le n} |x_k - y_k|$.



Các khoảng cách d_1, d_2, d_∞ giữa các điểm $x, y \in \mathbb{R}^2$



Các hình cầu tâm O, bán kính 1 ứng với các khoảng cách d_1, d_2, d_p, d_∞ trong $\mathbb{R}^2$

Ví dụ 5.6. Tập $l_2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) | \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty\}$ (tập các dãy số vô hạn có tổng bình phương bị chặn) là một không gian metric với:

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2}.$$

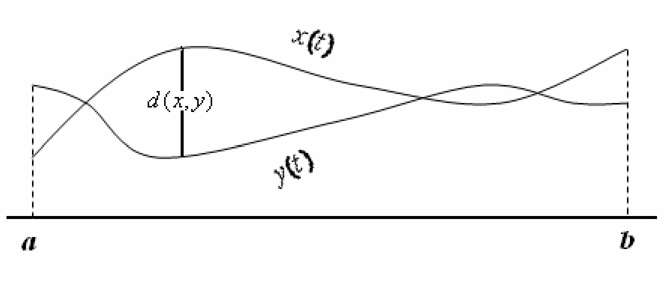
Ví dụ 5.7. Tập $\mathbf{B}[a,b]$ gồm toàn bộ các hàm bị chặn trên $[a,b]$ với metric: $d_\infty(x,y) = \sup_{a\le t\le b} |x(t) - y(t)|, \forall x, y \in \mathbf{B}[a,b]$.

Hai điều kiện (5.1) và (5.2) đều dễ thấy. Ta sẽ kiểm tra điều kiện (5.3) với ba hàm $x(t), y(t), z(t) \in \mathbf{B}[a,b]$:

$$|x(t) - z(t)| \le |x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)|, \forall t \in [a,b],$$
$$\Rightarrow |x(t) - z(t)| \le \sup_{a\le t\le b} |x(t) - y(t)| + \sup_{a\le t\le b} |y(t) - z(t)| = d_\infty(x,y) + d_\infty(z,y), \forall t \in [a,b],$$
$$\Rightarrow d_\infty(x,z) \le d_\infty(x,y) + d_\infty(z,y),$$

do $d_\infty(x,y) + d_\infty(z,y)$ được xem như là một cận trên của tập $|x(t) - z(t)|, t \in [a,b]$ trong khi $d_\infty(x,z) = \sup_{a\le t\le b} |x(t) - z(t)|$ là cận trên nhỏ nhất.

Tập $\mathbf{C}[a,b]$ các hàm liên tục trên $[a,b]$ với metric: $d_\infty(x,y) = \sup_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$ là một không gian metric con của $\mathbf{B}[a,b]$. Chú ý rằng đối với không gian $\mathbf{C}[a,b]$, luôn tồn tại $T \in [a,b]$ sao cho $|x(T)-y(T)| = d_\infty(x,y), \forall x,y \in \mathbf{C}[a,b]$. Như vậy, trên $\mathbf{C}[a,b]$: $d_\infty(x,y) = \max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$.



Ví dụ 5.8. Xét trong không gian $\mathbb{R}^2$ với hàm $d_{1/2}(x,y)$ được định nghĩa như sau:

$$d_{1/2}(x,y) = \left(\sqrt{|x_1-y_1|} + \sqrt{|x_2-y_2|}\right)^2 \text{ với } x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2).$$

Ta có $d_{1/2}\big((1,0),(0,1)\big) = 4$ trong khi $d_{1/2}\big((1,0),(0,0)\big) = 1 = d_{1/2}\big((0,0),(0,1)\big)$. Vậy $d_{1/2}\big((1,0),(0,1)\big) \ge d_{1/2}\big((1,0),(0,0)\big) + d_{1/2}\big((0,0),(0,1)\big)$ nên không thoả mãn bất đẳng thức tam giác. Vậy $d_{1/2}$ không phải là metric trong $\mathbb{R}^2$.

Ta có thể chứng minh tương tự đối với $d_p, p < 1$. Đó là lý do tại sao không gian metric $(\mathbb{R}^k, d_p)$ đòi hỏi $p \ge 1$.

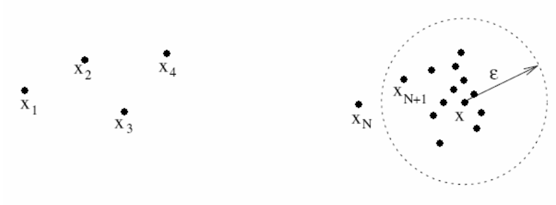
5/1.3 Sự hội tụ trong không gian metric

5.5 Định nghĩa. Ta nói dãy điểm $x_1, x_2, \ldots$ của một không gian metric X *hội tụ* đến điểm x của không gian đó nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$. Ký hiệu:

$$x_n \to x \text{ hoặc } \lim x_n = x,$$

và x được gọi là *giới hạn* của dãy $\{x_n\}$.

Nhắc lại rằng $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$ là hội tụ của một dãy trong $\mathbb{R}$ với metric thông thường, tức là với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên $N > 0$ sao cho $d(x_n,x) < \varepsilon$ với mọi $n > N$.



Ví dụ 5.9. 1) Sự hội tụ trên đường thẳng $\mathbb{R}$ với metric $d(x,y) = |x-y|$ là sự hội tụ của dãy số thông thường.

2) Trong $\mathbb{R}^k$, sự hội tụ của dãy $x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)})$ tới $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ theo các metric $d_p, p \geq 1$ đều tương đương với sự hội tụ theo từng tọa độ, nghĩa là:

$$x_n \to x \text{ khi } n \to \infty \text{ đối với metric } d_p, p \geq 1 \Leftrightarrow x_i^{(n)} \to x_i, \forall i = 1, \ldots, n.$$

3) Trong không gian $\mathbf{C}[0,1]$ các hàm liên tục trên đoạn $[0,1]$ với khoảng cách $d_\infty(x,y)$. Xét dãy hàm

$$x_n(t) = \begin{cases} nt & 0 \leq t < 1/n \\ 1 & 1/n \leq t \leq 1 \end{cases}$$

và hàm $x(t) \equiv 1$. Ta thấy rằng $x_n \nrightarrow x$, vì $d(x_n, x) \geq |x_n(0) - x(0)| = 1$.

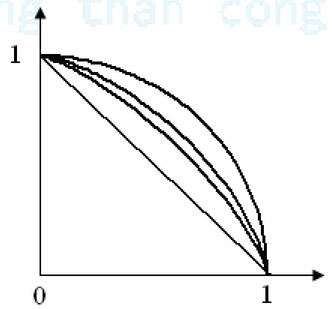
5.6 Định nghĩa. Cho không gian $\mathbf{C}[a,b]$ các hàm liên tục trên $[a,b]$ với khoảng cách $d_\infty(x,y)$. Khi đó dãy hàm x_n hội tụ đến x còn được gọi là *hội tụ đều* đến hàm $x(t)$.

Ví dụ 5.10. Xét dãy hàm sau trên $\mathbf{C}[0,1]$

$$x_n(t) = \left(1 - t^{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{n}{n+1}}.$$

Ta sẽ chứng minh dãy hàm này hội tụ đều đến hàm số

$$x(t) = 1 - t.$$



Xét hàm số $f(t) = (1 - t^p)^{\frac{1}{p}} - 1 + t, p > 1$ có

$$f'(t) = -\left(\frac{1 - t^p}{t^p}\right)^{\frac{1-p}{p}} + 1 = 0 \Leftrightarrow t^p = \frac{1}{2}.$$

Dễ thấy $f(t)$ đạt cực đại tại điểm $t^p = \frac{1}{2}$ và cực tiểu tại hai điểm $t = 0,1$ trên $[0,1]$. Vậy $0 \leq f(t) \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} - 1, \forall t \in [0,1]$. Từ đó suy ra

$$d_\infty(x_n, x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n+1}} - 1 \to 0, \text{ khi } n \to \infty.$$

Sau đây là một số tính chất của dãy hội tụ trong không gian metric:

Tính chất 5.1.1. Nếu $x_n \to x$ và $x_n \to x'$ thì $x = x'$ (giới hạn của một dãy điểm nếu có là *duy nhất*). Thật vậy, dựa vào bất đẳng thức tam giác ta có

$$0 \leq d(x, x') \leq d(x, x_n) + d(x_n, x') \to 0.$$

Tính chất 5.1.2. Nếu $x_n \to x$ và $y_n \to y$ thì $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ (hàm số $d(x, y)$ là hàm liên tục theo cả hai biến).

Tính chất 5.1.3. Nếu dãy $x_n \to x$ thì mọi dãy con của nó hội tụ tới cùng giới hạn.

§ 2. TẬP ĐÓNG VÀ TẬP MỞ

5/2.1 Tập mở

5.7 Định nghĩa. Hợp của một họ bất kỳ các hình cầu mở trong (X, d) được gọi là một *tập mở* trong không gian metric (X, d). Tập $\emptyset$ trong X được quy ước là một tập mở.
Cho $x \in X$, $N \subset X$ (mở hoặc không). Nếu tồn tại U mở nào đó thoả mãn $x \in U \subset N$ thì N được gọi là một *lân cận* của x.

Ví dụ 5.11. Với mọi không gian (X, d), dễ thấy tập mở lớn nhất trong X cũng là X vì nó là hợp của tất cả các hình cầu mở bên trong.

Ví dụ 5.12. Mọi hình cầu mở $B(x, r)$ đều là tập mở và như vậy trong không gian $\mathbb{R}$ với metric thông thường, (a, b) là tập mở với $a \leq b$ bất kỳ, kể cả $(a, +\infty)$ và $(-\infty, b)$.

Thật vậy ta có $(a, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a, a+n)$ và $(-\infty, a) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a-n, a)$ đều là hợp của một họ các hình cầu mở.

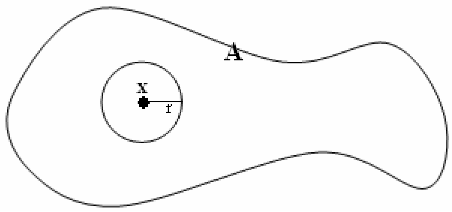
Trong $\mathbb{R}^2$ hình tròn $\{(x, y) : (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2\}$ là tập mở nhưng trong $\mathbb{R}^3$, tập $\{(x, y, z) : (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2\}$ không là tập mở.

Ví dụ 5.13. Trong không gian metric rời rạc (X, d), mọi tập con đều là tập mở do $\forall a \in A \subset X$: $A = \bigcup_{a \in A} B(a, \frac{1}{2})$.

Tiếp theo, chúng ta sẽ xem xét một số tính chất và điều kiện để một tập là tập mở.

5.8 Định nghĩa. Cho A là tập bất kỳ thuộc (X, d), điểm $x \in A$ được gọi là *điểm trong* của A nếu tồn tại $r > 0$ sao cho $B(x, r) \subset A$.

Tập hợp tất cả các điểm trong của A được gọi là *phần trong* của A, ký hiệu là $\operatorname{int} A$.

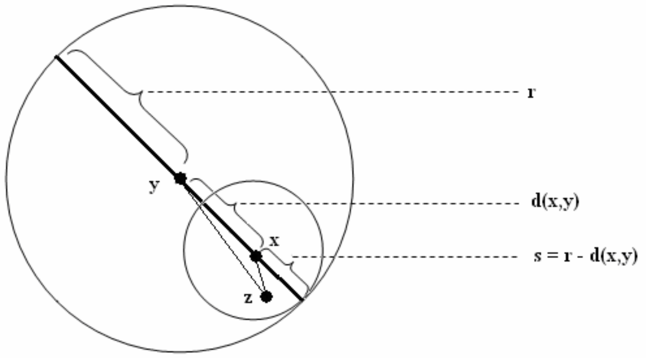


Ví dụ 5.14. Trong $\mathbb{R}$, phần trong của $[a, b]$, $[a, b)$ và $(b, a]$ đều là (a, b). Điểm a không là điểm trong của $[a, b)$ hoặc $[a, b]$ tức $[a, b)$ không thể là lân cận của a.

Mệnh đề sau giúp ta có thể dễ dàng kiểm tra xem một tập khi nào là tập mở.

5.9 Mệnh đề. *Tập hợp A là tập mở khi và chỉ khi $A = \operatorname{int} A$.*

Chứng minh. Giả sử A mở, xét $x \in A$ bất kỳ. Khi đó tồn tại $y \in X$ và $r > 0$ sao cho $x \in B(y,r) \subset A$. Đặt $s := r - d(x,y)$. Khi đó $s > 0$ và nếu chúng ta chứng minh được $B(x,s) \subset A$ thì rõ ràng x là điểm trong của A. Thật vậy, xét $z \in B(x,s)$ tùy ý, khi đó ta có $d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) < d(y,x) + s = r$. Vậy $z \in B(y,r), \forall z \in B(x,s)$ hay $B(x,s) \subset B(y,r) \subset A$. Suy ra $A = \operatorname{int} A$.



Ngược lại nếu $A = \operatorname{int} A$, dễ thấy với mọi $x \in A$ tồn tại hình cầu mở $B(x,r_x) \subset A$. Vậy $A = \bigcup\limits_{x\in A} \{B(x,r_x)\}$ nên A là mở. ■

Để chứng minh tập A là mở ta chỉ cần chỉ ra $\forall x \in A$, x là điểm trong của A. Như vậy tập mở A chính là hợp của một họ hình cầu mở có các tâm là toàn bộ các điểm thuộc A.

Ví dụ 5.15. Tập $[a,b]$ trong $\mathbb{R}$ không phải tập mở do a,b không phải là các điểm trong của $[a,b]$.

Dưới đây ta đưa ra một số tính chất rất quan trọng của tập mở.

5.10 Định lý. *i)* Hợp của một họ bất kỳ các tập mở là mở: *Cho tập chỉ số bất kỳ I và một họ các tập mở U_α ($\alpha \in I$), khi đó*

$$\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \text{ là tập mở.}$$

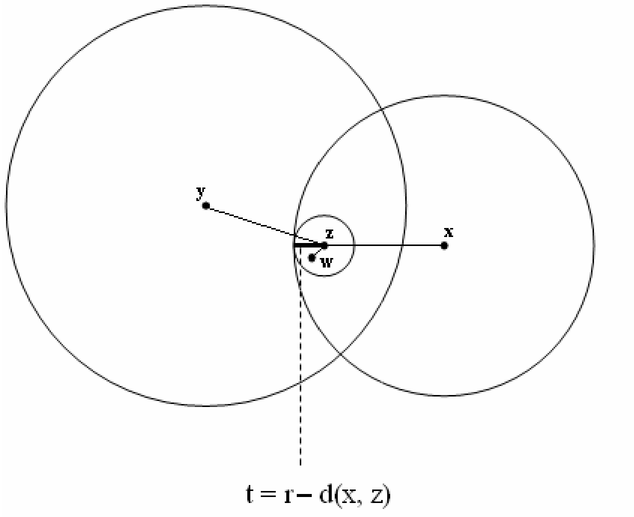
ii) Giao của hữu hạn các tập mở là mở: *Cho một số hữu hạn các tập mở $\{U_i\}_{i=1}^n$, khi đó*

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i \text{ là tập mở.}$$

iii) Tập $A \subset X$ bất kỳ, khi đó $\operatorname{int} A = \bigcup\{U : U \text{ là tập mở nằm trong} A\}$.

Chứng minh. i) Khẳng định là hiển nhiên (theo định nghĩa).

ii) Đầu tiên, ta chứng tỏ giao của hai hình cầu mở bất kỳ là một tập mở. Giả sử $x, y \in X$, $r > 0$ và $s > 0$. Đặt $U = B(x,r) \cap B(y,s)$. Lấy $z \in U$ và $t = \min\{r - d(x,z), s - d(y,z)\} > 0$. Với mọi $w \in B(z,t)$ tức là $d(z,w) < t$ thì từ bất đẳng thức tam giác ta có $d(x,w) < d(x,z) + t < r$. Tương tự, $d(y,w) < s$. Do vậy $w \in B(x,r)$ và $w \in B(y,s)$, nên $B(z,t) \subset U$. Suy ra với mỗi điểm z thuộc U đều là điểm trong của U nên U mở. Vậy giao hai hình cầu mở là một tập mở.



Giả sử V và W là hai tập mở, thì $V = \bigcup \mathcal{A}$ và $W = \bigcup \mathcal{B}$ với $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ là những họ tập hợp của các hình cầu mở. Khi đó:

$$V \cap W = \bigcup \{A \cap B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}.$$

Từ i) suy ra $V \cap W$ là hợp của một họ các tập mở nên cũng là mở. Như vậy giao hai tập mở là một tập mở, do đó giao hữu hạn các tập mở cũng là mở.

iii) Cho $A \subset X$ và đặt $\mathscr{U} = \{U : U \text{ là tập mở nằm trong} A\}$. Nếu $x \in \operatorname{int} A$ thì tồn tại hình cầu mở $B(x,r) \subset A$ mà $B(x,r) \in \mathscr{U}$ nên $x \in \bigcup \mathscr{U}$. Vậy $\operatorname{int} A \subset \bigcup \mathscr{U}$. Ngược lại nếu $y \in \bigcup \mathscr{U}$ thì tồn tại $U \in \mathscr{U}$ sao cho $y \in U$ mà U là mở nên y là điểm trong của U, tồn tại hình cầu mở $B(y,s) \subset U \subset A$. Vậy $y \in \operatorname{int} A$ nên $\bigcup \mathscr{U} \subset \operatorname{int} A$. Suy ra $\bigcup \mathscr{U} = \operatorname{int} A$. ■

Từ khẳng định iii) của định lý trên có thể suy ra $\operatorname{int} A$ là tập mở lớn nhất chứa trong A theo nghĩa: Nếu U là tập mở nằm trong A thì $U \subset \operatorname{int} A$.

Ví dụ 5.16. $\bigcap_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n}) = \{1\}$ không là tập mở, do vậy giao vô hạn các tập mở chưa chắc là tập mở.

5/2.2 Tập đóng

5.11 Định nghĩa. Cho không gian metric (X,d), tập $A \subset X$ được gọi là *tập đóng* nếu phần bù A^c là tập mở.

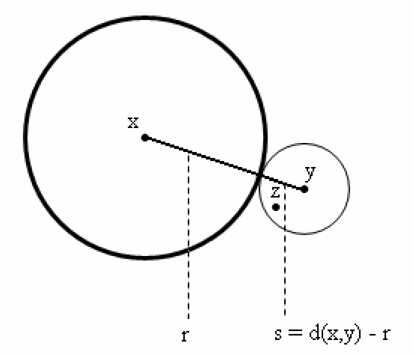
Ví dụ 5.17. Trong $\mathbb{R}$, các tập $[a,b], [a,+\infty), (-\infty,b]$ là tập đóng.

Thật vậy, do $(a,+\infty), (-\infty,a)$ là các tập mở nên $[a,+\infty) = \mathbb{R} \setminus (-\infty,a)$, $(-\infty,a] = \mathbb{R} \setminus (a,+\infty)$, $[a,b] = \mathbb{R} \setminus \big((-\infty,a) \cup (b,+\infty)\big)$ là các tập đóng.

Ví dụ 5.18. Cho không gian metric (X,d) với $x \in X$ và số $r > 0$ tuỳ ý, hình cầu đóng $B[x,r]$ là tập đóng.

Ta cần phải chỉ ra $X \backslash B[x,r]$ là tập mở tức mọi điểm của nó đều là điểm trong. Xét $y \in X \backslash B[x,r]$ và số $s = d(y,x) - r > 0$. Giả sử điểm $z \in B(y,s)$ tùy ý. Khi đó $d(x,z) \geq d(x,y) - d(y,z) >$

$d(x,y) - s = r$. Do đó $z \in X \backslash B[x,r]$ với mọi $z \in B(y,s)$. Như vậy $B(y,s) \subset X \backslash B[x,r]$. Suy ra $X \backslash B[x,r]$ là tập mở.



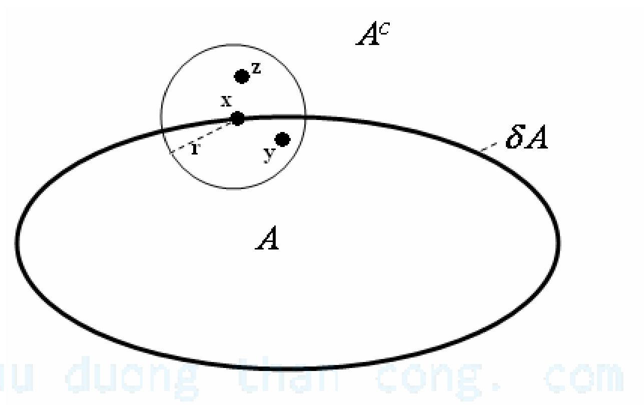
Ví dụ 5.19. Trong không gian metric X bất kỳ, vì $\emptyset$ và X đều là mở và là phần bù của nhau, chúng cũng là tập đóng. Vậy $X, \emptyset$ là các tập vừa đóng, vừa mở. Đồng thời, ta cũng thấy tồn tại các tập hợp không đóng cũng không mở, ví dụ "các khoảng nửa- mở" $[a,b)$ và $(a,b]$ trong $\mathbb{R}$.

5.12 Định nghĩa. Giao của tất cả các tập đóng chứa tập $A \subset X$ được gọi là *bao đóng* của A, ký hiệu là $[A]$ (hoặc $\overline{A}$): $[A] = \bigcap_{\alpha}\{A_\alpha : A_\alpha$ đóng chứa $A\}$.

Như vậy với tập $A \subset X$ bất kỳ luôn tồn tại phần trong và bao đóng của A.

Tập $\partial A := [A] \backslash \operatorname{int} A$ được gọi là *biên* của tập A. Ở phần bài tập ta sẽ chỉ ra biên của A là tập đóng.

Nhận xét. $x \in \partial A \Leftrightarrow \forall r > 0 : B(x,r)$ vừa chứa điểm $y \in A$, vừa chứa điểm $z \in A^c$.



Do hợp bất kỳ của các tập mở là tập mở, nên theo định lý De Morgan, giao bất kỳ của các tập đóng là tập đóng. Như vậy $[A]$ là đóng và là tập đóng nhỏ nhất chứa A, nghĩa là nếu V là một tập đóng chứa A thì $V \supset [A]$.

Bạn đọc hãy tự chứng minh các Mệnh đề sau.

5.13 Mệnh đề. *Tập $A \subset X$ bất kỳ, ta có $[A]^c = \operatorname{int}(A^c)$.*

Gợi ý: Dựa vào định nghĩa của bao đóng, sử dụng công thức De Morgan và Định lý 5.10 iii).

5.14 Mệnh đề. *Tập $A \subset X$ là tập đóng khi và chỉ khi $A = [A]$, nói cách khác A đóng khi và chỉ khi mọi điểm biên của A đều thuộc A.*

5.15 Định nghĩa. Cho tập $A \subset X$, một điểm $x \in X$ được gọi là *điểm tụ hoặc điểm giới hạn* của A nếu mọi lân cận của x chứa vô số điểm của A.

Định nghĩa này là tương đương với khẳng định mỗi lân cận của x chứa ít nhất một điểm của A khác x. Thật vậy chiều suy ra là hiển nhiên, ngược lại xét S_1 là một lân cận nào đó của x chứa điểm $x_1 \neq x$. Lấy $S_2 = B(x, r_1)$ trong đó $r_1 < d(x_1, x)$ là một lân cận của x không chứa x_1 nên nó phải chứa một điểm x_2 khác x_1 và x.

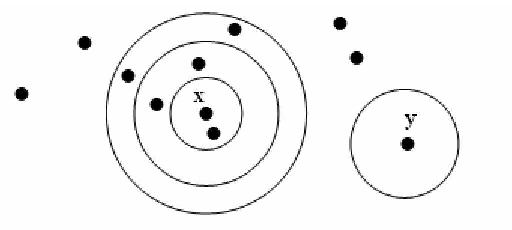
Tiếp tục quá trình này ta chọn được dãy các lân cận $S_2, S_3, \ldots$ lần lượt chứa vô số điểm $x_1, x_2, \ldots$ và như vậy S_1 chứa vô số điểm phân biệt của A.

Hiển nhiên bằng cách chọn $r_1, r_2, \ldots$ tiến tới 0 trong quá trình trên, ta thu được dãy $x_1, x_2, \ldots$ hội tụ tới x và như vậy ta có:

Điểm x là điểm tụ của tập A nếu và chỉ nếu tồn tại một dãy điểm phân biệt $\{x_n\} \in A$ sao cho $x_n \to x$.

Điểm $y \in A$ được gọi là *điểm cô lập* của A nếu nó không phải là điểm tụ của A.

Chú ý là điểm tụ của một tập chưa chắc đã thuộc tập đó.



x là điểm tụ trong khi y là điểm cô lập của tập A.

Ví dụ 5.20. Trong $\mathbb{R}$ tập $A = \{1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$ có một điểm tụ duy nhất là 0, mọi điểm thuộc A đều là điểm cô lập của nó.

Ta có sự liên hệ giữa dãy hội tụ trong không gian metric với tập đóng và mở ở định lý sau.

5.16 Định lý. *i) Tập $U \subset X$ mở khi và chỉ khi với mọi $x \in U$, nếu $x_n \to x$, luôn tồn tại số tự nhiên N sao cho $x_n \in U$ với mọi $n \geq N$.*

ii) Với tập $A \subset X$ bất kỳ, $[A]$ là tập hợp tất cả các giới hạn của các dãy của A hội tụ (chứa các $x \in X$ sao cho tồn tại dãy $x_n \in A$ thoả mãn $x_n \to x$).

iii) Tập $A \subset X$ đóng khi và chỉ khi với mọi dãy $x_n \to x$, $x_n \in A$ với mọi n, ta có $x \in A$.

Từ định lý trên dễ dàng suy ra A là đóng khi và chỉ khi mọi điểm tụ của A đều thuộc A, bao đóng của một tập gồm tập đó hợp với các điểm tụ không thuộc nó. Cũng từ định lý trên và từ lý thuyết số thực, ta nhận thấy *trong $\mathbb{R}$ bao đóng của tập các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ chính là tập số thực $\mathbb{R}$.*

$^{5}/$2.3 Tập trù mật. Không gian tách được

5.17 Định nghĩa. Trong không gian metric (X, d) bất kỳ, một tập hợp $A \subset X$ được gọi là *trù mật* trong X khi và chỉ khi bao đóng $[A] = X$.

Không gian (X, d) được gọi là *tách được (khả ly)* khi và chỉ khi X có một tập con đếm được trù mật trong X.

Chú ý. Tập $\mathbb{Q}$ là trù mật trên đường thẳng $\mathbb{R}$, nên $\mathbb{R}$ là tách được (với metric thông thường).

Tập số thực $\mathbb{R}$ với metric rời rạc không tách được.

5.18 Định lý. *Một không gian metric (X, d) là tách được khi và chỉ khi tồn tại một họ đếm được các hình cầu mở $\mathscr{U}$ thoả mãn với mọi tập mở $A \subset X$, A là hợp của một họ con các tập thuộc $\mathscr{U}$.*

Do $\mathbb{R}$ là tách được, ta có thể kết luận rằng *mọi tập mở trong $\mathbb{R}$ đều là hợp của họ hữu hạn hoặc đếm được các khoảng mở*, thậm chí là rời nhau (nếu có một số khoảng mở là giao nhau, ta chỉ cần tính là một khoảng).

§ 3. KHÔNG GIAN ĐẦY ĐỦ VÀ KHÔNG GIAN COMPACT

Ở tiết trước chúng ta đã học về hai dạng tập hợp có ý nghĩa quan trọng đối với sự hội tụ trong không gian metric là tập đóng và mở, trong tiết này chúng ta sẽ có thêm hai loại tập hợp nữa có tính chất hội tụ thú vị. Cả hai dạng tập hợp này đều xuất hiện trong tập số thực $\mathbb{R}$.

$^{5}/$3.1 Không gian đủ

5.19 Định nghĩa. Một dãy $\{x_n\}$ trong không gian X với metric d được gọi là *dãy Cauchy* nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} d(x_m, x_n) = 0$. Không gian metric (X, d) được gọi là *đầy đủ (đủ)* khi và chỉ khi mọi dãy Cauchy trong nó đều hội tụ.

Ví dụ 5.21. 1) $\mathbb{R}$ với khoảng cách thông thường là không gian metric đủ (nguyên lý Cauchy) và như vậy các không gian $\mathbb{R}^k$ với metric Euclid là các không gian đủ.

2) $\mathbb{Q}$ với khoảng cách thông thường không là không gian metric đủ. Dãy hội tụ $(1 + {}^{1}/{}_{n})^n$ có giới hạn là số vô tỉ e.

3) Tập $\mathbb{R}$ với khoảng cách $d(x, y) = |e^x - e^y|$ không là không gian metric đủ.

Xét dãy $x_n = -n$, $n = 1, 2, \ldots$. Ta có:

$$d(x_n - x_m) = |e^{-m} - e^{-n}| = \left|\frac{1}{e^m} - \frac{1}{e^n}\right| \to 0, m, n \to \infty.$$

Nhưng $x_n = -n$ không hội tụ. Thật vậy, giả sử ngược lại, nếu $\{x_n\}$ hội tụ đến $x \in \mathbb{R}$ khi đó

$$\lim d(x_n, x) = 0 \Leftrightarrow \lim |e^{-n} - e^x| = 0 \text{ hay } 0 = \lim_{n\to\infty} e^{-n} = e^x.$$

Điều này là vô lý, vì với mọi $x \in \mathbb{R} : e^x > 0$.

Dưới đây ta sẽ trình bày một không gian đầy đủ khác, đó là $\mathbf{C}[a,b]$. Nhắc lại $\mathbf{C}[a,b]$ là không gian các hàm liên tục trên $[a,b]$ với metric $d_\infty(x,y) = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)-y(t)|$. Dãy x_n bất kỳ thuộc $\mathbf{C}[a,b]$ hội tụ đối với d_∞ được gọi là *hội tụ đều*. Sự hội tụ đều bảo toàn tính liên tục (khá dễ dàng) theo Mệnh đề sau:

5.20 Mệnh đề. *Cho dãy $x_n \in \mathbf{C}[a,b]$ hội tụ đều tới x. Khi đó, $x \in \mathbf{C}[a,b]$.*

Chứng minh. Với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, chọn N sao cho $d_\infty(x_N, x) < \varepsilon/3$. Với bất kỳ $t \in [a,b]$, do x_N là liên tục ta chọn được δ_t sao cho nếu $|u-t| < \delta_t$ thì $|x_N(t) - x_N(u)| < \varepsilon/3$. Khi đó

$$\begin{aligned} |x(t)-x(u)| &\le |x(t)-x_N(t)| + |x_N(t)-x_N(u)| + |x_N(u)-x(u)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

Do vậy x là liên tục trên $[a,b]$. ■

5.21 Định lý. *Không gian metric $(\mathbf{C}[a,b], d_\infty)$ là không gian đầy đủ.*

Chứng minh. Cho x_n là dãy Cauchy trong $\mathbf{C}[a,b]$. Khi đó với mỗi $t \in [a,b]$, $x_n(t)$ là một dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$, nên nó hội tụ tới một số thực nào đó, ký hiệu là $x(t)$. Khi ấy với mỗi m và mọi t, $|x(t)-x_m(t)| = \lim_{n\to\infty} |x_n(t)-x_m(t)| \le \lim_{n\to\infty} d_\infty(x_n, x_m) \to 0$ khi $m \to \infty$, nên $d_\infty(x, x_m) \to 0$. Như vậy $x \in \mathbf{C}[a,b]$ theo Mệnh đề trên. ■

Ví dụ 5.22. Không gian các hàm khả vi trên $[a,b]$, ký hiệu $\mathbf{C}^1[a,b]$, với metric d_∞ không phải là không gian đủ.

Thật vậy, ta xét dãy hàm số sau trong $(\mathbf{C}^1[-1,1], d_\infty)$:

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } -1 \le t < 0, \\ \left(1 - t^{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{n}{n+1}} & \text{nếu } 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

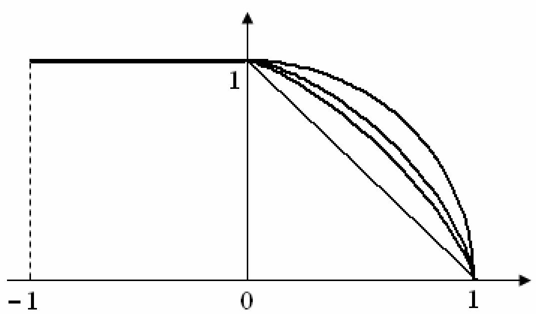
Ta kiểm tra được dãy hàm này khả vi trên $[-1,1]$:

$$\frac{d}{dt}(1-t^p)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{t^p}{1-t^p}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

bằng 0 khi $t = 0$. Đồng thời dãy hàm này hội tụ đều đến hàm số

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } -1 \le t < 0, \\ 1-t & \text{nếu } 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

nên đây là dãy Cauchy. Tuy nhiên hàm số $x(t)$ không khả vi tại điểm 0 nên không thuộc $\mathbf{C}^1[-1,1]$.



Ta sẽ thấy có một liên kết giữa tính chất đóng của một tập với tính đầy đủ của nó khi tập đó được xem như một không gian metric con. Hiển nhiên, không gian con đầy đủ của một không gian metric phải là đóng, chúng ta cũng có kết quả ngược lại trong một trường hợp đặc biệt.

5.22 Định lý. *Mọi tập đóng trong không gian metric đủ là không gian metric đủ.*

Chứng minh. Cho (X, d) là không gian metric đủ bất kỳ và $R \subset X$ là một tập đóng. Xét dãy cơ bản bất kỳ $\{x_n\} \subset F$, ta có $x_n \to x \in X$ do (X, d) là đủ. Mặt khác, do F đóng nên $x \in F$. Như vậy (F, d) cũng là không gian metric đủ. ■

Ví dụ 5.23. Đoạn $[a, b]$ là đóng trong $\mathbb{R}$ nên $[a, b]$ khi được xem như một không gian metric cũng là không gian đủ.

Ví dụ 5.24. Tập $\mathbf{C}^1[a, b] \subset \mathbf{C}[a, b]$ không là không gian đủ nên đương nhiên cũng không phải tập đóng.

Như vậy tính chất đầy đủ được xem là mạnh hơn tính chất đóng của tập hợp, bây giờ ta sẽ đưa ra một tính chất còn mạnh hơn cả tính đầy đủ của tập hợp, đó là tính compact.

5/3.2 Không gian metric compact

Cho không gian metric (X, d) và A là một tập con của X. Một họ các tập hợp mà hợp của chúng chứa A được gọi là một *phủ* của A. Nếu họ đó chỉ gồm các tập mở, thì nó được gọi là một *phủ mở* của A. Nếu tập con A chưa được chỉ rõ, thì ta mặc định $A = X$, khi đó hợp các tập thuộc phủ của X cũng chính là X.

5.23 Định nghĩa. Không gian metric (X, d) được gọi là *không gian metric compact* khi và chỉ khi với mỗi phủ mở của X đều tồn tại một phủ con hữu hạn, tức nếu $\mathscr{U}$ là họ các tập mở thoả mãn $\bigcup \mathscr{U} = X$ thì tồn tại phủ con $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$ hữu hạn sao cho $\bigcup \mathscr{V} = X$.

Một tập con A thuộc X được gọi là *tập compact* nếu với mọi phủ mở của A đều tồn tại phủ con hữu hạn phủ A.

Chú ý ở định nghĩa trên, từ "mọi" là rất quan trọng, vì với không gian metric (X, d) bất kỳ, luôn tồn tại một số phủ mở với phủ con hữu hạn - nói cách khác luôn tồn tại phủ mở hữu hạn chẳng hạn phủ mở chỉ chứa đúng một tập X, vì tập X luôn là mở.

Ví dụ 5.25. Các khoảng mở $(-n, n)$ tạo thành một phủ mở của $\mathbb{R}$ mà không có một phủ con hữu hạn. Các khoảng $(1/n, 1)$ với $n = 1, 2, \ldots$ tạo thành một phủ mở của $(0, 1)$ mà không có phủ con hữu hạn. Như vậy, $\mathbb{R}$ và $(0, 1)$ không phải là compact.

Đoạn $[a, b]$ có thể được chứng minh là tập compact trong $\mathbb{R}$ bằng định nghĩa nhưng sẽ tương đối dài dòng và khó hiểu. Định lý sau khẳng định điều đó.

5.24 Định lý (Heine-Borel). *Cho a và b là các số thực bất kỳ thoả mãn $a < b$. Khi đó, khoảng đóng $[a;b]$ là tập compact của $\mathbb{R}$.*

Chứng minh định lý trong phần phụ lục.

Định lý tiếp theo phát biểu tổng quát cho trường hợp các tập con đóng của không gian compact.

5.25 Định lý. *Cho (X,d) là một không gian compact và F là một tập con đóng của X. Khi đó, F là tập compact.*

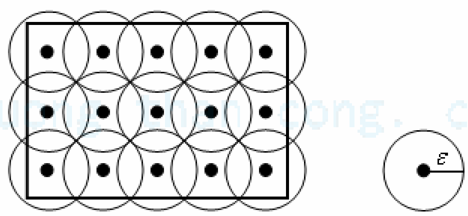
Chứng minh. Lấy $\mathscr{U}$ là một phủ mở của F. Khi đó $\mathscr{U} \cup \{X \backslash F\}$ là một phủ mở của F, nên sẽ có một phủ con $\mathscr{V}$ hữu hạn. Khi đó $\mathscr{V} \backslash \{X \backslash F\}$ là một phủ hữu hạn của F, thuộc vào $\mathscr{U}$. ∎

Bây giờ ta xét tập compact $[0,1]$. Mọi số x trong $[0,1]$ có một biểu diễn thập phân $x = 0.d_1d_2d_3\ldots$, theo nghĩa, $x = \sum_{j\geq 1} d_j/10^j$. Ở đây mỗi $d_j = d_j(x)$ là một số nguyên và $0 \leq d_j \leq 9$ với mọi j. Trong thực tiễn, chúng ta chỉ làm việc với một vài chữ số đầu tiên của phần biểu diễn thập phân. Ví dụ, chúng ta sử dụng $\pi = 3,14$ hoặc 3.1416, rất hiếm khi cần biết rằng $\pi = 3.14159265358979\ldots$. Điều này minh họa một tính chất rất quan trọng của các số trong $[0,1]$: Cho một độ chính xác bắt buộc tuỳ ý (ví dụ lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ), tồn tại một tập F hữu hạn các số trong $[0,1]$ sao cho mọi số x trong [0,1] có thể biểu diễn bằng một số y trong F với độ chính xác mong muốn (nghĩa là $|x-y| < \varepsilon$).

Tính chất trên mở rộng cho các không gian metric như sau.

5.26 Định nghĩa. Một không gian metric (X,d) được gọi là *hoàn toàn bị chặn* khi và chỉ khi cho mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một tập hợp *hữu hạn* $F \subset X$ sao cho với mọi $x \in X$, tồn tại $y \in F$ sao cho $d(x,y) < \varepsilon$.

Định nghĩa trên tương đương với sự tồn tại một phủ mở của X gồm hữu hạn các hình cầu mở có cùng bán kính ε.



Rõ ràng $[0,1]$ cũng như $[a,b]$ cũng là các tập hoàn toàn bị chặn.

Bây giờ, ta đưa ra một một số tính chất tổng quát hay dùng của các không gian compact.

5.27 Định lý. *Cho không gian metric (X,d) bất kỳ, các tính chất sau là tương đương:*

(i) *(X,d) là không gian metric compact.*

(ii) (X, d) *là đầy đủ và hoàn toàn bị chặn.*

(iii) *Mọi tập con vô hạn của X có một điểm tụ.*

(iv) *Mọi dãy các điểm của X có một dãy con hội tụ.*

Ví dụ 5.26. $\mathbb{R}$ là không gian đầy đủ nhưng vì thiếu tính chất hoàn toàn bị chặn nên không là không gian compact.

Đoạn $[a, b]$ là đầy đủ, đồng thời là hoàn toàn bị chặn bằng cách xét tập hữu hạn $F = \{a, a + \varepsilon, a + 2\varepsilon, \ldots, a + k\varepsilon\}$. Do đó theo định lý 5.27 ii) thì $[a, b]$ là tập compact. Đây là một cách chứng minh ngắn gọn định lý Heine-Borel 5.24.

Xét không gian metric (X, d) và $A \subset X$, *đường kính* của A được định nghĩa là $\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x, y) : x \in A, y \in A\}$. Tập A được gọi là *bị chặn* khi và chỉ khi đường kính của nó là hữu hạn.

Trong không gian Eclide $\mathbb{R}^k$, tập compact A cũng là tập đóng và bị chặn. Tuy nhiên, điểm đặc biệt này không thể mở rộng cho các không gian metric đầy đủ tổng quát. Thật vậy, cho S là tập hợp vô hạn bất kỳ. Với $x \neq y$ trong S, đặt $d(x, y) = 1$, và $d(x, x) = 0$. Khi đó S là đủ và bị chặn, nhưng không hoàn toàn bị chặn nên không compact.

§ 4. HÀM SỐ LIÊN TỤC

5/4.1 Định nghĩa và tính chất của hàm số liên tục

Trong $\mathbb{R}$, một hàm số f được gọi là *liên tục* tại x nếu với mọi dãy $x_n \to x$ (theo metric thông thường) thì $f(x_n) \to f(x)$ hoặc theo ngôn ngữ ε, δ: với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho khi $|y - x| < \delta$ thì $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Định nghĩa này có thể được mở rộng đối với không gian metric, khoảng cách trên $\mathbb{R}$ được thay bằng khoảng cách metric bất kỳ.

5.28 Định nghĩa. Cho hai không gian metric (X, d) và (Y, e), một hàm số f từ X vào Y được gọi là *liên tục tại* x nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho khi $d(y, x) < \delta$ thì $e\big(f(y), f(x)\big) < \varepsilon$.

Ta dễ dàng chứng minh được định nghĩa này tương đương với $f(x_n) \to f(x)$ với mọi dãy $x_n \to x$. Hàm số f được gọi là *liên tục* nếu nó liên tục tại mọi điểm $x \in X$. Nếu A là tập con nằm trong X thì có thể coi (A, d) là một không gian metric con và khái niệm f liên tục trên A được định nghĩa tương tự.

Đối với không gian metric, hàm số liên tục có đặc điểm sau:

5.29 Định lý. *Cho hàm số f từ không gian metric (X, d) vào không gian metric (Y, e). Khi đó, ba khẳng định sau là tương đương:*

(i) *f là liên tục;*

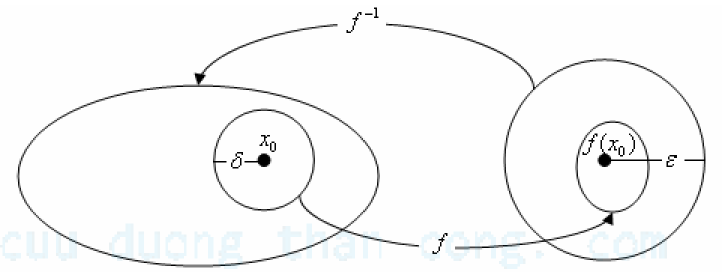
(ii) Nghịch ảnh của mọi tập đóng trong Y đều là tập đóng trong X.

(iii) Nghịch ảnh của mọi tập mở trong Y đều là tập mở trong X.

Chứng minh. (i) suy ra (ii): Giả sử F là tập đóng trong Y, để chứng minh $f^{-1}(F)$ đóng trong X ta cần chỉ ra nếu một dãy $\{x_n\} \subset f^{-1}(F)$, $x_n \to x_0$ thì $x_0 \in f^{-1}(F)$. Thật vậy do f là liên tục nên $f(x_n) \to f(x_0)$, $f(x_n) \in F$ và F là đóng nên $f(x_0) \in F$ hay $x_0 \in f^{-1}(F)$.

(ii) suy ra (iii): Hiển nhiên nếu U mở trong Y thì $Y \backslash U$ là đóng trong Y nên theo ii), $f^{-1}(Y \backslash U) = X \backslash f^{-1}(U)$ là đóng trong X. Vậy $f^{-1}(U)$ là mở trong X.

(iii) suy ra (i): Xét điểm $x_0 \in X$ bất kỳ. Với mọi $\varepsilon > 0$, nghịch ảnh của hình cầu mở $B(f(x_0), \varepsilon)$ trong Y là mở trong X. Khi đó do x_0 thuộc tập mở đấy nên tồn tại một hình cầu mở $B(x_0, \delta)$ thuộc $f^{-1}\big(B(f(x_0), \varepsilon)\big)$ trong X hay $f\big(B(x_0, \delta)\big)$ thuộc $B(f(x_0), \varepsilon)$ trong Y. Vậy nếu $d(x, x_0) < \delta$ thì $e(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$, nên f là ánh xạ liên tục.



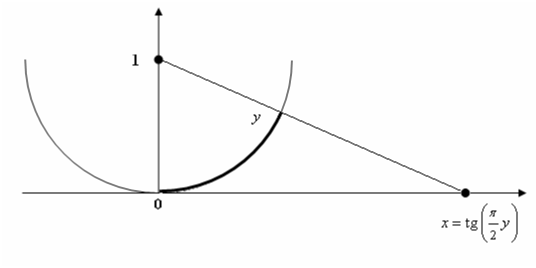
■

Ví dụ 5.27. Cho hàm $f(x) := x^2$ từ $\mathbb{R}$ vào chính nó và đặt $U = (a, b)$. Khi đó nếu $0 \le a < b$ thì $f^{-1}(U) = (-b^{1/2}, -a^{1/2}) \cup (a^{1/2}, b^{1/2})$. Như vậy nghịch ảnh của một khoảng mở qua f không phải luôn là một khoảng (trong trường hợp này, nó là hợp của hai khoảng rời nhau) nhưng nó luôn là một tập mở. Mặt khác, $f((-1, 1)) := \{f(x) : -1 < x < 1\} = [0, 1)$ không phải là mở. Do vậy ảnh của một tập mở qua một hàm liên tục chưa chắc phải mở cũng như ảnh của một tập đóng chưa chắc là đóng.

Ngoài ra, do tập mở bất kỳ trong $\mathbb{R}$ là hợp của các khoảng (a, b) nên với hàm giá trị thực f trên không gian metric (X, d) là liên tục, tương đương với $f^{-1}(a, b)$ mở trong X với mọi $a < b$. Chú ý rằng giao hai tập mở là luôn mở và $(a, b) = (a, \infty) \cap (b, \infty)$ nên hàm f là liên tục cũng tương đương với $f^{-1}(a, \infty)$ là mở trong X với a bất kỳ. Từ nhận xét này và vì một tập mở trong $\mathbb{R}$ là đo được do nó là hợp của một số hữu hạn hoặc đếm được các khoảng mở, nên hàm liên tục là hàm đo được (xem chương sau).

Một *ánh xạ đồng phôi* của X lên Y là một hàm f 1-1 từ X lên Y sao cho f và f^{-1} là liên tục. Nếu một f như vậy tồn tại, (X, d) và (Y, e) được gọi là *đồng phôi* với nhau.

Ví dụ 5.28. Một khoảng mở hữu hạn, khác rỗng (a, b) là đồng phôi với (0, 1) qua phép biến đổi tuyến tính: $f(x) := a + (b - a)x$. Toàn bộ $\mathbb{R}$ là đồng phôi với (-1,1) bằng cách đặt $y = f(x) := 2\,\mathrm{arctg}(x)/\pi$, và như vậy là đồng phôi với mọi khoảng (a, b), và đồng phôi với khoảng $(0, +\infty)$ qua ánh xạ e^x, do đó cũng là đồng phôi với khoảng $(a, +\infty)$ và $(-\infty, a)$.



Cho (X,d) và (Y,e) là hai không gian metric. Một song ánh f từ X vào Y được gọi là một *ánh xạ đẳng cự* khi và chỉ khi $e(f(x), f(y)) = d(x,y)$ với mọi x và y thuộc X. Khi đó (X,d) và (Y,e) được gọi là *đẳng cự* với nhau.

Ví dụ 5.29. Cho ví dụ, nếu $X = Y = \mathbb{R}^2$, với metric khoảng cách Ơ-clit thông thường, thì ta có các đẳng cự bằng cách lấy $f(u) = u + v$ với một vectơ v (tịnh tiến), bằng phép quay (quanh tâm bất kỳ), đối xứng qua một đường thẳng, và các phép hợp thành của chúng.

Hai không gian metric đẳng cự với nhau thì các quan hệ giữa các phần tử của chúng về mặt metric là tương đương nên ta có thể đồng nhất hai không gian này. Chẳng hạn, xét hai không gian metric đẳng cực $(X,d), (Y,e)$. Với dãy $\{x_n\} \subset X; x \in X$. Khi đó: $d(x_n, x) \to 0 \Leftrightarrow e(f(x_n), f(x)) \to 0$.

5/4.2 Hàm liên tục trên một tập compact

Trong lĩnh vực tối ưu hóa, khi người ta đang cố làm cực đại hoặc cực tiểu hóa một hàm (thường là một hàm nhiều biến), sẽ rất tốt nếu biết với những điều kiện nào cực đại hoặc cực tiểu là tồn tại. Ta đã biết trong giải tích với $a \le b$ bất kỳ trong $\mathbb{R}$ và hàm f liên tục từ $[a,b]$ vào $\mathbb{R}$, tồn tại một $x \in [a,b]$ sao cho $f(x) = \sup\{f(u) : a \le u \le b\}$. Tương tự tồn tại một $y \in [a,b]$ sao cho $f(y) = \inf\{f(v) : a \le v \le b\}$. Tính chất một hàm thực liên tục trên một đoạn là bị chặn và đạt được cực đại và cực tiểu, có thể mở rộng cho các không gian metric compact.

5.30 Định nghĩa. Cho hàm số f từ (X,d) vào (Y,e). Nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại một $\delta > 0$ sao cho khi $d(x,y) < \delta$ suy ra $e(f(x), f(y)) < \varepsilon$ với mọi x và y thuộc X, thì f được gọi là hàm *liên tục đều* từ (X,d) vào (Y,e). Nếu tính chất này chỉ đúng trên một tập con $M \subset X$ thì f được gọi là *liên tục đều* trên M.

Ví dụ 5.30. Hàm $f(x) = x^2$ từ $\mathbb{R}$ vào chính nó là liên tục nhưng không là liên tục đều (với $\varepsilon > 0$ cho trước, khi x càng lớn, δ lại càng nhỏ). Tương tự hàm $f(x) = 1/x$ liên tục trên $(0,1)$ nhưng không là liên tục đều.

Hai ví dụ nêu trên đều giống nhau ở đặc điểm là tập X không là compact. Nếu X là compact thì chắc chắn hàm liên tục trên X cũng liên tục đều theo định lý sau.

5.31 Định lý. *Một hàm liên tục f từ một tập compact bất kỳ $K \subset X$ đến (Y,e) là liên tục đều trên K (coi (K,d) như một không gian metric con).*

Chứng minh. Nếu f không liên tục đều, tồn tại $\varepsilon > 0$ và $x_n \in K$, $y_n \in K$ và sao cho $d(y_n, x_n) < 1/n$ và $e\big(f(y_n), f(x_n)\big) > \varepsilon$ với mọi n. Khi đó vì dãy bất kỳ trong K có một dãy con hội tụ (Định lý 3.3), chúng ta có thể giả sử $x_n \to x$ với $x \in K$, do vậy $y_n \to x$.

Do tính liên tục của f tại x, với n đủ lớn, $e\big(f(y_n), f(x)\big) < \varepsilon/2$ và $e\big(f(x_n), f(x)\big) < \varepsilon/2$, nên $e\big(f(y_n), f(x_n)\big) < \varepsilon$, mâu thuẫn. Vậy f là liên tục đều. ■

5.32 Định lý. *Nếu hàm f là liên tục từ tập compact bất kỳ K trong không gian metric (X, d) đến (Y, e), thì ảnh của tập K tức $f(K)$ là compact trong (Y, e).*

Chứng minh. Lấy $\mathscr{U}$ là một phủ mở của $f(K)$. Khi đó $\{f^{-1}(U) : U \in \mathscr{U}\}$ là một phủ mở của K, với phủ con hữu hạn $\{f^{-1}(V) : V \in \mathscr{V}\}$ với $\mathscr{V}$ hữu hạn. Vậy $\mathscr{V}$ là một phủ con hữu hạn của $f(K)$.■

Định lý 5.32 nói rằng ảnh liên tục của một tập compact cũng là compact, một hệ quả của nó là nếu f là một hàm giá trị thực liên tục trên một tập compact K, thì f bị chặn (tức $f(K)$ bị chặn trong $\mathbb{R}$), vì tập compact bất kỳ trong $\mathbb{R}$ bị chặn (xét phủ mở bởi các khoảng $(-n, n)$). Từ đó sẽ suy ra hàm thực liên tục trên tập compact sẽ đạt giá trị cực đại và cực tiểu (bài tập E.22).

BÀI TẬP

E.1. Chứng minh rằng một hàm $d : X \times X \to \mathbb{R}$ thoả mãn hai điều kiện (5.2),(5.3) và điều kiện $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ cũng sẽ thoả mãn điều kiện 5.1: $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$.

E.2. Chứng minh bất đẳng thức tứ giác trong không gian metric (X, d): $|d(x, y) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(y, v), \forall x, y, u, v \in X$.

E.3. Chứng minh trong không gian metric (X, d), nếu $x_n \to x$ và $y_n \to y$ thì $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ (hàm số $d(x, y)$ là hàm liên tục theo cả hai biến).

E.4. Chứng minh bất đẳng thức tam giác đối với metric d_∞ trong không gian $\mathbb{R}^k$.

E.5. Chứng minh bất đẳng thức tam giác đối với metric d_2 trong không gian các dãy số có tổng bình phương bị chặn l^2.

E.6. Trên $\mathbb{R}^2$, đặt $d_1\big((x, y), (u, v)\big) := |x - u| + |y - v|$. Chỉ ra d_1 là một metric và tập mở trong $(\mathbb{R}^2, d_1)$ cũng là mở đối với metric thông thường và ngược lại.

E.7. Chứng minh mệnh đề 5.13.

E.8. Chứng minh mệnh đề 5.14.

E.9. Cho không gian metric (X, d) và tập hợp $A \subset X$ bất kỳ, *biên của tập* A được định nghĩa là $\partial A := \overline{A} \setminus \operatorname{int} A$. Hãy chứng tỏ:

a) Biên của tập A là đóng và trùng với biên của tập $X \setminus A$.

b) Với hai tập A và B bất kỳ trong X, $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$. Cho một ví dụ khi $\partial(A \cup B) \neq \partial A \cup \partial B$.

E.10. Một không gian metric (X, d) được gọi là một không gian *siêu metric* và d là một *siêu metric* nếu $d(x, z) \leq \max\big(d(x, y), d(y, z)\big)$ với mọi x, y và z trong X. Chứng minh rằng trong không gian siêu metric, hình cầu mở $B(x, r)$ bất kỳ đều là tập đóng.

E.11. Chứng minh hình vuông đơn vị $(0, 1) \times (0, 1)$ là tập mở trong không gian $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

E.12. Chứng minh hình tròn tâm $(0, 0)$ bán kính 1 là tập mở trong không gian $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$.

E.13. Chứng minh trong không gian $\mathbb{R}$, $d(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$ là một metric và không gian metric này là không đầy đủ.

E.14. Chứng minh không gian $C^L_{[a,b]}$ các hàm liên tục trên $[a, b]$ với metric $d(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt$ không là không gian đầy đủ.

Gợi ý: Giả sử $[a, b] = [0, 1]$, sử dụng dãy hàm số sau:

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{với } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ n + 1 - 2nt & \text{với } \frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{với } \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

E.15. Tìm một phủ mở của hình vuông đơn vị $(0, 1) \times (0, 1)$ mà không có một phủ con hữu hạn.

E.16. Chứng minh trong không gian metric (X, d), tập A hoàn toàn bị chặn thì cũng bị chặn.

E.17. Cho không gian metric (X, d), $a \in X$ cố định và định nghĩa $f : X \to \mathbb{R}$ là $f(x) = d(x, a)$. Chứng minh f là liên tục.

E.18. Cho (X, d_X), (Y, d_Y) và (Z, d_Z) là các không gian metric và nếu $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ là các hàm liên tục thì hàm hợp

$$h = g \circ f : X \to Z$$

định nghĩa là $h(x) = g\big(f(x)\big)$ cũng liên tục.

E.19. Một hàm giá trị thực f trên không gian metric X được gọi là *nửa liên tục trên* khi và chỉ khi với mỗi $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([a, \infty))$ là đóng, hoặc *nửa liên tục dưới* nếu $-f$ là nửa liên tục trên. Hãy chứng minh:

i) Hàm f là nửa liên tục trên khi và chỉ khi với mọi $x \in X$

$$f(x) \geq \limsup_{y \to \infty} f(y) := \inf\{\sup\{f(y) : y \in U, y \neq x\} : x \in U\}$$

với quy ước $\sup \emptyset := -\infty$

ii) Hàm f là liên tục khi và chỉ khi nó là nửa liên tục cả trên lẫn dưới.

iii) Nếu f là nửa liên tục trên trong một không gian compact X thì với $t \in X$ nào đó, $f(t) = \sup f := \sup\{f(x) : x \in S\}$.

Gợi ý: Lấy $a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \uparrow \sup f$. Xét $f^{-1}((-\infty, a_n)), n = 1, 2, \ldots$.

E.20. Giả sử x_n là một dãy trong không gian metric compact sao cho mọi dãy con hội tụ của nó đều có cùng một giới hạn là x. Chứng minh rằng x_n hội tụ tới x.

E.21. Dựa vào Định lý 5.27, hãy chứng minh một tập con đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ là compact.

E.22. Chứng minh nếu f là hàm liên tục từ không gian metric (X, d) vào $\mathbb{R}$ và A là tập compact trong X thì tồn tại $x_0, y_0 \in A$ sao cho $f(x_0)$ là giá trị cực đại của f trên A, $f(y_0)$ là giá trị cực tiểu của f trên A.

Phụ Lục

Chứng minh của một số định lý

Chứng minh (**Chứng minh của định lý 5.16).** i) Nếu U mở và $x \in U$, tồn tại một hình cầu $B(x, r)$ nằm trong U, khi đó tồn tại N sao cho $d(x, x_n) < r, \forall n > N$ tức là $x_n \in B(x, r) \subset U, \forall n > N$. Ngược lại, nếu U không mở thì tồn tại x không là điểm trong của U tức mọi hình cầu $B(x, 1/n)$ đều có $B(x, 1/n) \cap U^C \neq \emptyset$. Chọn dãy $\{x_n\}$ sao cho $x_n \in B(x, 1/n) \cap U^C$, ta có $x_n \to x$ nhưng $\{x_n\} \notin U$ với mọi n.

ii) Nếu có một dãy $x_n \to x$ mà $x \notin [A]$ thì $x_{n_0} \notin A$ với n_0 nào đó. Thật vậy do $x \in [A]^c$ trong đó $[A]^c$ mở, theo i) tồn tại $x_{n_0} \in [A]^c$ hay $x_{n_0} \notin A$ với n_0 nào đó. Vậy mọi điểm tụ của A đều thuộc $[A]$.

Ngược lại, nếu $x \in [A]$, thì x không là điểm trong của $[A]^c$ nên từ chứng minh của i) ta cũng xây dựng được một dãy $x_n \to x$, $\{x_n\} \notin [A]^c$ tức $\{x_n\} \in [A]$ với mọi n.

iii) Chú ý rằng A đóng khi và chỉ khi $[A] = A$, và áp dụng ii). ■

Chứng minh (**Chứng minh của định lý 5.18).** Giả sử A là đếm được và trù mật trong X. Đặt $\mathscr{U}$ là tập hợp tất cả các hình cầu $B(x, 1/n)$ với $x \in U$ và $n = 1, 2, \ldots$. Dễ thấy $\mathscr{U}$ là một họ đếm được. Để chứng minh chiều thuận của định lý, ta lấy U là tập mở bất kỳ và $y \in U$. Khi đó với m nào đó, $B(y, 1/m) \subset U$. Do Định lý (5.16) iii), lấy $x \in A$ sao cho $d(x, y) < 1/(2m)$. Khi đó $y \in B(x, 1/(2m)) \subset B(y, 1/m) \subset U$, nên U là hợp của các phần tử thuộc $\mathscr{U}$ mà nó chứa.

Ngược lại, giả sử tồn tại một họ đếm được $\mathscr{U}$ các hình cầu trong X thoả mãn giả thiết, có thể giả sử nó chứa các tập khác rỗng. Do tiên đề chọn, lấy f là một hàm trên $\mathbb{N}$ có tập giá trị chứa ít nhất một điểm của mỗi tập trong $\mathscr{U}$. Khi đó tập giá trị này trù mật trong X. Thật vậy với $x \in X$ bất kỳ, $B(x, 1/n)$ luôn chứa một tập trong $\mathscr{U}$ nên cũng chứa một $f(k_n)$ nào đó, suy ra $d(x, f(k_n)) < 1/n$. ■

Chứng minh (**Chứng minh của định lý 5.24).** Gọi $\mathscr{U}$ là lớp các tập mở của $\mathbb{R}$ mà mỗi điểm của đoạn $[a, b]$ thuộc ít nhất vào một tập mở của $\mathscr{U}$. Chúng ta phải chỉ ra rằng $[a, b]$ được phủ bởi một hợp hữu hạn các tập mở của $\mathscr{U}$.

Gọi S là tập tất cả các $\tau \in [a; b]$ mà $[a; \tau]$ được phủ bởi hữu hạn các tập mở thuộc vào $\mathscr{U}$ và ký hiệu $s = \sup S$. Khi đó $s \in W$ với W là tập mở nào đó thuộc vào $\mathscr{U}$. Hơn nữa W là tập mở trong $\mathbb{R}$, và như vậy tồn tại $\delta > 0$ thoả mãn $(s - \delta; s + \delta) \subset W$. Mặt khác $s - \delta$ không là cận trên của S, nên tồn tại $\tau \in S$ thoả mãn $\tau > s - \delta$. Từ định nghĩa của S, $[a, \tau]$ bị phủ bởi lớp hữu hạn các tập mở $V_1, V_2, \ldots, V_r$ thuộc $\mathscr{U}$.

Lấy $t \in [a, b]$ thoả mãn $\tau \leq t < s + \delta$. Khi đó

$$[a, t] \subset [a, \tau] \cup (s - \delta, s + \delta) \subset V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_r \cup W,$$

và do đó $t \in S$. Đặc biệt $s \in S$, và như thế thì $s = b$, vì nếu không s không thể là cận trên của tập S. Vậy $b \in S$ suy ra $[a, b]$ bị phủ bởi một hợp hữu hạn các tập mở thuộc $\mathscr{U}$. ■

Chứng minh (**Chứng minh của định lý 5.27.**) (i) suy ra (ii): Cho (X, d) là compact. Lấy $r > 0$ tuỳ ý, tập hợp tất cả các lân cận $\{B(x, r) : x \in X\}$ là một phủ mở và phải có một phủ con hữu hạn. Rõ ràng tập hợp hữu hạn tâm của các hình cầu này thoả mãn tính chất của tập F trong định nghĩa của không gian hoàn toàn bị chặn. Do vậy (X, d) là hoàn toàn bị chặn.

Bây giờ lấy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy bất kỳ trong V. Khi đó mỗi số nguyên dương m, tồn tại $n(m)$ nào đó sao cho $d(x_n, x_{n(m)}) < 1/m$ với $n > n(m)$. Đặt $U_m = \{x : d(x, x_{n(m)}) > 1/m\}$. Khi đó U_m là một tập mở. (Nếu $y \in U_m$ và $r := d(x_{n(m)}, y) - 1/m$, thì $r > 0$ và $B(y, r) \subset U_m$.) Vậy $x_n \notin U_m$ với $n > n(m)$ do định nghĩa của $n(m)$. Do đó $x_k \notin \bigcup\{U_m : 1 \leq m < s\}$ nếu $k > \max\{n(m) : m < s\}$.

Vì U_m không có một phủ con hữu hạn, chúng không thể tạo thành một phủ mở của X. Như vậy tồn tại một x sao cho $x \notin U_m$ với mọi m. Suy ra $d(x_n, x_{n(m)}) \leq 1/m$ với mọi m. Khi đó do bất đẳng thức tam giác, $d(x, x_n) \leq 2/m$. Nên $\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$ và dãy $\{x_n\}$ hội tụ tới x. Do vậy (X, d) là đủ cũng như hoàn toàn bị chặn, vậy (I) suy ra (II).

Tiếp theo, giả sử có (ii) và ta sẽ chứng minh (iii). Với mỗi $n = 1, 2, \ldots$, đặt F_n là một tập con hữu hạn của X sao cho với mọi $x \in X$, ta có $d(x, y) < 1/n$ với $y \in F_n$ nào đó.

Cho A là tập con vô hạn bất kỳ của X. (nếu X là hữu hạn, thì hiển nhiên (iii) là đúng.) Vì họ hữu hạn các lân cận $B(y, 1)$ với $y \in F_1$ phủ X, phải tồn tại $x_1 \in F_1$ nào đó sao cho $A \cap B(x_1, 1)$ là vô hạn. Bằng quy nạp, chúng ta chọn $x_n \in F_n$ với mọi n sao cho $A \cap \bigcap\{B(x_m, 1/m) : m = 1, \ldots, n\}$ là vô hạn với mọi số nguyên dương n. Điều này suy ra $d(x_m, x_n) < 1/m + 1/n < 2/m$ khi $m < n$ (tồn tại $y \in B(x_m, 1/m) \cap B(x_n, 1/n)$ nào đó và $d(x_m, x_n) < d(x_m, y) + d(x_n, y)$). Như vậy $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy. Vì (X, d) là đủ, dãy này hội tụ tới $x \in S$, và $d(x_n, x) < 2/n$ với mọi n. Do đó $B(x, 3/n)$ chứa $B(x_n, 1/n)$, bao gồm một tập con vô hạn của A. Vì $3/n \to 0$ khi $n \to \infty$, x là một điểm giới hạn của A. Vậy (ii) suy ra (iii).

Bây giờ giả sử có (iii). Nếu$\{x_n\}$ là một dãy với tập giá trị vô hạn, cho x một điểm giới hạn của tập giá trị này. Khi đó tồn tại $n(1) \leq n(2) \leq n(3) \leq \ldots$ sao cho $d(x_{n(k)}, x) < 1/k$ với mọi k, nên $x_{n(k)}$ hội tụ tới x khi $k \to \infty$. Nếu $\{x_n\}$ có tập giá trị hữu hạn, thì tồn tại một x sao cho $x_n = x$ với vô hạn giá trị của n. Do đó tồn tại một dãy con $x_{n(k)}$ sao cho $x_{n(k)} = x$ với mọi k, suy ra $x_{n(k)} \to x$. Vậy (iii) suy ra (iv).

Cuối cùng, chúng ta chứng minh (iv) suy ra (i).

Cho $\mathscr{U}$ là một phủ mở của X. Với $x \in S$, đặt

$$f(x) := \sup\{r : B(x, r) \subset U \text{ với } U \in \mathscr{U} \text{ nào đó}\}.$$

Khi đó $f(x) > 0$ với mọi $x \in X$. Ta cần một khẳng định mạnh như sau:

5.33 Bổ đề. $\inf\{f(x) : x \in X\} > 0$.

Chứng minh. Giả sử bổ đề sai, tồn tại một dãy $\{x_n\}$ trong X sao cho $f(x_n) < 1/n$ với $n = 1, 2, \ldots$. Cho $x_{n(k)}$ là một dãy con hội tụ tới $x \in X$ nào đó. Khi đó với $U \in \mathscr{U}$ và $r > 0, B(x, r) \subset U$. Khi đó với k đủ lớn sao cho $d(x_{n(k)}, x) < r/2$, ta có $f(x_{n(k)}) > r/2$, mâu thuẫn với k lớn. ∎

Bây giờ tiếp tục chứng minh (iv) suy ra (i), đặt $c := \min(1, \inf\{f(x) : x \in X\}) > 0$. Chọn bất kỳ $x_1 \in S$. Bằng cách quy nạp, cho trước $x_1, \ldots, x_n$, chọn x_{n+1} nếu có thể để $d(x_{n+1}, x_j) > c/2$ với mọi $j = 1, \ldots, n$. Nếu điều đó có thể thực hiện được với mọi n, ta có một dãy $\{x_n\}$ với $d(x_n, x_m) > c/2$ và $m \neq n$. Một dãy như vậy không có dãy con Cauchy và do đó không có dãy con hội tụ. Suy ra có một n hữu hạn sao cho $X = \bigcup_{j \leq n} B(x_j, c/2)$. Bởi định nghĩa của f và c, với mỗi $j = 1, \ldots, n$ tồn tại một $U_j \in \mathscr{U}$ sao cho $B(x_j, c/2) \subset U_j$. Khi đó hợp của những U_j này là X, và $\mathscr{U}$ có một phủ con hữu hạn, kết thúc chứng minh định lý. ∎

CHƯƠNG 6

KHÔNG GIAN CÁC HÀM KHẢ TÍCH

§ 1. KHÔNG GIAN TUYẾN TÍNH ĐỊNH CHUẨN

Chúng ta đã học về không gian vectơ $\mathbb{R}^m$ trong đại số tuyến tính. Do nhu cầu nghiên cứu về các không gian hàm số, chúng ta phải mở rộng khái niệm không gian vectơ thành lý thuyết trừu tượng tổng quát.

6/1.1 Không gian vectơ

6.1 Định nghĩa. Một tập X (bất kỳ) được gọi là một *không gian vectơ* trên trường số thực nếu:

a) Tồn tại một ánh xạ từ $X \times X \to X$ tương ứng mỗi cặp $x, y \in X$ bất kỳ với duy nhất một phần tử của X, được gọi là *tổng của x và y*, ký hiệu là $x + y$, và một ánh xạ từ $\mathbb{R} \times X \to X$ tương ứng mỗi số $\alpha \in \mathbb{R}$ và phần tử $x \in X$ với duy nhất một phần tử của X được gọi là *tích của x và α*, ký hiệu là αx.

b) Hai quy tắc trên thoả mãn 8 tiên đề:

1) $x + y = y + x$ (tính giao hoán của phép cộng).

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (tính kết hợp của phép cộng).

3) tồn tại một phần tử 0 (gọi là *phần tử không* hay *vectơ không*) sao cho $x + 0 = x$ với mọi $x \in X$.

4) Với mỗi $x \in X$ tồn tại phần tử $-x \in X$ (gọi là *phần tử đối của x*) sao cho $x + (-x) = 0$.

5) $1.x = x$.

6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bất kỳ.

7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Không gian vectơ còn được gọi là *không gian tuyến tính* và các phần tử của nó được gọi là *vectơ*.

Ví dụ 6.1. Trong đại số tuyến tính, chúng ta đã biết các không gian Euclid $\mathbb{R}^k$ quen thuộc với phép cộng hai vectơ và nhân vectơ với 1 số: Giả sử $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ thì $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$; $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$.

Ví dụ 6.2. Không gian các hàm bị chặn trên $[a, b]$, tức $\mathbf{B}[a, b]$ là không gian vectơ với hai phép toán được định nghĩa như sau:

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t),$$
$$(\alpha x)(t) = \alpha . x(t).$$

Ta đã biết $x + y, \alpha x \in \mathbf{B}[a, b]$ với mọi $x, y \in \mathbf{B}[a, b], \alpha \in \mathbb{R}$ nên hai phép toán định nghĩa như trên là đúng đắn. Dễ dàng chứng minh được hai phép toán này thoả mãn 8 tiên đề trên. Ở đây vectơ không là hàm $x \equiv 0$.

Ví dụ 6.3. Không gian các hàm khả tích Lebesgue trên không gian độ đo $(X, \mathscr{F}, \mu)$, tức $\mathscr{L}^1(X, \mathscr{F}, \mu)$ hay $\mathscr{L}^1(X)$ là không gian vectơ với hai phép toán được định nghĩa tương tự như trong $\mathbf{B}[a, b]$ và vectơ không cũng là hàm $f \equiv 0$.

Ở chương Tích phân Lebesgue ta cũng đã biết $f + g, \alpha f \in \mathscr{L}^1(X)$ với mọi $f, g \in \mathscr{L}^1(X), \alpha \in \mathbb{R}$.

Tập hợp các véctơ Y thuộc không gian vectơ X được gọi là *không gian con* của X nếu $Y \neq \emptyset$ và nó kín đối với hai phép toán vectơ : $\forall x, y \in Y \Rightarrow x + y \in Y$, $x \in Y \Rightarrow \alpha x \in Y$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 6.4. Tập tất cả các nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có nghiệm không tầm thường là không gian con của không gian $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ 6.5. Lớp các hàm liên tục trên $[a, b]$, tức $\mathbf{C}[a, b]$ là một không gian vectơ con của $\mathbf{B}[a, b]$. Không gian các hàm liên tục trên $[a, b]$ và cùng triệt tiêu tại điểm $c \in [a, b]$ là một không gian con của $\mathbf{C}[a, b]$.

6/1.2 Khái niệm không gian tuyến tính định chuẩn

Nhận xét rằng, không gian tuyến tính luôn có một vectơ là vectơ không. Trong các không gian vectơ, để xét tới sự hội tụ, thay vì sử dụng khái niệm metric người ta thường sử dụng khái niệm chuẩn. Một chuẩn trong không gian vectơ xác định một metric và ngược lại.

6.2 Định nghĩa. Một *không gian vectơ (tuyến tính) định chuẩn* là không gian vectơ X, trên đó tồn tại một hàm số từ X vào $\mathbb{R}$, ký hiệu $\|x\| : X \to \mathbb{R}$, thoả mãn 3 tính chất:

1) $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ (tính thuần nhất của chuẩn),

3) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ (bất đẳng thức tam giác),

với mọi $x, y \in X$ và $\alpha \in \mathbb{R}$.

Giá trị $\|x\|$ được gọi là *chuẩn* của phần tử x.

Như vậy nếu đặt $d(x,y) = \|x-y\|$ thì rõ ràng d là một metric trên X, ngược lại nếu d là metric trên không gian vectơ X, ta xác định một chuẩn như sau $\|x\| := d(x,0)$.

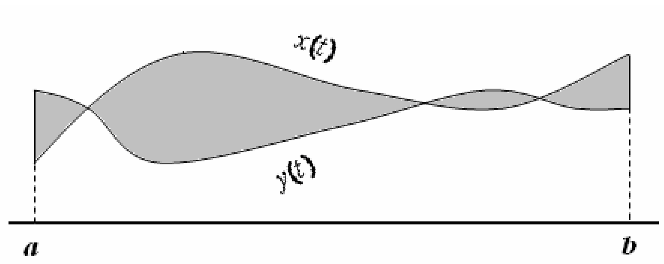
Ví dụ 6.6. Trong $\mathbb{R}^k$, ta có các chuẩn sau:

$$\begin{aligned}
\|x\|_1 &= \textstyle\sum_{i=1}^k |x_i|,\\
\|x\|_2 &= \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^k x_i^2}\ \text{, hoặc nếu coi } x \text{ là một vectơ cột thì } \|x\|^2 = x'x,\\
\|x\|_p &= \left(\textstyle\sum_{i=1}^k |x_i|^p\right)^{1/p} \text{ với } p > 1,\\
\|x\|_\infty &= \max |x_i|, i = 1, 2, \ldots, k.
\end{aligned}$$

Ví dụ 6.7. Trong $\mathbf{C}[a,b]$ ta định nghĩa $\|x\|_\infty = \sup_{a\le t\le b} |x(t)|$, khi đó tương tự như trong chương không gian metric, ta khẳng định đây là một chuẩn.

Ví dụ 6.8. Trong không gian $\mathbf{C}[a,b]$ ta có thể định nghĩa một chuẩn khác như sau:

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|dt.$$



Chuẩn của $x(t) - y(t)$ là diện tích hình bị chặn trên và dưới bởi đồ thị hai hàm này

Ta dễ dàng kiểm tra được $\|\alpha x\|_1 = |\alpha|\|x\|_1$ và $\|x+y\|_1 \le \|x\|_1 + \|y\|_1, \forall x, y \in \mathbf{C}[a,b]$, $\|x\|_1 \ge 0$. Bây giờ ta phải chỉ ra nếu $\|x\|_1 = 0$ thì $|x| \equiv 0$.

Thật vậy nếu $\|x\|_1 = 0$, theo chương 3 $|x| = 0$ hkn. Giả sử tồn tại t_0 sao cho $x(t_0) \ne 0$. Khi đó với $n \in \mathbb{N}$ bất kỳ, trong khoảng $\left(t_0, t_0 + \frac{1}{n}\right)$ phải có một số t_n thoả mãn $x(t_n) = 0$ bởi nếu không, $x(t) \ne 0, \forall t \in \left(t_0, t_0 + \frac{1}{n}\right)$, mâu thuẫn với giả thiết $|x| = 0$ hkn. Vậy ta sẽ chọn được một dãy $\{t_n\} \to t_0$ sao cho $x(t_n) = 0$, mà x liên tục nên suy ra $x(t_0) = 0$, vô lý. Vậy $x(t) = 0, \forall t \in [a,b]$.

Chúng ta hy vọng có thể mở rộng chuẩn tích phân như trên cho không gian các hàm khả tích Lebesgue trên $(X, \mathscr{F}, \mu)$. Tuy nhiên khi đó, điều kiện $\int_X |f| dm = 0 \Leftrightarrow f = 0$ không được thoả mãn.

Ta chỉ có thể suy ra được $f = 0$ hkn. Điều đó có thể được khắc phục nếu chúng ta đồng nhất các hàm bằng nhau hầu khắp nơi làm một.

Nhắc lại trong lớp các hàm đo được trên $(X, \mathscr{F}, \mu)$, quan hệ sau, ký hiệu là $\sim$, là một quan hệ tương đương

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ (h.k.n).}$$

Với $f \in \mathscr{L}^1(X)$, ký hiệu $f^\sim = \{g \in \mathscr{L}^1(X) : g \sim f\}$ - tập hợp các hàm bằng f hkn trên X, còn được gọi là lớp tương đương chứa f. Chú ý ở đây, $f^\sim \cap g^\sim$ bằng $\emptyset$ hoặc chính là $f^\sim$ (khi $f = g$ h.k.n).

6.3 Định nghĩa. Lớp tất cả các tập $f^\sim, f \in \mathscr{L}^1(X)$ là một không gian vectơ định chuẩn, ký hiệu là $L^1(X, \mathscr{F}, \mu)$ - hoặc $L^1(X)$ - với các phép toán được định nghĩa như sau:

$$f^\sim + g^\sim = (f+g)^\sim,$$
$$\alpha(f^\sim) = (\alpha f)^\sim, \forall f, g \in \mathscr{L}^1(X), \alpha \in \mathbb{R}.$$

Chuẩn trên $L^1(X)$ được xác định bởi công thức:

$$\|f^\sim\|_1 = \int_a^b |f| dm.$$

Định nghĩa của hai phép toán tuyến tính trong $L^1(X)$ không phụ thuộc vào việc chọn hàm đại diện của lớp tương đương. Thật vậy nếu $f^\sim = f_1^\sim$ và $g^\sim = g_1^\sim$ thì rõ ràng $(f+g)^\sim = (f_1 + g_1)_1^\sim$.

Để cho đơn giản, từ nay về sau ta sẽ quy ước dùng ký hiệu f thay cho $f^\sim$ trong không gian L^1. Như vậy trong L^1, hai hàm f và g bằng nhau hkn được xem là trùng nhau.

6/1.3 Sự hội tụ trong không gian vectơ định chuẩn

Sự hội tụ trong một không gian vectơ định chuẩn với metric giữa hai vectơ x, y được xác định qua chuẩn $d(x, y) = \|x - y\|$, có thể được phát biểu lại theo ngôn ngữ của chuẩn:

6.4 Định nghĩa. Dãy các vectơ $\{x_n\}$ trong không gian vectơ định chuẩn X được gọi là *hội tụ* tới một vectơ $x_0 \in X$ nếu $\|x_n - x_0\| \to 0$ trong $\mathbb{R}$.

Dựa vào chương không gian metric, ta suy ra một số tính chất của sự hội tụ trong không gian vectơ định chuẩn như sau:

1) Nếu $x_n \to x_0$ thì $\|x_n\| \to \|x_0\|$, nói cách khác *chuẩn* $\|x\|$ *là một hàm giá trị thực liên tục của* x.

2) Mọi dãy hội tụ trong X đều bị chặn theo nghĩa: Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ thì tồn tại K sao cho $\|x_n\| \leq K$ với mọi n.

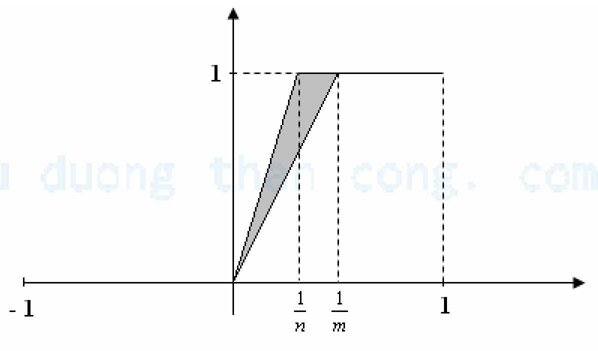
3) Nếu $x_n \to x_0, y_n \to y_0$ trong X thì $x_n + y_n \to x_0 + y_0$ trong X, ngoài ra nếu $\alpha_n \to \alpha_0$ trong $\mathbb{R}$ thì $\alpha_n x_n \to \alpha_0 x_0$ trong X.

Ta gọi dãy $\{x_n\}$ thuộc X là *dãy cơ bản* hay *dãy Cauchy* nếu $\lim\limits_{m,n\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$. Nếu trong không gian vectơ định chuẩn X, mọi dãy cơ bản đều hội tụ thì X được gọi là *không gian đủ* hoặc *không gian Banach*.

Ví dụ 6.9. Ta dễ thấy không gian hữu hạn chiều $\mathbb{R}^k$ là một không gian Banach, với chuẩn thông thường $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}$ hoặc chuẩn $|x_1| + \cdots + |x_k|$. Không gian $\mathbf{C}[a,b]$ với chuẩn $\|.\|_\infty$ cũng là không gian Banach.

Ví dụ 6.10. Không gian $\mathbf{C}[a,b]$ với chuẩn $\|.\|_1$ không là không gian Banach. Thật vậy ta xét dãy sau trong $\mathbf{C}[-1,1]$:

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } -1 \le t < 0, \\ nt & \text{nếu } 0 \le t < \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{nếu } \frac{1}{n} \le t \le 1. \end{cases}$$



Đây là dãy Cauchy do $\int\limits_{-1}^{1} |x_n - x_m|dt = \dfrac{|1/n - 1/m|}{2} \to 0$ khi $m,n \to \infty$. Dãy x_n này hội tụ theo điểm tới hàm số sau:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } -1 \le t \le 0, \\ 1 & \text{nếu } 0 < t \le 1. \end{cases}$$

Dễ thấy $x(t) \notin \mathbf{C}[-1,1]$ và $\int\limits_{[-1,1]} |x_n - x|dt \to 0$, tuy nhiên vẫn có thể tồn tại hàm $g \in \mathbf{C}[-1,1]$ sao cho $\|x_n - g\|_1 \to 0$. Ta sẽ chứng minh điều đó không thể xảy ra.

Thật vậy giả sử tồn tại $g \in \mathbf{C}[-1,1]$ sao cho $\|x_n - g\|_1 \to 0$, khi đó

$$\int\limits_{[-1,1]} |x - g|dt \le \int\limits_{[-1,1]} |x_n - x|dt + \int\limits_{[-1,1]} |g - x_n|dt \to 0.$$

Do vậy $\int\limits_{[-1,1]} |x - g|dt = 0$. Suy ra $\int\limits_{[-1,0)} |x - g|dt = 0 = \int\limits_{(0,1]} |x - g|dt$ mà x và g đều liên tục trên $[-1,0)$ và $[(0,1])$ nên $g(t) = x(t), \forall t \in [-1,0) \cup (0,1]$. Như vậy $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = 1$, $\lim\limits_{t\to 0^-} g(t) = 0$ nên hàm g không liên tục tại 0, vô lý.

Trong tiết sau chúng ta sẽ nghiên cứu không gian định chuẩn được ta quan tâm nhất, đó là các không gian các hàm khả tích luỹ thừa bậc p là $L^p(X)$.

§ 2. KHÔNG GIAN CÁC HÀM CÓ LUỸ THỪA BẬC p KHẢ TÍCH

6/2.1 Các bất đẳng thức cho tích phân

Giả sử f, g là các hàm đo được trong không gian độ đo $(X, \mathscr{F}, \mu)$, để chứng minh tập tất cả các hàm có luỹ thừa bậc p khả tích là một không gian vectơ, chúng ta cần hai bất đẳng thức cơ bản sau.

6.5 Định lý (Bất đẳng thức Hölder). *Cho hai số p và q thoả mãn $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Khi đó ta có*

$$\int\limits_X |fg|\, d\mu \leq \Big(\int\limits_X |f|^p\, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int\limits_X |g|^q\, d\mu\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{6.6}$$

Bất đẳng thức 6.6 còn được viết như sau:

$$\int_E |fg|\, d\mu \leq \Big(\int_E |f|^p\, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_E |g|^q\, d\mu\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{6.7}$$

Chứng minh. Nếu $\int_X |f|^p\, d\mu = 0$, thì $f = 0$ h.k.n nên $fg = 0$ h.k.n. Suy ra $\int_X |fg|\, d\mu = 0$ và bất đẳng thức (6.6) là đúng, cũng chứng minh tương tự với $\int_X |f|^p\, d\mu = 0$. Do đó chúng ta có thể giả sử các đại lượng này khác 0.

Ta chú ý là nếu thay f và g bằng cf và dg với c, d bất kỳ thì bất đẳng thức (6.6) là không đổi nên có thể giả sử $\int_X |f|^p\, d\mu = \int_X |f|^p\, d\mu = 1$ trong trường hợp hai giá trị này là hữu hạn khác 0.

Tiếp theo chúng ta sẽ chứng minh bổ đề sau:

6.8 Bổ đề. *Với các số thực a và b dương và p, q như trên, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.*

Chứng minh. Chú ý 2 số p và q đều lớn hơn 1. Chia 2 vế cho b^q, chúng ta đưa về chứng minh $ab^{1-q} \leq \frac{a^p b^{-q}}{p} + \frac{1}{q}$.

Đặt $t = ab^{1-q}$, bất đẳng thức trên trở thành $t \leq \frac{t^p}{p} + \frac{1}{q}$. Để chứng minh tiếp, chúng ta lấy đạo hàm của hàm số $\varphi(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{1}{q} - t$ theo t và được $\varphi'(t) = t^{p-1} - 1$ bằng 0 tại $t = 1$. Dễ thấy hàm $\varphi(t)$ với t dương đạt cực tiểu tại 1 mà $\varphi(1) = 0$ nên $0 \leq \varphi(t)$. Vậy bổ đề đã được chứng minh. ∎

Áp dụng bổ đề cho $a(x) := |f(x)|$ và $v(x) := |g(x)|$, khi đó ta có $|f(x)g(x)| \leq \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}$ với mọi x. Lấy tích phân hai vế ta được $\int_X |fg|\, d\mu \leq 1$, suy ra bất đẳng thức Hölder. Trường hợp hai giá trị ở vế phải bất đẳng thức bằng vô cùng thì nó là hiển nhiên. Vậy bất đẳng thức Hölder luôn đúng. ∎

Chú ý rằng, khi $p = q = 2$ ta được một bất đẳng thức rất nổi tiếng và thường xuyên được sử dụng.

6.9 Hệ quả (Bất đẳng thức Bunyakowsky - Schwarz).

$$\int_X |fg| d\mu \leq \Big(\int_X |f|^2 d\mu\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_X |g|^2 d\mu\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Bất đẳng thức này có một chứng minh trực tiếp tương đối nhanh như sau:

Ta có $\int (|f| - t|g|)^2 d\mu = \int f^2 d\mu - t.2\int |fg| d\mu + t^2 \int g^2 d\mu \geq 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi biệt thức $\Delta' = (\int |fg| d\mu)^2 - \Big(\int |f|^2 d\mu\Big)\Big(\int |g|^2 d\mu\Big) \leq 0$.

6.10 Định lý (Bất đẳng thức Minkowski). *Cho* $1 \leq p \leq \infty$, f *và* g *là hai hàm đo được trên* $(X, \mathscr{F}, \mu)$ *thì*

$$\Big(\int_X |f+g|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int_X |f|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_X |g|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{6.11}$$

Chứng minh. Với $p = 1$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Với $1 < p < \infty$, chọn q sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, áp dụng bất đẳng thức Holder (6.6) chúng ta có

$$\begin{aligned}
\int_X |f+g|^p \, d\mu &\leq \int_X |f|\,|f+g|^{p-1} \, d\mu + \int_X |g|\,|f+g|^{p-1} \, d\mu \\
&\leq \Big(\int_X |f|^p \, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_X |f+g|^{(p-1)q} \, d\mu\Big)^{\frac{1}{q}} + \\
&\quad + \Big(\int_X |g|^p \, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_X |f+g|^{(p-1)q} \, d\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \Big|\Big(\int_X |f|^p \, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_X |g|^p \, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}\Big| \Big(\int_X |f+g|^p \, d\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{do } (p-1)q = p.
\end{aligned}$$

Mà $1 - 1/q = 1/p$, chia cả hai vế trên cho thừa số cuối $\Big(\int |f+g|^p\Big)^{\frac{1}{q}}$, ta được bất đẳng thức (6.11). ■

Chú ý. Nếu μ là độ đo đếm trên tập X có đếm được phần tử và tập các giá trị của hàm f trên X là $x_1, x_2, \ldots$; của hàm g là $y_1, y_2, \ldots$ thì các bất đẳng thức Holder và Minkowski có dạng

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{1/q},$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

với $p > 1, 1/p + 1/q = 1$.

$^{6/}$2.2 Không gian $\mathbf{L}^p$

6.12 Định nghĩa. Cho không gian độ đo bất kỳ $(X, \mathscr{F}, \mu)$ và $1 \leq p < \infty$, ta ký hiệu $\mathbf{L}^p(X, \mathscr{F}, \mu)$ hoặc $\mathbf{L}^p(X)$ là tập hợp của tất cả các hàm đo được f trên X sao cho $\int |f|^p \, d\mu < \infty$ hay f có luỹ thừa bậc p khả tích trên X.

Nếu X là tập đo được Lebesgue trong $\mathbb{R}^k$, μ là độ đo Lebesgue thì $\mathbf{L}^p(X,\mu)$ được ký hiệu là $\mathbf{L}^p(X)$. Trường hợp $X = [a,b] \subset \mathbb{R}$ thì ta viết là $\mathbf{L}^p(a,b)$ hoặc $\mathbf{L}^p_{[a,b]}$, nếu $X = [0,1]$ thì đơn giản ta viết là $\mathbf{L}^p$.

Nếu như ta xem hai hàm bằng nhau h.k.n là đồng nhất trong tập $\mathbf{L}^p(X,\mathscr{F},\mu)$ thì từ bất đẳng thức Minkowski (6.11) suy ra tập $\mathbf{L}^p(X,\mathscr{F},\mu)$ là một không gian vectơ với các phép toán thông thường về cộng hàm số và nhân hàm số với một số, đồng thời nó cũng là một không gian định chuẩn với chuẩn

$$\|f\| := \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

Chuẩn $\|f\|$ trong trường hợp này thường được ký hiệu là $\|f\|_p$, đọc là "chuẩn L^p" hoặc "chuẩn p". Hiển nhiên ta dễ dàng kiểm tra các điều kiện về chuẩn của $\mathbf{L}^p(X,\mathscr{F},\mu)$. Các bất đẳng thức Hölder và Minkowski có thể viết lại thành $\|fg\|_1 \le \|f\|_p\|g\|_q$ và $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.

6.13 Định lý (Tính chất đầy đủ của $\mathbf{L}^p$). *Cho không gian độ đo bất kỳ $(X,\mathscr{F},\mu)$ và $1 \le p < \infty$, $(\mathbf{L}^p(X,\mu), \|\cdot\|_p)$ là một không gian định chuẩn đủ (không gian Banach).*

Chứng minh. Lấy $\{f_n\}$ là một dãy Cauchy trong $\mathbf{L}^p(X,\mu)$. Trong không gian định chuẩn bất kỳ, một dãy Cauchy là hội tụ tới cùng một giới hạn với một dãy con hội tụ của nó nên ta chỉ cần chứng minh sự hội tụ của một dãy con. Do đó có thể giả thiết là $\|f_m - f_n\|_p < 1/2^n$ với mọi n và $m > n$.

Đặt

$$A_n := \{x : |f_n(x) - f_{n+1}(x)| \ge 1/n^2\}.$$

Khi đó $1_{A_n}/n^2 \le |f_n - f_{n+1}|$, nên lấy tích phân luỹ thừa bậc p hai vế,

$$\mu(A_n)/n^{2p} \le \int |f_n - f_{n+1}|^p \, d\mu < 2^{-np}, \quad \text{và} \quad \sum_n \mu(A_n) \le \sum_n n^{2p}/2^{np} < \infty \quad \text{với mọi } n.$$

Vì vậy với $B_n := \bigcup_{m\ge n} A_m$, $B(n) \downarrow$ và $\mu(B(n)) \to 0$ khi $n \to \infty$.

Với bất kỳ $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} B(n)$, và vì thế với hầu hết mọi x, $|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \le 1/n^2$ với mọi n đủ lớn. Khi đó với $m > n$ bất kỳ,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le \sum_{j=n}^{\infty} 1/j^2.$$

Do $\sum_{j=n}^{\infty} 1/j^2 \to 0$ khi $n \to \infty$ nên với x như vậy, $\{f_n(x)\}$ là một dãy Cauchy có giới hạn là $f(x)$. Với các x khác, tạo thành một tập có độ đo 0, đặt $f(x) = 0$. Khi đó f là đo được. Do Bổ đề Fatou,

$$\int |f|^p \, d\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int |f_n|^p \, d\mu$$

nên $f \in \mathbf{L}^p(X,\mu)$. Tương tự,

$$\int |f - f_n|^p \, d\mu \le \varliminf_{m\to\infty} \int |f_m - f_n|^p \, d\mu \to 0$$

khi $n \to \infty$, vì thế $\|f_n - f\|_p \to 0$. ■

Từ chứng minh của Định lý trên dễ dàng rút ra được hệ quả sau.

6.14 Hệ quả. *Nếu dãy f_n là hội tụ trong không gian $\mathbf{L}^p(X,\mu)$ thì nó chứa một dãy con f_{n_k} hội tụ h.k.n trong $\mathbf{L}^p(X,\mu)$.*

Ta còn gọi sự hội tụ trong $\mathbf{L}^p(X,\mu)$ là *hội tụ trung bình cấp p* và ký hiệu $f_n \overset{(p)}{\Rightarrow} f$ để chỉ sự hội tụ đó. Nếu dãy f_n hội tụ trung bình cấp p tới f, ta đặt $B = \{|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$, khi đó ta có

$$\int_X |f_n(x) - f(x)|^p \, d\mu \geq \int_B |f_n(x) - f(x)|^p \, d\mu \geq \int_B \varepsilon^p \, d\mu = \varepsilon^p \mu(B),$$

suy ra $\mu(B) \to 0$ khi $n \to \infty$.

Như vậy:

Một dãy hàm hội tụ trung bình cũng hội tụ theo độ đo.

§ 3. TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH

6/3.1 Khái niệm và các ví dụ

6.15 Định nghĩa. Cho X và Y là hai không gian vectơ bất kỳ, một *toán tử tuyến tính* từ X vào Y là một ánh xạ $A : X \to Y$ thoả mãn hai tính chất:

1) $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$ với mọi $x_1, x_2 \in X$.
2) $A(\alpha x) = \alpha Ax$ với mọi $x \in X$ và số α bất kỳ.

Ở đây, ta viết Ax ký hiệu thay cho $A(x)$. Hai điều kiện trên còn có nghĩa là A là tuyến tính đối với phép cộng hai vectơ và phép nhân một số với vectơ. Chú ý ta đã học trong đại số tuyến tính, khi X và Y là không gian $\mathbb{R}^k$ thì A còn gọi là *biến đổi tuyến tính*.

Ký hiệu $\operatorname{Im} A$ hay *miền giá trị* của tập A là tập tất cả $y \in Y$ sao cho tồn tại $x \in X$ để $Ax = y$. Rõ ràng có thể kiểm tra được $\operatorname{Im} A$ là một không gian con của Y vì nó đóng với phép cộng hai vectơ và phép nhân một số với vectơ.

Ví dụ 6.11. 1) Nhớ lại rằng mọi phép biến đổi tuyến tính A trong không gian $\mathbb{R}^k$ đều có thể biểu diễn như sau: $A(X) = TX$ trong đó X là vectơ cột k chiều còn T là một ma trận vuông cấp k. Ta có thể mở rộng kết quả này với toán tử tuyến tính A từ $\mathbb{R}^k$ đến $\mathbb{R}^m$ luôn được biểu diễn ở dạng: $A(X) = TX$ trong đó T là ma trận m hàng k cột, các cột của T theo thứ tự chính là các vectơ ảnh của k vectơ đơn vị $E_1, E_2, \ldots, E_k$ trong $\mathbb{R}^k$.

2) Với $X = Y = C^k[a,b]$ (không gian các hàm số có đạo hàm liên tục đến cấp k trên $[a,b]$), $Ax(t) = a_0(t) + a_1 x'(t) + \cdots + a_k x^{(k)}(t)$ được gọi là một *toán tử vi phân*, trong đó $a_0, a_1, \ldots, a_k$ là những hàm số cho trước của t trong $C^k[a,b]$.

3) Với $X = Y = \mathbb{C}[a,b]$,

$$Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

là một toán tử tuyến tính, trong đó $K(t,s)$ là hàm số liên tục của (t,s) trong một hình vuông $t,s \in [a,b]$. Ta còn gọi A là *toán tử tích phân* với *hạch* là $K(t,s)$.

4) Các *toán tử không* biến mọi $x \in X$ thành vectơ không và *toán tử đồng nhất* biến mỗi vectơ $x \in X$ thành chính x cũng là các toán tử tuyến tính.

6/3.2 Toán tử tuyến tính liên tục

Cho X và Y là các không gian định chuẩn, toán tử tuyến tính A từ X vào Y là *liên tục* nếu $x_n \to x$ trong X kéo theo $Ax_n \to Ax$ trong Y.

Có thể chứng minh một toán tử tuyến tính bất kỳ từ $\mathbb{R}^k$ vào $\mathbb{R}^m$ là liên tục do nó luôn có thể viết dưới dạng tích một ma trận với vectơ. Tuy nhiên trong không gian định chuẩn bất kỳ, không phải lúc nào các toán tử tuyến tính cũng liên tục. Chúng ta sẽ cần một số dấu hiệu để nhận biết khi nào nó là liên tục.

Toán tử tuyến tính A từ X vào Y được gọi là bị chặn (giới nội) nếu tồn tại hằng số K sao cho

$$\|Ax\|_Y \leq K\|x\|_X \quad (\forall x \in X). \tag{6.16}$$

Tập S trong một không gian định chuẩn được gọi là *bị chặn* nếu tồn tại số M thoả mãn $\|x\| \leq M, \forall x \in S$.

6.17 Định lý. *Cho A là một toán tử tuyến tính từ X vào Y, ta có 4 khẳng định sau là tương đương:*

1) A là liên tục tại một điểm $x_0 \in X$.

2) A là liên tục trên toàn X.

3) A biến tập bị chặn thành tập bị chặn.

4) A là bị chặn.

Chứng minh. 1) suy ra 2): Giả sử A là liên tục tại một điểm $x_0 \in X$. Xét dãy $x_n \to x$ trong X, suy ra $x_n - x + x_0 \to x_0$. Theo giả thiết thì $A(x_n - x + x_0) \to Ax_0$ hay $A(x_n - x) \to 0$ (ở đây ta hiểu 0 là vectơ không). Vậy A liên tục trên toàn X.

2) suy ra 3): Ký hiệu $S(M)$ hay $S = \{x \in X : \|x\|_X \leq M\}$, ta sẽ chứng minh $A(S)$ là một tập bị chặn. Thật vậy nếu $A(S)$ không bị chặn, tồn tại dãy $x_n \in S$ sao cho $\|Ax_n\|_Y \to \infty$. Suy ra dãy $y_n = x_n/\|Ax_n\|_Y$ hội tụ tới vectơ không trong X nên Ay_n hội tụ tới vectơ không trong Y. Nhưng $\|Ay_n\|_Y = 1$ với mọi n, vô lý. Vậy $A(S)$ bị chặn. Nếu tập G là bị chặn thì nó phải thuộc một tập $S(M)$ nào đó nên rõ ràng $A(G)$ phải thuộc $A(S)$ dẫn đến $A(G)$ bị chặn trong Y.

3) suy ra 4): Giả sử A biến $S(1)$ thành một tập bị chặn tức tồn tại K sao cho $\|Ax\|_Y \leq K$ với mọi $x \in S(1)$. Khi đó với $x \in X$ bất kỳ, $\|x\|_X^{-1}x \in S(1)$ nên $\|x\|_X^{-1}\|Ax\|_Y \leq K$ hay $\|Ax\|_Y \leq K\|x\|_X$. Vậy A giới nội.

4) suy ra 1): Hiển nhiên A liên tục tại vectơ không trong X. ■

6.18 Định nghĩa. Số $K \geq 0$ nhỏ nhất mà thoả mãn (6.16) được gọi là *chuẩn của toán tử tuyến tính liên tục A*, ký hiệu là $\|A\|$. Ta có:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Thật vậy, dấu bằng thứ nhất là hiển nhiên, dấu bằng thứ hai được suy ra do

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \|A\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big)\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|$$

Như vậy ta có một số tính chất của chuẩn toán tử:

1) $\|Ax\| \leq \|A\|.\|x\|_X, \forall x \in X$.

2) Nếu $\forall x \in X$, $\|Ax\| \leq K\|x\|_X$ thì $\|A\| \leq K$.

Ví dụ 6.12. 1) Toán tử tuyến tính $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $Ax = ax$ với số $a \in \mathbb{R}$ cho trước là liên tục (bị chặn) và $\|A\| = a$. Toán tử đồng nhất $I : X \to X$ sao cho $Ix = x$ là liên tục với $\|I\| = 1$. Hiển nhiên nếu toán tử tuyến tính A có $\|A\| = 0$ thì chắc chắn đây là toán tử không $Ax = 0$.

2) Cho $X = C^\infty[a,b]$ là không gian các hàm có đạo hàm liên tục tại mọi cấp với chuẩn maximum: $\|x\| = \max_{t \in [a,b]} x(t)$. Toán tử đạo hàm $Du = u'$ là không liên tục, chẳng hạn hàm $u(t) = e^{\lambda t}$ thoả mãn $Du = \lambda u$. Khi đó $\|Du\|/\|u\| = \lambda$ có thể nhận giá trị lớn tuỳ ý.

3) Toán tử tuyến tính A từ $\mathbb{R}^k$ đến $\mathbb{R}^m$ được xác định duy nhất bởi một ma trận A có m hàng k cột. Ta sẽ gọi chuẩn Euclid của ma trận A là chuẩn của toán tử A được tính như sau:

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \text{ hay } \|A\|_2^2 = \sup_{\|x\|^2=1} \|Ax\|^2.$$

Tuy nhiên ta đã biết cách tính cực đại này thông qua hàm Lagrange $F(\lambda, x) = \|Ax\|^2 - \lambda(\|x\|^2 - 1) = x'A'Ax - \lambda(x'x - 1)$. Các điểm dừng của hàm này phải thoả mãn $A'Ax = \lambda x$.

Vậy x là một vectơ riêng và λ là một giá trị riêng của $A'A$. Chú ý $A'A$ là một ma trận vuông đối xứng xác định không âm do $y'A'Ay = (Ay)'Ay \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}^k$ nên mọi giá trị riêng của nó là không âm. Với x là vectơ riêng của $A'A$ thoả mãn $\|x\| = 1$, ta có $\|Ax\| = \|\lambda x\| = \lambda$. Vậy giá trị lớn nhất của $\|Ax\|^2$ khi $\|x\| = 1$, tức $\|A\|_2^2$ chính là giá trị riêng lớn nhất của $A'A$. Ký hiệu giá trị này là $\lambda(A'A)$ ta có $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda(A'A)}$

F.1. Quay lại ví dụ 3) ở mục 3.1, ta có

$$\|Ax\| = \max_{t \in [a,b]} \Big| \int_a^b K(t,s)x(s)ds \Big| \leq \|x\| \max_{t \in [a,b]} \int_a^b |K(t,s)|ds,$$

nên suy ra

$$\|A\| \leq \max_{t \in [a,b]} \int_a^b |K(t,s)|ds.$$

Vậy A là một toán tử tuyến tính liên tục.

6/3.3 Không gian các toán tử $\mathbb{L}(X, Y)$

Ký hiệu $\mathbb{L}(X, Y)$ là tập hợp tất cả các toán tử tuyến tính liên tục từ không gian định chuẩn X vào không gian định chuẩn Y. Trong $\mathbb{L}(X, Y)$ ta có các phép toán tuyến tính như sau:

Tổng của hai toán tử A và B là toán tử $A + B$ sao cho

$$(A + B)x = Ax + Bx, \quad \forall x \in X,$$

và toán tử *tích* của một số α với toán tử α là αA thoả mãn

$$(\alpha A)x = \alpha Ax, \quad \forall x \in X.$$

Rõ ràng các toán tử $A + B$ và αA cũng là tuyến tính và liên tục nên cùng thuộc $\mathbb{L}(X, Y)$ hay $\mathbb{L}(X, Y)$ là một *không gian vectơ*. Trong $\mathbb{L}(X, Y)$, ta định nghĩa một chuẩn theo công thức (6.16) ở mục 3.2. Khi đó $\mathbb{L}(X, Y)$ *là một không gian định chuẩn*, có thể dễ dàng kiểm tra 3 tiên đề về chuẩn đều đúng:

1) Nếu $\|A\| = 0$ thì kéo theo $Ax = 0$ với mọi x tức A là toán tử không. Ngược lại là hiển nhiên.
2) $\|\alpha A\| = \alpha\|A\|$ do $\|\alpha Ax\| = \alpha\|Ax\|$ với mọi x.
3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ do $\|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\|$ với mọi x.

Trong $\mathbb{L}(X, Y)$ ta định nghĩa một sự *hội tụ theo chuẩn*: Ta nói $A_n \to A$ nếu $\|A_n - A\| \to 0$. Sự hội tụ này khác với *hội tụ theo điểm*: Dãy toán tử A_n được gọi là *hội tụ theo điểm* đến A nếu $A_n x \to Ax$ trong Y với mọi $x \in X$. Rõ ràng sự hội tụ theo chuẩn kéo theo sự hội tụ theo điểm nhưng điều ngược lại không đúng. Ta cũng có thể gọi sự hội tụ theo chuẩn của một dãy toán tử là *hội tụ đều*.

6.19 Định lý. *Nếu Y là không gian đủ thì $\mathbb{L}(X, Y)$ cũng là không gian đủ.*

Chứng minh. Giả sử A_n là dãy cơ bản trong $\mathbb{L}(X, Y)$. Ta có:

$$\|A_n x - A_m x\|_Y = \|(A_n - A_m)x\|_Y \leq \|A_n - A_m x\|.\|x\|_X, \tag{6.20}$$

nên với một $x \in X$ cho trước $A_n(x)$ là một dãy cơ bản trong Y. Mà Y đủ nên $A_n(x)$ phải hội tụ tới một giới hạn, ta đặt

$$Ax = \lim_{n \to \infty} A_n x.$$

Với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại số tự nhiên N sao cho $\|A_n - A_m\| \leq \varepsilon$ với mọi $m, n > N$. Khi đó $\|A_n x - A_m x\| \leq \varepsilon\|x\|$ với mọi x, cho $m \to \infty$ suy ra $\|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon\|x\|$.

Dễ dàng kiểm tra được A là toán tử tuyến tính nên $A - A_n$ cũng là toán tử tuyến tính và là liên tục. Vậy $A - A_n \in \mathbb{L}(X, Y)$ kéo theo $A \in \mathbb{L}(X, Y)$ và

$$\|A_n - A\| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Vậy A_n hội tụ theo chuẩn tới toán tử $A \in \mathbb{L}(X, Y)$, định lý được chứng minh xong. ∎

6/3.4 Phiếm hàm tuyến tính

6.21 Định nghĩa. Trong trường hợp toán tử tuyến tính f từ không gian vectơ X vào không gian vectơ Y, với Y là tập số thực $\mathbb{R}$ hoặc phức $\mathbb{C}$ thì f được gọi là một *phiếm hàm tuyến tính trên X*.

Mọi tính chất của toán tử tuyến tính và dấu hiệu liên tục của nó đều áp dụng được cho phiếm hàm tuyến tính (ở đây $\|f(x)\| = |f(x)|$). Ta định nghĩa được chuẩn của f khi nó liên tục như sau:

$$\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$$

Tập các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X là một không gian định chuẩn ký hiệu là X^*, thường được gọi là *không gian liên hợp* hay *không gian đối ngẫu của* X. Do $\mathbb{R}$ là đủ nên không gian liên hợp của bất cứ không gian định chuẩn nào cũng là đủ, theo Định lý 6.19.

Ví dụ 6.13 (*Phiếm hàm tuyến tính trên* $\mathbb{R}^k$). Ta thấy như ở ví dụ 1 của mục 3.1, một phiếm hàm tuyến tính f bất kỳ trên $\mathbb{R}^k$ đều có biểu diễn dưới dạng:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i \tag{6.22}$$

trong đó $x = (x_1, \ldots, x_k)$ còn $a = (a_1, \ldots, a_k)$ là duy nhất ứng với f. Ký hiệu $f(x) = (a, x)$ thường gọi là *tích vô hướng của hai vectơ a và x*.

Rõ ràng có một tương ứng 1-1 giữa $f \in (\mathbb{R}^K)^*$ với $a \in \mathbb{R}^k$. Ánh xạ đó bảo toàn các phép toán tuyến tính và cũng bảo toàn chuẩn do

$$\|f\| = \|a\|.$$

Thật vậy theo bất đẳng thức Cauchy đối với các số thực $|(a, x)| \leq \|a\|.\|x\|$, ở đây là chuẩn Euclid. Bất đẳng thức đạt dấu bằng khi $a = x$ nên ta suy ra được đẳng thức bảo toàn chuẩn.

Tóm lại ánh xạ nói trên là một đẳng cấu và có thể đồng nhất $(\mathbb{R}^k)^*$ với $\mathbb{R}^k$, khi đó ta nói không gian $\mathbb{R}^k$ là *tự liên hợp* (không gian liên hợp của nó có thể đồng nhất với chính nó).

BÀI TẬP

F.1. Cho $(X, \|\cdot\|)$ là một không gian tuyến tính định chuẩn, chứng minh $d(x, y) = \dfrac{\|x-y\|}{1+\|x-y\|}$ là một metric trên X.

F.2. Chứng minh trong không gian định chuẩn X, nếu $x_n \to x$ thì $\|x_n\| \to \|x\|$.

F.3. $C^1(a, b)$ là không gian các hàm khả vi liên tục trên $[a, b]$ với chuẩn

$$\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} f(x) + \sup_{x\in[a,b]} f'(x).$$

Chứng minh $C^1(a, b)$ là một không gian Banach.

F.4. Cho X là một không gian định chuẩn. Chứng minh:

$$\|x\| \leq \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}, \quad \forall x, y \in X.$$

F.5. Trên không gian tuyến tính $C[a,b]$ tất cả các hàm liên tục trên $[a,b]$, ánh xạ:

$$x(t) \mapsto \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| + \int_a^b |x(t)| dt$$

có thể là một chuẩn trên $C[a,b]$ hay không? Tại sao?

F.6. Cho X là một không gian tuyến tính định chuẩn, chuỗi $\sum x_n$ được gọi là hội tụ *tuyệt đối* nếu $\sum \|x_n\|$ là hội tụ tới một giá trị hữu hạn trong $\mathbb{R}$. Chứng minh X là không gian Banach nếu và chỉ nếu mọi chuỗi hội tụ tuyệt đối đều hội tụ.

F.7. Cho A là toán tử tuyến tính từ $\mathbb{R}^m$ vào $\mathbb{R}^k$, trong đó chuẩn lấy trong $\mathbb{R}^m$ và $\mathbb{R}^k$ là chuẩn max: $\|x\| = \max \|x_i\|$. Hãy tính $\|A\|$ theo ma trận A.

F.8. Cho phiếm hàm tuyến tính $\delta : C[0,1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi $\delta(f) = f(0)$. Giả sử chuẩn trong $C[0,1]$ là chuẩn max: $\|f\| = \max\limits_{0 \leq x \leq 1} f(x)$, hãy chứng minh δ là bị chặn và tính chuẩn của toán tử δ.

Nếu chuẩn trong $C[0,1]$ được cho là chuẩn $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\, dx$, hãy chứng minh δ không bị chặn.

F.9. Cho ma trận vuông cấp 2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ b^2 & 0 \end{pmatrix}$$

trong đó $a, b > 0$. Hãy tính chuẩn Euclid của ma trận A.

F.10. Chứng minh nếu $T_n \to T$ trong không gian $\mathbb{L}(X,Y)$ thì $T_n x \to Tx$ với mọi $x \in X$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Phạm Kỳ Anh, Trần Đức Long, *Giáo trình Hàm thực và giải tích hàm*, NXB ĐHQG Hà Nội, 2001.

[2] A. N. Cônmôgôrôp, X. V. Fômin, *Cơ sở lý thuyết hàm và giải tích hàm*, tập I, II, NXB Giáo Dục, 1971.

[3] Nguyễn Định, Nguyễn Hoàng, *Hàm số biến số thực*, NXB Giáo Dục, 2003.

[4] Nguyễn Duy Tiến, Trần Đức Long, *Bài giảng Giải tích*, tập I, II, NXB ĐHQG Hà Nội, 2004.

[5] Hoàng Tuy, *Hàm thực và giải tích hàm*, NXB ĐHQG Hà Nội, 2003.

[6] Bài giảng Toán cao cấp 3 & 4, Bộ môn Toán cơ bản, ĐH KTQD.

[7] R. M. Dudley, *Real analysis and Probability*, Cambridge university press, 2002.