

# Nội dung ôn tập Toán cao cấp 3

1. Trình bày khái niệm đại số và  $\sigma$ -đại số, kiểm tra xem một lớp tập hợp có là đại số hoặc  $\sigma$ -đại số không? Chứng minh một lớp tập hợp là  $\sigma$ -đại số sinh bởi một lớp tập hợp ban đầu.

## Bài tập

- (a) Phát biểu định nghĩa  $\sigma$ -đại số và  $\sigma$ -đại số sinh bởi lớp các tập hợp con  $\mathcal{A}$  của tập  $X$ .
- (b)  $X = \{0, 1, 2, 3\}$ . Chứng minh rằng đại số sinh bởi lớp  $\{\{0, 1\}, \{1, 2, 3\}\}$  là  $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2, 3\}, \{0, 1\}, \{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, X\}$ .
- (c) Gọi  $\mathcal{A}$  là lớp tất cả các tập con  $A \subset X$  mà 1 trong hai tập  $A$  hay  $A^c$  là hữu hạn hoặc đếm được. Chứng minh  $\mathcal{A}$  là một  $\sigma$ -đại số.
- (d) Cho  $X$  là một tập vô hạn và  $\mathcal{M}$  là lớp các tập chỉ gồm một phần tử trong  $X$ . Chứng minh  $\sigma$ -đại số sinh bởi  $\mathcal{M}$  là lớp tất cả các tập con  $A \subset X$  mà 1 trong hai tập  $A$  hay  $A^c$  là hữu hạn hoặc đếm được.
2. Định nghĩa về độ đo, chứng minh các tính chất của độ đo.

## Bài tập

- (a) Phát biểu khái niệm độ đo trên một không gian đo được  $(X, \mathcal{F})$ .
- (b) Một độ đo  $\mu$  xác định trên  $[0, 1]$  thỏa mãn

$$\mu[0, 1) = 0.8; \mu[\frac{1}{2}, 1) = 0.3; \mu[\frac{1}{2}, 1] = 0.2.$$

Hãy tính  $\mu([0, 1])$  và  $\mu\{1\}$ .

- (c) Cho không gian độ đo  $(X, \mathcal{F}, \mu)$ , Hãy chứng minh :
- $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$  với mọi  $A, B \in \mathcal{F}$  và  $B \subset A, \mu(B) < +\infty$ ;
  - $\mu(B) \leq \mu(A)$  với mọi  $A, B \in \mathcal{F}$  và  $B \subset A$ ;
  - $\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B)$  với mọi  $A, B \in \mathcal{F}$  thỏa mãn  $\mu(B) = 0$ ;
- (d) Trong không gian độ đo  $(X, \mathcal{F}, \mu)$ , tập  $X$  có độ đo 1, chứng minh rằng nếu  $A_1, A_2$  là các tập có độ đo 0 thì  $A = A_1^c \cap A_2^c$  cũng là tập đo được. Độ đo của tập này bằng bao nhiêu?
- (e) Tìm các ví dụ để chứng tỏ:
- hợp không đếm được các tập có độ đo không có thể có độ đo dương;
  - giao không đếm được các tập có độ đo 1 có thể có độ đo không.
- (f) Cho không gian độ đo  $(X, \mathcal{F}, \mu)$ , khi đó ta có:
- Với mọi họ đếm được  $A_i \in \mathcal{F} (i = 1, 2, \dots)$  (không cần rời nhau) ta có

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

- Với mọi họ đếm được  $A_i \in \mathcal{F} (i = 1, 2, \dots)$  (không cần rời nhau) ta có

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \inf\{\mu(A_i)\}.$$

iii. Nếu dãy  $A_i \in \mathcal{F}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) là đơn điệu tăng tức  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$  thì

$$\mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i).$$

(g) Cho  $\mathcal{B}$  là  $\sigma$ -đại số trên  $\mathbb{R}$  thoả mãn  $(a, b) \in \mathcal{B}$  với mọi  $a < b \in \mathbb{R}$ . Chứng minh  $[a, b]; (a, b] \in \mathcal{B}$  với mọi  $a < b \in \mathbb{R}$ .

3. Độ đo Lebesgue - Stieltjes trên  $\mathbb{R}$ .

### Bài tập

(a) Cho hàm số

$$F(t) = \begin{cases} -2 & \text{nếu } t \leq 0, \\ -1 & \text{nếu } 0 < t \leq 2, \\ 2 & \text{nếu } 2 < t \leq 3, \\ 3 & \text{nếu } t > 3, \end{cases}$$

Hãy tìm độ đo Lebesgue-Stieltjes cảm sinh bởi các hàm đó của các tập sau:

$$(-\infty, 1] \quad [3, 3] \quad (3, \infty).$$

4. Hội tụ theo độ đo và hội tụ hkn.

### Bài tập

(a) Phát biểu khái niệm hội tụ theo độ đo.

(b) Với  $\mu$  là độ đo đủ, hãy chứng minh: Nếu  $f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x)$  và  $f(x) = g(x)$  (hkn) thì  $f_n(x) \xrightarrow{\mu} g(x)$  (hkn).

(c) Chứng minh nếu  $f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x)$  và  $f_n(x) \xrightarrow{\mu} g(x)$  thì  $f(x) = g(x)$  (hkn).

(d) Chứng minh nếu  $f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x)$  và  $g_n(x) \xrightarrow{\mu} g(x)$  thì  $f_n(x) + g_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x) + g(x)$ .

(e) Cho dãy hàm  $f_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) đo được không âm trong  $(X, \mathcal{F}, \mu)$ . Chứng minh rằng nếu  $\int_X f_n d\mu \rightarrow 0$  thì  $f_n \rightarrow 0$  theo độ đo  $\mu$ .

5. Hàm đo được và các phép toán bảo toàn tính đo được. Chứng minh một hàm số là đo được.

### Bài tập

(a) Phát biểu khái niệm hàm đo được.

(b) Cho  $X = [0, 1]$  và  $\sigma$ -đại số sau xác định trên  $X$ :

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, [0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, 1), \{1\}, [0, 1), [0, \frac{1}{2}] \cup \{1\}, [\frac{1}{2}, 1], X\}.$$

Hãy kiểm tra xem các hàm số sau có đo được không?

$$i) f_1(x) = \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}]} + 2 \cdot \mathbf{1}_{(\frac{1}{2}, 1]}$$

$$ii) f_2(x) = \mathbf{1}_{[0, 1)} + 2 \cdot \mathbf{1}_{\{1\}}$$

$$iii) f_3(x) = 3 \cdot \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, 1)} - \mathbf{1}_{\{1\}}$$

$$iv) f_4(x) = 2 \cdot \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}]} + \mathbf{1}_{(\frac{1}{2}, 1]}$$

(c) Nếu  $f$  là một hàm số đo được trong không gian  $(X, \mathcal{F})$  thì hàm số

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \leq 1 \\ 1 & \text{nếu } f(x) > 1. \end{cases}$$

có đo được trên  $X$  không? Tại sao?

6. Tính tích phân Lebesgue.

**Bài tập**

- (a) Tính  $f(x) = \int_{[0,10]} (\sqrt{x}) dm.$
- (b) Tính  $f(x) = \int_{[0,2]} (2x) dm.$
- (c) Tính  $f(x) = \int_{[0,2\pi]} (\sin x) dm.$
- (d) Cho hàm số  $f(x) = n$  nếu  $x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n+1})$  và bằng  $-n$  nếu  $x \in [\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n+2})$ . Chứng minh rằng không tồn tại  $\int_{[0,1]} f(x) dm.$

7. Các Định lý hội tụ đơn điệu và Định lý hội tụ bị chặn cho tích phân của hàm đo được cũng như hàm đo được không âm.

**Bài tập**

- (a) Phát biểu định lý hội tụ đơn điệu đối với hàm đo được bất kỳ.
- (b) Phát biểu định lý hội tụ bị chặn (trội) đối với hàm đo được bất kỳ.
- (c) Cho dãy hàm  $f_n(x) = \mathbf{1}_{[n,n+1)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  với  $n = 1, 2, \dots$
- Hãy tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$
  - Chứng minh rằng  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dm \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dm.$
  - Giải thích xem giả thiết nào trong định lý hội tụ đơn điệu cũng như trong định lý hội tụ trội không được thoả mãn trong trường hợp này.
- (d) Cho  $f_n := \mathbf{1}_{[0,n]}/n$ . Hỏi có tồn tại hàm  $g$  khả tích (đối với độ đo Lebesgue) mà thoả mãn  $g(x) \geq f_n(x)$  với mọi  $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ ?
- (e) Giả sử  $f$  là hàm số không bị chặn, khả tích Lebesgue trên  $(X, \mathcal{F}, \mu)$ . Đặt

$$[f]_n = \begin{cases} f & \text{nếu } |f| \leq n, \\ 0 & \text{nếu } |f| > n. \end{cases}$$

Chứng minh rằng  $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X [f]_n d\mu.$

8. Tính tích phân Stieljes và tích phân Lebesgue bằng tích phân Stieltjes.

**Bài tập**

- (a) Cho hàm số sau xác định trên  $[0, 1]$ :

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ vô tỉ}, x \in [0, 1/4] \\ x, & x \text{ vô tỉ}, x \in (1/4, 1] \\ 10, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Tính tích phân Lebesgue  $\int_{[0,1]} f(x) dm.$

- (b) Cho hàm số sau xác định trên  $\mathbb{R}$ :

$$H(t) = \begin{cases} \frac{4}{t^2} & \text{nếu } t \leq -2, \\ t + 3 & \text{nếu } -2 < t \leq 2, \\ 6 - e^{2-t} & \text{nếu } t > 2, \end{cases}$$

hãy tính

i. tích phân Stieltjes  $\int_{-3}^2 t^2 dH;$

ii. tích phân Lebesgue  $\int_X f d\mu$  với hàm  $f$  đo được trên  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  có  $H(t)$  là hàm phân phối.

(c) Cho các hàm số

$$F(s) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } s \leq 0, \\ s & \text{nếu } 0 < s \leq 1, \\ 2 & \text{nếu } s > 1 \end{cases}$$

và hàm

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t \leq 0, \\ \frac{5t+1}{t+1} & \text{nếu } t > 0 \end{cases}$$

Hãy tính

i. tích phân Lebesgue  $\int_X f d\mu_F$  với hàm  $f$  đo được nhận  $F$  làm hàm phân phối;

ii. tích phân Lebesgue  $\int_X (g+1)^2 d\mu_G$  với hàm  $g$  đo được nhận  $G$  làm hàm phân phối;

iii. tích phân Stieltjes  $\int_0^2 G(t) dF;$

iv. tích phân Stieltjes  $\int_0^2 F(t) dG.$

9. Định nghĩa và các ví dụ về không gian metric, sự hội tụ trong không gian metric.

### Bài tập

(a) Phát biểu định nghĩa về metric.

(b) Cho một ví dụ về metric trong không gian  $\mathbb{R}^3$  và giải thích.

(c) Phát biểu định nghĩa metric  $d_p$  và  $d_\infty$  trong  $\mathbb{R}^k$ .

(d) Chứng minh rằng một hàm  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  thoả mãn các điều kiện với mọi  $x, y, z \in X$ :

1.  $d(x, y) = d(y, x),$

2.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$

3.  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

cũng sẽ thoả mãn điều kiện  $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X.$

(e) Chứng minh bất đẳng thức tứ giác trong không gian metric  $(X, d)$ :  $|d(x, y) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(y, v), \forall x, y, u, v \in X.$

(f) Chứng minh trong không gian metric  $(X, d)$ , nếu  $x_n \rightarrow x$  và  $y_n \rightarrow y$  thì  $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$  (hàm số  $d(x, y)$  là hàm liên tục theo cả hai biến).

(g) Chứng minh bất đẳng thức tam giác đối với metric  $d_\infty$  trong không gian  $\mathbb{R}^k$ .

10. Tập đóng và tập mở trong không gian metric.

### Bài tập

(a) Cho không gian metric  $(X, d)$  chứng minh tập  $A \subset X$  là tập đóng khi và chỉ khi  $A = [A]$ .

- (b) Trên  $\mathbb{R}^2$  hãy chứng minh tập mở trong  $(\mathbb{R}^2, d_1)$  cũng là tập mở trong  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  và ngược lại.
- (c) Chứng minh hình vuông đơn vị  $(0, 1) \times (0, 1)$  là tập mở trong không gian  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ .
- (d) Chứng minh tròn tâm  $(0, 0)$  bán kính 1 là tập mở trong không gian  $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ .

11. Khái niệm về không gian đủ.

### Bài tập

- (a) Chứng minh trong không gian  $\mathbb{R}$ ,  $d(x, y) = |x - y|$  là một metric và không gian metric này là không đầy đủ.
  - (b) Chứng minh không gian  $C_{[a, b]}^L$  các hàm liên tục trên  $[a, b]$  với metric  $d(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$  không là đầy đủ.
12. Hàm liên tục trên không gian metric, tính chất của hàm liên tục trong không gian metric compact.

### Bài tập

- (a) Hãy phát biểu ba điều kiện tương đương để không gian metric  $(X, d)$  là compact.
- (b) Thừa nhận kết quả ở trên, hãy chứng minh một tập đóng và bị chặn trong  $(\mathbb{R}^k, d_2)$  là tập compact.
- (c) Chứng minh tập hợp  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y \leq 10; x \geq 0; y \geq 0\}$  là tập compact trong  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ .
- (d) Cho  $(X, d)$  là một không gian metric,  $a \in X$  cố định và định nghĩa hàm số  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  là  $f(x) = d(x, a)$ . Chứng minh  $f$  là liên tục (metric trong  $\mathbb{R}$  là metric thông thường).
- (e) Cho  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  và  $(Z, d_Z)$  là các không gian metric và  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  là các hàm liên tục, hãy chứng minh hàm hợp

$$h = g \circ f : X \rightarrow Z$$

tức là  $h(x) = g(f(x))$ ,  $\forall x \in X$  cũng liên tục.

- (f) Chứng minh nếu  $f$  là hàm liên tục từ không gian metric  $(X, d)$  vào  $\mathbb{R}$  và  $A$  là tập compact trong  $X$  thì tồn tại  $x_0, y_0 \in A$  sao cho  $f(x_0)$  là giá trị cực đại của  $f$  trên  $A$ ,  $f(y_0)$  là giá trị cực tiểu của  $f$  trên  $A$ .

cuu duong than cong. com