Chương V

DỰ BÁO BẰNG MÔ HÌNH TĂNG TRƯỞNG BÃO HOÀ

➢ **Một số phương pháp dự báo đã nghiên cứu trong ngắn hạn:**

- Đối với chuỗi thời gian tương đối ổn định thì áp dụng phương pháp ngoại suy xu thế
- Đối với chuỗi thời gian dừng theo nghĩa kỳ vọng toán thì áp dụng phương pháp san mũ bất biến
- Đối với chuỗi thời gian chịu những tác động mạnh, có những bước nhảy đặc biệt là những quan sát càng gần hiện tại thì áp dụng phương pháp san mũ xu thế
- Đối với chuỗi thời gian có biến động theo chu kỳ thì áp dụng các mô hình thời vụ

Với chương học này chúng ta sẽ tiếp cận với những phương pháp dự báo trong dài hạn trên cơ sở mô hình tăng trưởng theo hàm mũ và các mô hình dùng để phân tích mức bão hoà. Các mô hình này bỏ qua những nét đặc trưng trong ngắn hạn, chỉ quan tâm đến những biến động chung, khái quát trong dài hạn để có tầm nhìn tổng quát về tương lai.

Các mô hình này cho phép xác định được giới hạn phát triển và điều này rất có ý nghĩa đối với quản lý vĩ mô và vi mô.

Chúng ta xét 3 dạng hàm tiêu biểu:

- Hàm mũ
- Hàm Losgistic
- Hàm Gompert

1. HÀM MŨ:

- Chuỗi thời gian diễn biến theo một quy luật đặc trưng bằng một hệ số tăng giao động trong một giới hạn nào đó nhưng ổn định.

  VD: - Quá trình tăng dân số trong dài hạn

  - Các quá trình tích luỹ vốn, hay tiền lãi gửi tiết kiệm,....

  - Quá trình phát triển khoa học công nghệ….

- Biểu hiện: Mức tăng của chuỗi thời gian tỷ lệ với giá trị hiện tại thì chuỗi thời gian đó có dạng hàm mũ. Điều đó có nghĩa là:

$$\Delta x_{t+1} = a x_t$$

$$\longrightarrow \quad x'_t = \frac{dx}{dt} = a x_t$$

$$\ln x_t = at + \ln c$$

$$at = \ln\left(\frac{x_t}{c}\right)$$

$$\frac{x_t}{c} = e^{at}$$

$$\longrightarrow x_t = c * e^{at}$$

- Để ước lượng các tham số bằng phương pháp OLS ta phải biến đổi phương trình về dạng hàm đa thức

$$\ln x_t = \ln c + at$$

$$\longrightarrow Y_t = C_0 + at$$

Ta quy về giải hpt chuẩn sau:

$$\begin{cases} n\ln c + a\sum t = \sum \ln x_t \\ \ln c \sum t + a \sum t^2 = \sum t\ln x_t \end{cases} \longrightarrow \hat{a}, \hat{c} = ?$$

Ta có mô hình dự báo: $\hat{x}_t = \hat{c} * e^{\hat{a}t}$

2. HÀM LOGISTIC:

- VD: doanh thu về sản phẩm của một công ty sau một giai đoạn tăng trưởng sẽ chuyển sang trạng thái phát triển chậm dần và đạt mức bão hoà.

  Vấn đề đặt ra là phải dự báo được xu thế tăng trưởng số lượng (giá trị) và mức bão hoà để có thể kịp thời chuyển sang sản phẩm khác có triển vọng hơn, hoặc có chiến lược phát triển lâu dài.

- Biểu hiện: Mức tăng của chuỗi thời gian tỷ lệ với giá trị hiện tại x_t và với khoảng cách giữa mức bão hoà tuyệt đối S và giá trị hiện tại Xt.

$$\Delta x_{t+1} = a x_t (S - Xt)$$

$$x'_t = \frac{dx}{dt} = a x_t (S - Xt)$$

$$\frac{dx_t}{x_t\left(S - x_t\right)} = adt$$

$$\frac{dx_t}{x_t} + \frac{dx_t}{S - x_t} = aSdt$$

Đặt $Z_t = S - x_t$

$dZ_t = -dx_t$

$$\longrightarrow \quad \frac{dx_t}{x_t} - \frac{dZ_t}{Z_t} = aSdt$$

$$\int \frac{dx_t}{x_t} - \int \frac{dZ_t}{Z_t} = \int aSdt$$

$$\ln x_t - \ln Z_t = aSt + c$$

$$\ln \frac{x_t}{S - x_t} = aSt + c$$

$$\ln \frac{S - x_t}{x_t} = -aSt - c$$

$$\frac{S - x_t}{x_t} = e^{-aSt - c}$$

$$\frac{S}{x_t} = 1 + e^{-aSt - c}$$

$$\longrightarrow \quad x_t = \frac{S}{1 + e^{-aSt - c}}$$

Các tham số cần ước lượng là a, S, c

- ***Trường hợp S đã biết***: $S = S_0$

S có thể xác định bên ngoài mô hình dựa vào kinh nghiệm và đặc tính của đối tượng dự báo. S xác định bên ngoài mô hình tốt hơn xác định bên trong mô hình vì để xác định S có thể mất cả 1 vòng đời của đối tượng.

$$x_t = \frac{S_0}{1 + e^{-aS_0 t - c}}$$

$$e^{-aS_0 t - c} = \frac{x_t}{S} - 1$$

$$aS_0 t + c = \ln \frac{x_t}{x_t - S_0}$$

Đặt $y_t = \ln \dfrac{x_t}{x_t - S_0}$

Ước lượng các tham số bằng phương pháp OLS. Ta quy về giải hệ phương trình chuẩn sau:

$$\begin{cases} nc + aS_0 \sum t = \sum y_t \\ c \sum t + aS_0 \sum t^2 = \sum y_t t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \hat{c} = ? \\ \hat{a} S_0 = ? \end{cases}$$

Hàm dự báo: $\hat{x}_t = \dfrac{S_0}{1 + e^{-\hat{a} S_0 t - \hat{c}}}$

- ***Trường hợp S chưa biết*** thì không thể ước lượng các tham số bằng phương pháp OLS ngay được mà phải biến đổi về dạng đa thức

Đặt
$$y_t = \frac{1}{x_t} = \frac{1 + e^{-aSt-c}}{S}$$

$$z_t = \frac{1}{x_{t+1}} = \frac{1 + e^{-aSt-aS-c}}{S} = \frac{1 + e^{-aSt-c}e^{-aS} + e^{-aS} - e^{-aS}}{S}$$

$$= \frac{e^{-aS}\left(1 + e^{-aSt-c}\right)}{S} + \frac{\left(1 - e^{-aS}\right)}{S}$$

Đặt $e^{-aS} = b_1, \quad \dfrac{1 + e^{-aSt-c}}{S} = y_t, \quad \dfrac{1 - e^{-aS}}{S} = b_0$

$$\longrightarrow z_t = b_0 + b_1 y_t$$

Ước lượng các tham số ta quy về giải hệ phương trình chuẩn sau:

$$\begin{cases} nb_0 + b_1 \sum y_t = \sum z_t \\ b_0 \sum y_t + b_1 \sum y_t^2 = \sum y_t z_t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \hat{b}_0 = \dfrac{1 - \hat{b}_1}{S} \\ \hat{b}_1 = e^{-aS} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad -\hat{a}\hat{S} = \ln \hat{b}_1 \longrightarrow \hat{S} = \frac{1 - \hat{b}_1}{\hat{b}_0}$$

Có 2 cách ước lượng c:

- Có thể tính được bằng phương pháp điểm chọn nhưng không đảm bảo chính xác

- Sau khi tính được S thì quay trở lại tính như trường hợp S đã biết

3. HÀM GOMPERT:

- Biểu hiện: Mức tăng của chuỗi thời gian tỷ lệ với giá trị hiện tại x_t và sai phân lôga giữa mức bão hòa S và x_t

$$x_t' = \frac{dx_t}{dt} = ax_t(\ln S - \ln x_t) = ax_t \ln\frac{S}{x_t} \quad (1)$$

Đặt $z_t = \ln\frac{S}{x_t} \longrightarrow \frac{dz_t}{dx_t} = -\frac{1}{x_t}$

$$\longrightarrow dz_t = \frac{x_t}{S}\left(-\frac{S}{x_t^2}\right)dx_t = -\frac{dx_t}{x_t}$$

Thay vào (1) ta được:

$$\longrightarrow \frac{dx_t}{dt} = ax_t z_t \longrightarrow dz_t = -az_t dt$$

$$\longrightarrow \frac{dz_t}{z_t} = -adt$$

$$\int \frac{dz_t}{z_t} = -\int a\,dt$$

$$-\ln z_t = at + c$$

$$\ln z_t = -at - c$$

$$z_t = e^{-at-c}$$

$$\ln \frac{S}{x_t} = e^{-at-c}$$

$$\frac{S}{x_t} = e^{e^{-at-c}}$$

$$x_t = Se^{-e^{-at-c}}$$

Đặt $e^{-a} = A$ và $e^{-c} = B$

$$\longrightarrow \quad x_t = Se^{-BA^t}$$

- ***Trường hợp S đã biết***: S = S_0 (S có thể xác định bên ngoài mô hình)

$$x_t = S_0 e^{-BA^t}$$

$$\longrightarrow \ln x_t = \ln S_0 - BA^t$$

$$\ln S_0 - \ln x_t = BA^t$$

$$\ln \frac{S_0}{x_t} = BA^t$$

$$\ln\left(\ln \frac{S_0}{x_t}\right) = \ln B + t\ln A$$

Đặt $Y_t = \ln\left(\ln \frac{S_0}{x_t}\right)$; $\ln B = b$; $\ln A = a$

$$\longrightarrow Y_t = at + b$$

Ước lượng các tham số bằng phương pháp OLS, ta được các giá trị ước lượng $\hat{A}$ và $\hat{B}$

- ***Trường hợp S chưa biết***:

Đặt $z_t = x_{t+1} = Se^{-BA^{(t+1)}} = Se^{-BA^t A} S^{-A} S^{A}$

$$= \left(Se^{-BA^t}\right)^A S^{1-A} = x_t^A S^{1-A}$$

$$\longrightarrow \ln z_t = A \ln x_t + (1 - A)\ln S$$

Đặt $\ln z_t = Y_t ; \ln x_t = X_t ; (1 - A) \ln S = C$

$$\longrightarrow Y_t = AX_t + C$$

Ước lượng các tham số bằng phương pháp OLS, ta được các giá trị ước lượng $\hat{A}$ và $\hat{C}$

$$\ln \hat{S} = \frac{\hat{C}}{1 - \hat{A}} \longrightarrow \hat{S} = e^{\hat{c}/1-\hat{A}}$$

Xác định bằng phương pháp điểm chọn hoặc quay trở lại trường hợp S đã biết