

KINH TẾ LƯỢNG ECONOMETRICS

HOÀNG KHẮC LỊCH
Ph.D. in Economics
Faculty of Development Economics
VNU University of Economics and Business
Email: hoangkhaclich@gmail.com
Cell phone: +84 978135777

HỒI QUY TỔNG THỂ

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + U_i$$

- Trong đó:
 - β_1 là hệ số tự do (hệ số chặn, tung độ gốc)
 - $\beta_j : j = 2, k$ là các hệ số hồi quy riêng
- Giả sử có n quan sát
 - Mỗi quan sát gồm k giá trị $(Y_i, X_{2i}, \dots, X_{ki})$

$$Y_1 = \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \dots + \beta_k X_{k1} + U_1$$

$$Y_2 = \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \dots + \beta_k X_{k2} + U_2$$

$$Y_n = \beta_1 + \beta_2 X_{2n} + \dots + \beta_k X_{kn} + U_n$$

7/1/2014

TS. Hoàng Khắc Lịch

2

HỒI QUY TỔNG THỂ

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + U_i$$

$$Y = X\beta + U$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \dots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \dots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & \dots & X_{kn} \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

7/1/2014

TS. Hoàng Khắc Lịch

3

ƯỚC LƯỢNG CÁC THAM SỐ - OLS

- Hàm hồi quy mẫu:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \dots + \hat{\beta}_k X_{ki}$$

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \dots + \hat{\beta}_k X_{ki} + e_i$$

- Hay:

$$Y = X\hat{\beta} + e$$

- Trong đó:

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = Y - X\hat{\beta}$$

7/1/2014

TS. Hoàng Khắc Lịch

4

ƯỚC LƯỢNG CÁC THAM SỐ - OLS

- Bài toán trở thành:

- Tìm $\hat{\beta}$ để $\sum_{i=1}^n e_i^2$ (tổng bình phương của các phần dư, RSS) đạt giá trị nhỏ nhất.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n e_i^2 = e'e &= (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) = [Y' - (X\hat{\beta})'](Y - X\hat{\beta}) \\ &= [Y' - \hat{\beta}'X'](Y - X\hat{\beta}) = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y - Y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \\ &= Y'Y - 2\hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \end{aligned}$$

7/1/2014

TS. Hoàng Khắc Lịch

5

ƯỚC LƯỢNG CÁC THAM SỐ - OLS

- $\hat{\beta}$ là nghiệm của phương trình sau: $\frac{\partial e'e}{\partial \hat{\beta}} = 0$
- Giải phương trình ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e'e}{\partial \hat{\beta}} &= \frac{\partial (Y'Y - 2\hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}} = 0 \\ &\Rightarrow -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0 \\ &\Rightarrow X'X\hat{\beta} = X'Y \end{aligned}$$

7/1/2014

TS. Hoàng Khắc Lịch

6

ƯỚC LƯỢNG CÁC THAM SỐ - OLS

$$X'X\hat{\beta} = X'Y$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{k1} & X_{k2} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{k1} & X_{k2} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

7/1/2014

TS. Hoàng Khắc Lịch

7

ƯỚC LƯỢNG CÁC THAM SỐ - OLS

$$X'X\hat{\beta} = X'Y$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} n & \sum X_{2i} & \cdots & \sum X_{ki} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \cdots & \sum X_{2i}X_{ki} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{ki} & \sum X_{ki}X_{2i} & \cdots & \sum X_{ki}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{2i}Y_i \\ \vdots \\ \sum X_{ki}Y_i \end{bmatrix}$$

Lưu ý: Giả thiết 4 nói rằng các biến độc lập không có quan hệ tuyến tính với nhau. Do đó, các cột của ma trận X là độc lập tuyến tính, hàng của ma trận bằng với số cột (k). Từ đó, ma trận X không suy biến.

Ma trận X không suy biến $\rightarrow X'X$ cũng không suy biến
 $\rightarrow$ Tồn tại ma trận nghịch đảo $(X'X)^{-1}$ sao cho:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

7/1/2014

TS. Hoàng Khắc Lịch

8

CÁCH TÍNH MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

* Cho A_{nn} có $D = \det(A)$ và D_{ij} là định thức con của D bỏ đi hàng i cột j

* Ma trận A_{nn} khả đảo $\det(A) \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T \text{ với } A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ji}$$

7/1/2014

TS. Hoàng Khắc Lịch

9

CÁCH TÍNH MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

Ví dụ: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & m \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Tính A^{-1}

Giải

$$\begin{aligned} D = \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & m \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (-2) \times 4 + 2^2 \times m + 0 - 2 \times (-2) \times 3 - 0 - 0 \\ &= -8 + 4m + 12 = 4 + 4m \end{aligned}$$

* Nếu $m = -1$ thì $\det(A) = 0$ không tồn tại A^{-1}

* Nếu $m \neq -1$ thì $\det(A) \neq 0$ A^{-1} tồn tại, nên ta tính các phần phụ đại số A_{ij}

7/1/2014

TS. Hoàng Khắc Lịch

10

CÁCH TÍNH MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

Tính phần phụ đại số:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} -2 & m \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8 & A_{12} &= \begin{vmatrix} 0 & m \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2m & A_{13} &= \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \\ A_{21} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8 & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 & A_{23} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & m \end{vmatrix} = 2m + 6 & A_{32} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & m \end{vmatrix} = -m & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} -8 & 2m & 4 \\ -8 & -2 & 4 \\ 2m+6 & -m & -2 \end{bmatrix}^T$$

7/1/2014

TS. Hoàng Khắc Lịch

11

CÁCH TÍNH MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

Sau khi tính được các phần phụ đại số, lắp vào công thức ta có ma trận nghịch đảo:

$$A^{-1} = \frac{1}{4m+4} \begin{bmatrix} -8 & 2m & 4 \\ -8 & -2 & 4 \\ 2m+6 & -m & -2 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{4m+4} \begin{bmatrix} -8 & -8 & 2m+6 \\ 2m & -2 & -m \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{m+1} & \frac{-2}{m+1} & \frac{m+3}{2(m+1)} \\ \frac{m}{2(m+1)} & \frac{-1}{2(m+1)} & \frac{-m}{4(m+1)} \\ \frac{1}{m+1} & \frac{1}{m+1} & \frac{-1}{2(m+1)} \end{bmatrix}$$

7/1/2014

TS. Hoàng Khắc Lịch

12

BÀI TẬP

- Một nhà phân tích công nghiệp điện ảnh muốn ước lượng doanh thu (Y) của một bộ phim được phát hành đối với các biến là: chi phí sản xuất phim (X) và chi phí quảng cáo (Z). Đơn vị tính là 1 triệu đồng.

- Số liệu của 10 bộ phim như sau:

Y	28	35	50	20	75	60	15	45	50	34
X	4	6	5	3	12	9	2	10	8	6
Z	1	3	6	1	11	8	0,5	5	3	2

- Bằng phương pháp OLS và dựa vào các số liệu trên hãy xây dựng hàm hồi quy mẫu biểu diễn mối quan hệ giữa doanh thu với chi phí sản xuất và chi phí dành cho quảng cáo dưới dạng sau:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i + \hat{\beta}_3 Z_i$$

7/1/2014

TS. Hoàng Khắc Lịch

13

GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP

- Để xác lập được 2 ma trận cơ sở, ta phải tính 9 tổng sau:
- $\sum Y_i$, $\sum X_i$, và $\sum Z_i$
- $\sum Y_i^2$, $\sum X_i^2$, và $\sum Z_i^2$
- $\sum Y_i X_i$, $\sum Y_i Z_i$, và $\sum X_i Z_i$

7/1/2014

TS. Hoàng Khắc Lịch

14

GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP

$$X'X\hat{\beta} = X'Y$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} n & \sum X_{2i} & \cdots & \sum X_{ki} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & & \sum X_{2i}X_{ki} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sum X_{ki} & \sum X_{ki}X_{2i} & \cdots & \sum X_{ki}^2 \end{bmatrix}_{k \times k} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix}_{k \times 1} = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{2i}Y_i \\ \vdots \\ \sum X_{ki}Y_i \end{bmatrix}_{k \times 1}$$

Thay các giá trị để xác định các ma trận $X'X$ và $X'Y$. Để xác định được $\hat{\beta}$, chúng ta phải tính được ma trận nghịch đảo của $X'X$, tức là tính $(X'X)^{-1}$. Sau đó lắp vào công thức tính $\hat{\beta}$.

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

7/1/2014

TS. Hoàng Khắc Lịch

15

MA TRẬN HIỆP PHƯƠNG SAI CỦA HỆ SỐ

- Ma trận hiệp phương sai của hệ số hồi quy mẫu ký hiệu là $cov(\hat{\beta})$ là ma trận vuông cấp k được xác định như sau:

$$cov(\hat{\beta}) = \begin{pmatrix} Var(\hat{\beta}_1) & cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) & \cdots & cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_k) \\ cov(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1) & Var(\hat{\beta}_2) & \cdots & cov(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_1) & cov(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_2) & \cdots & Var(\hat{\beta}_k) \end{pmatrix}$$

7/1/2014

TS. Hoàng Khắc Lịch

16

MA TRẬN HIỆP PHƯƠNG SAI CỦA HỆ SỐ

- Ma trận hiệp phương sai là ma trận đối xứng qua đường chéo chính, vì $cov(\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j) = cov(\hat{\beta}_j, \hat{\beta}_i)$, và phần tử thứ i nằm trên đường chéo chính là $Var(\hat{\beta}_i)$. Ta có thể chứng minh được rằng:

$$cov(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

- Trong đó σ^2 là phương sai của sai số ngẫu nhiên.

7/1/2014

TS. Hoàng Khắc Lịch

17

MA TRẬN HIỆP PHƯƠNG SAI CỦA HỆ SỐ

- Do σ^2 chưa biết nên khi áp dụng ta thường thay σ^2 bởi ước lượng không chệch của nó là $\hat{\sigma}^2$ với

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k}$$

- Trong đó,

$$\sum e_i^2 = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y$$

- Hoặc có thể được khai triển như sau:

$$\sum e_i^2 = \sum Y_i^2 - \left(\hat{\beta}_1 \sum Y_i + \hat{\beta}_2 \sum Y_i X_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum Y_i X_{ki} \right)$$

7/1/2014

TS. Hoàng Khắc Lịch

18

HỆ SỐ XÁC ĐỊNH BỘI

- Hệ số xác định bội, ký hiệu là R^2 được xác định như sau:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

- Trong thực hành người ta thường dùng công thức sau để xác định R^2 :

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}'X'Y - n\bar{Y}^2}{Y'Y - n\bar{Y}^2}$$

hay:

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}_1 \sum Y_i + \hat{\beta}_2 \sum Y_i X_{2i} + \dots + \hat{\beta}_k \sum Y_i X_{ki} - n\bar{Y}^2}{\sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2}$$

7/1/2014

TS. Hoàng Khắc Lịch

19

HỆ SỐ XÁC ĐỊNH BỘI ĐIỀU CHỈNH

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-k}$$

7/1/2014

TS. Hoàng Khắc Lịch

20