

BÀI TẬP XÁC SUẤT 2 (2015)

CÔNG THỨC XÁC SUẤT ĐẦY ĐỦ, CÔNG THỨC BAYES

1. Bài tập có lời giải (bài * có Lời giải)**Bài tập 1.1**

Một thí nghiệm bao gồm :

- 2 hộp loại I mỗi cái chứa 7 bi đỏ 3 bi xanh
- 5 hộp loại II mỗi cái chứa 4 bi đỏ 6 bi xanh
- 3 hộp loại III mỗi cái chứa 5 bi đỏ 5 bi xanh

Chọn ngẫu nhiên một hộp, rồi từ hộp đó chọn ngẫu nhiên 1 bi

- a. Tìm xác suất được bi đỏ.
- b. Giả sử lấy được bi đỏ, tìm xác suất để trước đó chọn được hộp loại I

Lời giải BT1.1:

a) Ký hiệu B_i là biến cố lấy được hộp loại i với $i = I, II, III$

A là biến cố lấy được bi đỏ.

B_I, B_{II}, B_{III} lập thành nhóm biến cố đầy đủ

Biến cố A ; lấy được bi đỏ xảy ra theo một trong 3 cách :

$$A = (A \cap B_I) \cup (A \cap B_{II}) \cup (A \cap B_{III})$$

do đó theo **công thức xác suất đầy đủ** :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_I)P(A/B_I) + P(B_{II})P(A/B_{II}) + P(B_{III})P(A/B_{III}) = \\ &= \frac{2}{10} \frac{7}{10} + \frac{5}{10} \frac{4}{10} + \frac{3}{10} \frac{5}{10} = \frac{14+20+15}{100} = 0,49 \end{aligned}$$

b) Theo **công thức Bayes**

$$P(B_I / A) = \frac{P(A/B_I)P(B_I)}{P(A)} = \frac{14}{100} : \frac{49}{100} = \frac{14}{49}$$

Bài tập 1.2

Một xưởng sản xuất có 3 dây chuyền tự động cùng làm ra một loại sản phẩm. Tỷ lệ sản phẩm có khuyết tật (gọi là loại B) ở các dây chuyền lần lượt là: Dây chuyền I: 1% ; II: 3%; III: 2%. Khi tiến hành lấy mẫu kiểm tra thì tỷ lệ sản phẩm của các dây chuyền trên còn lại trong kho lần lượt là : I: 40%; II: 25%; III: 35%.

a) Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm từ kho, tìm xác suất để được sản phẩm không có khuyết tật (gọi là loại A)

b) Giả sử sau khi chọn ngẫu nhiên một sản phẩm từ kho, thấy nó là loại A. Hãy tìm xem dây chuyền nào làm ra sản phẩm đó là có khả năng nhất? Có nghĩa là tìm xem trong các xác suất có điều kiện : $P(C_I/A)$; $P(C_{II}/A)$; và $P(C_{III}/A)$ xác suất nào lớn nhất ?

Lời giải BT1.2 :

a) Ký hiệu A là biến cố lấy được sản phẩm loại A

C_i là biến cố sản phẩm do dây chuyền thứ i , $i = I, II, III$ làm ra. Chúng lập thành một nhóm biến cố đầy đủ. Ta có $P(C_I) = 40\%$, $P(C_{II}) = 25\%$, $P(C_{III}) = 35\%$

Biến cố A có thể xảy ra theo một trong 3 cách:

$$A = (A \cap C_I) \cup (A \cap C_{II}) \cup (A \cap C_{III})$$

do đó, áp dụng **công thức xác suất đầy đủ**:

$$P(A) = P(A/C_I)P(C_I) + P(A/C_{II})P(C_{II}) + P(A/C_{III})P(C_{III}) =$$

$$\left(\frac{99}{100} \times \frac{40}{100}\right) + \left(\frac{97}{100} \times \frac{25}{100}\right) + \left(\frac{98}{100} \times \frac{35}{100}\right) = \frac{3960}{10000} + \frac{2425}{10000} + \frac{3430}{10000} = \frac{9815}{10000} = 0,9815$$

Chú ý: đề bài cho biết tỷ lệ loại B trong mỗi dây chuyền, từ đó ta suy ra tỷ lệ loại A trong mỗi dây chuyền: chẳng hạn $P(A/C_I) = 99\%$

b) Dây chuyền I làm ra sản phẩm đó là có khả năng nhất vì

$$\text{Theo công thức Bayes, } P(C_k/A) = \frac{P(A/C_k)P(C_k)}{P(A)}, k=I,II,III$$

với $P(A)$ được tính theo công thức xác suất đầy đủ như ở câu a) là tổng của 3 số hạng $P(A) = P(A/C_I)P(C_I) + P(A/C_{II})P(C_{II}) + P(A/C_{III})P(C_{III})$. số hạng thứ nhất $P(A/C_I)P(C_I)$ là lớn nhất suy ra

$$P(C_I / A) = \frac{P(A/C_I)P(C_I)}{P(A)} = \frac{3960}{10000} : \frac{9815}{10000} = \frac{3960}{9815} \text{ là lớn nhất}$$

Bài tập 1.3

Một chuồng thỏ có 3 con đực 8 con cái. Chuồng thứ hai có 5 con đực và 4 con cái. Từ chuồng 1 khách mua hàng bắt ngẫu nhiên một con. Số thỏ còn lại được dồn vào một chuồng. Từ chuồng này lại có khách thứ hai chọn ngẫu nhiên hai con để mua.

1. Tìm xác suất để người thứ hai chọn được một cái, một đực.
2. Biết rằng người khách thứ hai mua được một thỏ cái một thỏ đực, tìm xác suất để người thứ nhất mua được một thỏ cái

Lời giải BT1.3:

1. Đặt A là biến cố « khách hàng thứ hai chọn được một con đực một con cái ».

Đặt B là biến cố «con thỏ khách thứ nhất bắt từ chuồng 1 là đực» ($\bar{B}$ là biến cố «con thỏ khách thứ nhất bắt từ chuồng 1 là cái »)

$$P(A) = P(A/B)P(B) + P(A/\bar{B})P(\bar{B}) = \frac{7 \times 12}{C_{19}^2} \times \frac{3}{11} + \frac{8 \times 11}{C_{19}^2} \times \frac{8}{11} = \frac{252 + 704}{1881} = 0,508$$

$$2. P(\bar{B}/A) = \frac{P(A/\bar{B})P(\bar{B})}{P(A)} = \frac{704}{1881} = 0,374$$

2 Bài tập tự giải

Bài tập 2.1 Có hai chuồng thỏ. Chuồng thứ nhất có 3 con đực 6 con cái. Chuồng thứ hai có 5 con đực và 4 con cái. Từ chuồng một bắt ngẫu nhiên 2 con bỏ vào chuồng 2 sau đó từ chuồng 2 bắt ngẫu nhiên 2 con

- a) Tìm xác suất để 2 con bắt từ chuồng 2 được một đực một cái.
- b) Sau khi bắt ngẫu nhiên 2 con từ chuồng 2 ra thấy được 1 đực 1 cái. Tính xác suất để hai con bắt từ chuồng 1 bỏ sang chuồng 2 là 2 đực

Bài tập 2.2 Có hai chuồng thỏ. Chuồng thứ nhất có 3 con đực 6 con cái. Chuồng thứ hai có 5 con đực và 4 con cái. Từ chuồng một bắt ngẫu nhiên 2 con bỏ vào chuồng 2 sau đó từ chuồng 1 lại bắt ngẫu nhiên 2 con

- c) Tìm xác suất để 2 con bắt lần thứ 2 được một đực một cái.

d) Sau khi bắt ngẫu nhiên 2 con từ chuồng 1 lần thứ 2 ra thấy được 1 đực 1 cái. Tính xác suất để hai con bắt lần đầu từ chuồng 1 bỏ sang chuồng 2 là 2 đực

Bài tập 2.3 Một thí nghiệm bao gồm :

- 2 hộp loại I mỗi cái chứa 6 bi đỏ 4 bi xanh
- 3 hộp loại II mỗi cái chứa 5 bi đỏ 5 bi xanh
- 5 hộp loại III mỗi cái chứa 4 bi đỏ 6 bi xanh

Chọn ngẫu nhiên một hộp, rồi từ hộp đó chọn ngẫu nhiên 1 bi.

- a. Tìm xác suất được bi đỏ. Hãy chỉ ra xác suất tiên nghiệm và các xác suất hậu nghiệm
- b. Giả sử lấy được bi đỏ, hãy đoán xem trước đó lấy được hộp loại mấy ? Cho nhận xét về xác suất tiên nghiệm và xác suất hậu nghiệm trong trường hợp này.
- c. Hãy thay đổi dữ liệu của đề bài để biến cố có xác suất hậu nghiệm lớn nhất là biến cố có xác suất tiên nghiệm nhỏ nhất.

Bài tập 2.4 Có ba chiếc hộp đựng các thẻ cào có thưởng phân biệt được.

- Hộp I đựng 3 thẻ không trúng thưởng 2 trúng thưởng
- Hộp II đựng 2 thẻ không trúng thưởng 3 trúng thưởng
- Hộp III đựng 2 thẻ không trúng thưởng 2 trúng thưởng.

Lấy ngẫu nhiên từ hộp I và hộp II mỗi hộp ra một thẻ bỏ vào hộp III. Sau đó từ hộp III lấy ngẫu nhiên ra một thẻ

- a. Tính xác suất để thẻ lấy từ hộp III ra trúng thưởng.
- b. Sau thí nghiệm thấy thẻ lấy từ hộp III là trúng thưởng. Hãy đoán xem 2 thẻ lấy từ hộp I và hộp II bỏ vào hộp III thuộc loại gì ?

Bài tập 2.5 Có hai chuồng thỏ, Chuồng I có 5 thỏ trắng 3 thỏ xám. Chuồng II có 3 thỏ trắng 4 thỏ xám.

Từ chuồng I, 2 con nhảy sang chuồng II, sau đó từ chuồng II, 1 con nhảy sang chuồng I

- a) Tính xác suất để hai con từ chuồng I nhảy sang chuồng II đều là trắng, đều là xám, một trắng và một xám.
- b) Tìm xác suất để con thỏ nhảy từ chuồng II sang chuồng I là trắng.
- c) Sau 2 lần thay đổi thấy con thỏ nhảy từ chuồng II sang chuồng I là trắng. Tính xác suất để trước đó 2 con nhảy từ chuồng I sang chuồng II là xám.
- d) Sau 2 lần thay đổi thấy con thỏ nhảy từ chuồng II sang chuồng I là trắng. Hãy đoán xem để trước đó 2 con nhảy từ chuồng I sang chuồng II có màu gì ?

Bài tập 2.6 * Một căn bệnh hiếm xuất hiện ở một địa phương với tỉ lệ người mắc bệnh là $1/500$. Có một test (thuốc thử) để phát hiện bệnh này. Tuy nhiên không có test nào hoàn hảo. Test cho dương tính đúng với 95% trường hợp (dương tính đúng là người mắc bệnh làm test cho kết quả dương tính). Test cho dương tính sai với tỉ lệ 1% (dương tính sai là người không mắc bệnh làm test được kết quả dương tính)

- Nếu một người được chọn ngẫu nhiên để làm test. Tính xác suất test cho kết quả dương tính
- Làm test cho một người được chọn ngẫu nhiên được kết quả dương tính. Tính xác suất để người đó đúng là mắc bệnh
- Một người mắc bệnh đi làm test 3 lần. Tính xác suất có ít nhất 2 lần cho kết quả dương tính. Biết rằng 3 lần làm test độc lập nhau
- Một người mắc bệnh đi làm test 3 lần. Biết rằng 3 lần làm test cho kết quả độc lập nhau
Gọi X là số lần cho kết quả dương tính. Lập bảng phân phối xác suất của X .

Bài tập 2.7*

Một hộp có 5 bi xanh 7 bi đỏ. Rút ngẫu nhiên một bi xem có màu gì rồi bỏ trả lại hộp và bỏ thêm vào hộp một bi cùng màu. Làm như thế 3 lần liên tiếp. Tìm xác suất có đúng 2 lần được bi xanh.

Bài tập 2.8* Một nhà máy sản xuất bóng đèn có tỉ lệ bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 80%. Trước khi xuất xưởng đưa ra thị trường mỗi bóng đèn được kiểm tra chất lượng để loại bóng không đạt chất lượng. Vì sự kiểm tra không thể hoàn hảo nên một bóng đèn tốt có xác suất 0,9 được công nhận là tốt và một bóng đèn không đạt tiêu chuẩn có xác suất 0,95 bị loại bỏ. Tính tỉ lệ bóng đèn đạt tiêu chuẩn được đưa ra lưu thông ngoài thị trường.

Bài tập 2.9* Có 2 cái hộp. Hộp1 đựng 4 cái kẹo màu vàng (V), 5 kẹo màu đỏ(Đ), 6 kẹo màu xanh (X).

Lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 kẹo từ hộp1bỏ vào hộp 2 đã có sẵn 7 kẹo màu vàng. Sau đó

Từ hộp 2 lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 kẹo.

Tính xác suất để được 3 kẹo có 3 màu khác nhau.

Bài tập 2.10 Trong một kho rượu số lượng rượu loại A và rượu loại B bằng nhau. Người ta chọn ngẫu nhiên một chai rượu trong kho và cho 5 người sành rượu nếm thử để xác định xem đây là rượu loại nào. Giả sử mỗi người có xác suất đoán đúng là 75%. Có 4 người kết luận chai rượu loại A và 1 người kết luận chai rượu loại B. Hỏi khi đó xác suất để chai rượu thuộc loại A là bao nhiêu ?

Bài tập 2.11 Có hai chiếc hộp.

Hộp I đựng 2 bi trắng 5 bi đen

Hộp II đựng 4 bi trắng 3 bi đen

Rút ngẫu nhiên đồng thời từ hộp I ra 2 bi bỏ vào hộp II.

Sau đó từ hộp II rút ngẫu nhiên 1 bi bỏ ngược lại vào hộp I.

Gọi x là số bi trắng có trong hộp I sau hai lần luân chuyển như trên. Hãy lập bảng phân phối xác suất của X .

Lời giải bài tập xác suất 2 (2015)

Lời giải BT 2.6

Dùng công thức xác suất đầy đủ ta có

$$p_a = \frac{1}{500} \times 0.95 + \frac{499}{500} \times 0.01 = 0.01188$$

Dùng công thức Bayes ta có

$$p_b = \frac{\frac{1}{500} \times 0.95}{\frac{1}{500} \times 0.95 + \frac{499}{500} \times 0.01} = 0.1599$$

c) Gọi X là số lần test cho kết quả dương tính. Khi đó có phân phối $B(3, 0.95)$. Do đó

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 3 \times 0.95^2 \times 0.05 + 0.95^3 = 0.99275$$

d) Do $X \sim B(3, 0.95)$ nên ta có $P(X = k) = C_3^k (0.95)^k (0.05)^{3-k}; \quad k = 0, 1, 2, 3.$

Lời giải BT 2.7: Đặt A là biến cố có đúng 2 lần được bi xanh,

B_i là biến cố lần thứ i được bi xanh, $i=1, 2, 3.$

$$P(A) = P(B_1 B_2 \bar{B}_3) + P(B_1 \bar{B}_2 B_3) + P(\bar{B}_1 B_2 B_3)$$

$$P(B_1 B_2 \bar{B}_3) = P(B_1)P(B_2/B_1)P(\bar{B}_3/B_1 B_2)$$

$$P(B_1 \bar{B}_2 B_3) = P(B_1)P(\bar{B}_2/B_1)P(B_3/B_1 \bar{B}_2)$$

$$P(\bar{B}_1 B_2 B_3) = P(\bar{B}_1)P(B_2/\bar{B}_1)P(B_3/\bar{B}_1 B_2)$$

$$\text{Suy ra } P(A) = \frac{5}{12} \times \frac{6}{13} \times \frac{7}{14} + \frac{5}{12} \times \frac{7}{13} \times \frac{6}{14} + \frac{7}{12} \times \frac{5}{13} \times \frac{6}{14} = \frac{15}{52}$$

Lời giải BT 2.8 Chọn ngẫu nhiên 1 bóng từ lô sản phẩm chưa kiểm tra chất lượng.

Đặt $\mathfrak{D}$ là biến cố : lấy được bóng đạt tiêu chuẩn, $\bar{\mathfrak{D}}$ là biến cố : lấy được bóng không đạt tiêu chuẩn

$$P(\mathfrak{D}) = 0,8; \quad P(\bar{\mathfrak{D}}) = 0,2$$

Đặt Q là biến cố một bóng khi xuất xưởng qua được khâu kiểm tra chất lượng để đưa ra thị trường.

$$P(Q) = P(\mathfrak{D})P(Q/\mathfrak{D}) + P(\bar{\mathfrak{D}})P(Q/\bar{\mathfrak{D}})$$

$$= (0,8) \cdot (0,9) + (0,2) \cdot ((0,05) = 0.73$$

Tỉ lệ bóng đạt tiêu chuẩn được đưa ra thị trường bằng xác suất chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm được sản phẩm đạt tiêu chuẩn biết rằng nó qua được khâu kiểm tra chất lượng tức là $P(\text{Đ}/Q)$

Theo Bayes

$$\begin{aligned} P(\text{Đ}/Q) &= \frac{P(\text{Đ})P(Q/\text{Đ})}{P(\text{Đ})P(Q/\text{Đ}) + P(\bar{\text{Đ}})P(Q/\bar{\text{Đ}})} \\ &= \frac{(0,8) \cdot (0,9)}{(0,8) \cdot (0,9) + (0,2) \cdot ((0,05)} = 0,9863 \end{aligned}$$

Lời giải BT2.9. Đặt A là biến cố cần tính xs : lấy được 3 kẹo có màu khác nhau từ hộp 2

Chú ý rằng 3 kẹo lấy từ hộp 1 phải có cả màu đỏ và xanh thì xác suất của biến cố A mới khác 0.

Đặt

$$B_1 \text{ là biến cố : 3 kẹo lấy từ hộp 1 gồm : 1V, 1Đ, 1X ; } P(B_1) = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{C_{15}^3} = \frac{24}{91}$$

$$B_2 \text{ là biến cố : 3 kẹo lấy từ hộp 1 gồm : 0V, 2Đ, 1X ; } P(B_2) = \frac{C_5^2 \cdot 6}{C_{15}^3} = \frac{12}{91}$$

$$B_3 \text{ là biến cố : 3 kẹo lấy từ hộp 1 gồm : 0V, 1Đ, 2X ; } P(B_3) = \frac{5 \cdot C_6^2}{C_{15}^3} = \frac{15}{91}$$

Theo công thức xsđđ

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3) = \\ &= \frac{24}{91} \times \frac{8}{C_{10}^3} + \frac{12}{91} \times \frac{7 \cdot 2 \cdot 1}{C_{10}^3} + \frac{15}{91} \times \frac{7 \cdot 1 \cdot 2}{C_{10}^3} = \frac{570}{10920} = \mathbf{0.0522} \end{aligned}$$