

BÀI TẬP XÁC SUẤT 3

Phân phối nhị thức $B(n,p)$, Phân phối Bernoulli $B(1,p)$,

I Tóm tắt lý thuyết

1.1 Định nghĩa: Một dãy n phép thử Bernoulli độc lập với xác suất thành công trong 1 lần thử là $P(A) = p$ là một dãy n phép thử lặp độc lập mà trong mỗi phép thử thành phần ta chỉ quan sát sự xuất hiện của 2 biến cố A và $\bar{A}$ sao cho xác suất xuất hiện A không đổi theo phép thử. Trong mỗi lần thử nếu A xuất hiện thì gọi là thành công với $P(A) = p$. Nếu $\bar{A}$ xuất hiện thì gọi là thất bại với $P(\bar{A}) = 1 - p = q$

1.2 Định lý Bernoulli:

Thực hiện một dãy n phép thử Bernoulli độc lập với xác suất thành công trong 1 lần thử là $P(A) = p$. Khi đó xác suất để có đúng k lần thành công trong dãy n phép thử trên được tính bởi $P_n(k,p)$ với

$$P_n(k,p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} ; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

1.3 Định nghĩa: Một biến ngẫu nhiên rời rạc X gọi là có phân phối Nhị thức tham số n, p ; ($n \in \mathbb{N}, 0 < p < 1$)

ký hiệu là $X \sim B(n,p)$ nếu phân phối xác suất của nó có dạng:

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} ; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

1.4 Hệ quả : theo định lý Bernoulli:

Gọi X là số lần thành công trong một dãy n phép thử Bernoulli độc lập với xác suất thành công trong một lần thử là $P(A) = p, (0 < p < 1)$, thì X tuân theo luật phân phối Nhị thức $B(n,p)$:

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{với } k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\text{Hoặc} \quad P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad \text{với } k = 0, 1, 2, \dots, n \text{ và } q = 1 - p$$

1.5 Ghi chú:

Bây giờ ta sẽ nhìn một dãy n phép thử Bernoulli theo một cách mới như sau :

1.6 Định lý (tính ổn định của phân phối nhị thức)

Nếu 2 biến ngẫu nhiên X và Y cùng có phân phối nhị thức tham số n, p và m, p và độc lập thì tổng của chúng cũng có phân phối nhị thức với tham số $n+m, p$

$$X \sim B(n, p) \text{ và } Y \sim B(m, p) \text{ ngoài ra } X \text{ và } Y \text{ độc lập thì } X + Y \sim B(n + m, p)$$

1.7 Định nghĩa: (biến ngẫu nhiên Bernoulli)

Biến ngẫu nhiên Nhị thức tham số 1, p : $X \sim B(1, p)$ gọi là biến ngẫu nhiên Bernoulli tham số p (còn ký hiệu là $X \sim B(p)$)

Rõ ràng $X \sim B(1, p)$ thì có phân phối xs: $P(X = 0) = 1 - p$, $P(X = 1) = p$

Hay là dưới dạng bảng PPXS; với $1 - p = q$

X	0	1	Hoặc	X	0	1
P	1- p	p		P	q	p

Dễ thấy : $X \sim B(1, p)$ thì $E(X) = p$ và $D(X) = pq$

Bài toán thực tế:

Đặt X là số thành công trong một lần thực hiện phép thử Bernoulli với xác suất thành công $P(A) = p$. Rõ ràng X nhận 2 giá trị 0 và 1 với xác suất tương ứng là:

$$P(X = 0) = 1 - p, \quad P(X = 1) = p$$

Khi đó rõ ràng X có phân phối Bernoulli với tham số p

1.8 Ghi chú: Mô tả lại một **dãy n** phép thử Bernoulli độc lập với XS thành công trong 1 lần thử là p :

Thực hiện lặp đi lặp lại n lần độc lập nhau **một** phép thử Bernoulli với xác suất thành công là $P(A) = p$, hoặc thực hiện đồng thời độc lập nhau n phép thử Bernoulli, giống hệt nhau, với xác suất thành công trong 1 phép thử là $P(A) = p$ khi đó ta nói là **thực hiện một dãy n phép thử Bernoulli độc lập với xác suất thành công trong 1 lần thử là $P(A) = p$**

1.9 Nhận xét: Gọi X là số lần thành công trong một dãy n phép thử Bernoulli độc lập với xác suất thành công trong một lần thử là $P(A) = p$ ($0 < p < 1$); Đặt X_i là số thành công trong lần thử thứ i ($i=1,2,...,n$) trong dãy n phép thử Bernoulli nói trên thì:

Các biến ngẫu nhiên $X_i, i=1,...,n$, là độc lập, cùng phân phối Bernoulli tham số p .

$$X_i \sim B(1, p), \quad i=1,2,...,n$$

và tổng của chúng có phân phối nhị thức $B(n,p)$:

$$X = X_1 + \dots + X_n \sim B(n, p)$$

1.10 Kết luận Tổng của n biến ngẫu nhiên Bernoulli cùng tham số p , độc lập: $B(1,p)$ có phân phối nhị thức $B(n,p)$

1.11 Kỳ vọng và phương sai của phân phối Bernoulli và Nhị thức:

Nếu X có phân phối Bernoulli $B(1, p)$ thì (với $q = 1 - p$):

- $E(X) = p$
- $D(X) = p(1 - p) = pq$
- Độ lệch tiêu chuẩn $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{pq}$

Nếu $X \sim B(n, p)$ thì (với $q = 1 - p$): đặt $X = X_1 + \dots + X_n$, với $X_i, i=1, \dots, n$, là độc lập, cùng phân phối Bernoulli tham số p ta có $E(X) = E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = np$

- Kỳ vọng $E(X) = np$
- Phương sai $D(X) = \text{Var}(X) = \sigma^2(X) = npq$
- Độ lệch tiêu chuẩn $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{npq}$
- $\text{Mod}(X) = [(n+1)p]$
- Ngoài ra nếu $(n+1)p$ là số nguyên thì $\text{Mod}(X)$ có 2 giá trị: $(n+1)p$ và $(n+1)p-1$
 $\text{Mod}(X)$ còn gọi là số lần xuất hiện có khả năng nhất hay số lần xuất hiện chắc nhất.

1.12 Phân phối của số thứ phẩm trong mẫu (Bài toán lấy mẫu có hoàn lại):

Một lô hàng có tỉ lệ thứ phẩm là p , $0 < p < 1$. Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm, kiểm tra chất lượng xong bỏ trả lại lô hàng, xáo trộn đều rồi lại chọn ngẫu nhiên một sản phẩm lần thứ hai, kiểm tra chất lượng xong lại bỏ trả lại lô hàng, ... cứ thế tiếp tục n lần. Gọi X là số thứ phẩm xuất hiện trong n lần kiểm tra trên thì X có phân phối nhị thức $B(n, p)$.

1.13 Ghi chú: Cách làm trên gọi là lấy mẫu có hoàn lại cỡ n . Lấy mẫu như trên là một dãy n phép thử Bernoulli độc lập với xác suất thành công (lấy được thứ phẩm) trong mỗi lần thử là p không đổi theo phép thử.

II Bài tập có lời giải

2.1. Bài tập Tung 1 đồng xu cân đối đồng chất 3 lần, tìm xác suất xuất hiện:

- ba mặt ngửa,
- hai mặt sấp và một mặt ngửa,
- ít nhất một mặt ngửa,
- nhiều hơn một mặt sấp.

Lời giải: Đây là một dãy 3 phép thử Bernoulli độc lập. Xuất hiện mặt ngửa là thành công, với xác suất thành công là $\frac{1}{2}$. Đặt X là số thành công trong dãy 3 phép thử trên thì X tuân theo luật phân phối Nhị thức $B(3, 1/2)$ do đó

a) Xác suất xuất hiện đúng 3 mặt ngửa là là: $P(X=3) = C_3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

b) Xác suất xuất hiện đúng 1 mặt ngửa là 2 mặt sấp là: $P(X=1) = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

c) Biến cố xuất hiện ít nhất 1 mặt ngửa là biến cố đối của biến cố không xuất hiện mặt ngửa: $P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1 - P(X=0) = 1 - C_3^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{8}$

d) Biến cố xuất hiện nhiều hơn 1 mặt sấp bằng xuất hiện 2 sấp (1 ngửa: $(X=1)$) hoặc 3 sấp (0 ngửa: $(X=0)$):

$$P(X=1) + P(X=0) = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_3^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

2.2 Bài tập Tín hiệu thông tin được phát đi 5 lần độc lập nhau. Xác suất thu được tin của mỗi lần phát là 0,7. Tính xác suất:

a. Thu được tín hiệu đúng 2 lần. **b.** Thu được tín hiệu.

Lời giải: Đây là dãy 5 phép thử Bernoulli độc lập, thu được tín hiệu là thành công với xác suất 0,7. Gọi X là số lần thu được tín hiệu trong 5 lần phát độc lập thì $X \sim B(5; 0,7)$

a. Xác suất thu được tín hiệu 2 lần $P\{X=2\} = C_5^2 0,7^2 0,3^3 = 0,132$

b. Xác suất thu được tín hiệu $P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X=0\} = 1 - 0,002 = 0,998$.

2.3 Bài tập Tung một con xúc xắc cân đối đồng chất 5 lần, tìm xác suất để mặt 4 xuất hiện a) hai lần, b) ít nhất một lần, c) ít nhất hai lần.

Lời giải: Đây là một dãy 5 phép thử Bernoulli độc lập, xuất hiện mặt 4 là thành công, với xác suất thành công là $1/6$

a) $P(X=2) = C_5^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 625/3888$.

b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - C_5^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{6^5 - 5^5}{6^5} = 4651/7776 = 0,598$

$$c) P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - C_5^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^5 - C_5^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^4 =$$

$$= 1 - (0,402 + 0,402) = 0,1962 = 763/3888$$

2.4 Bài tập: Tìm xác suất để chọn ngẫu nhiên hồ sơ một gia đình gia đình có 4 con gặp gia đình có:

a) ít nhất một con trai,

b) ít nhất một con trai biết rằng gia đình này có ít nhất một con gái,

Giả sử rằng xác suất sinh con trai là $\frac{1}{2}$.

Lời giải: đây là một dãy 4 phép thử Bernoulli độc lập với biến cố sinh con trai là thành công, với xác suất $\frac{1}{2}$. Gọi X là số con trai

$$a) P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{16}$$

b) Đặt A là biến cố có ít nhất 1 con trai, B là biến cố có ít nhất 1 con gái. Xác suất phải tìm là: $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

$$P(AB) = P(1 \leq X \leq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 4) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{14}{16}$$

$$P(B) = P(X \leq 3) = 1 - P(X = 4) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$P(A/B) = \frac{14}{15}$$

2.5 Bài tập Trong 2000 gia đình có 4 con, bạn kỳ vọng có bao nhiêu gia đình có a) ít nhất 1 con trai, b) hai con trai, c) 1 hoặc 2 con gái, d) không có con gái?

Lời giải:

a) Gọi X là số gia đình có ít nhất 1 trai trong một dãy 2000 phép thử Bernoulli độc lập với xác suất thành công là $\frac{15}{16}$, X có phân phối nhị thức $B(2000; \frac{15}{16})$, suy ra

- Kỳ vọng số gia đình có ít nhất 1 con trai là $np = 2000 \times (\frac{15}{16}) = 1875$

- b) Kỳ vọng số gia đình có 2 con trai là $= 2000 \times P(2 \text{ trai}) = 2000 \times (3/8) = 750$
- c) Kỳ vọng số gia đình có 1 hoặc 2 gái là $= 2000 \times (5/8) = 1250$
- d) Kỳ vọng số gia đình không có con gái là $= 2000 \times (1/16) = 125$

2.6 Bài tập

Xác suất thành công của một thí nghiệm sinh hóa là 60%. Một nhóm gồm 12 sinh viên làm cùng thí nghiệm trên một cách độc lập nhau.

- 1) Gọi X là số thí nghiệm thành công X có phân phối gì?
- 2) Về trung bình có bao nhiêu thí nghiệm thành công?
- 3) Bạn hãy đoán xem có bao nhiêu thí nghiệm thành công? Tính xác suất của trường hợp đó.

Tìm xác suất để

- 4) Có 10 thí nghiệm thành công.
- 5) Có ít nhất 10 thí nghiệm thành công.
- 6) Có ít nhất 1 thí nghiệm thành công.

Lời giải : Một phép thử là một lần làm thí nghiệm. Biến cố thành công là làm thí nghiệm thành công, Đây là một dãy 12 phép thử Bernoulli độc lập với xác suất thành công là 0.6.

1. Gọi X là số thí nghiệm thành công $X \sim B(12, 0.6)$
2. Về trung bình có $12 \times 0.6 = 7.2$ thành công
3. Nếu đoán ta sẽ chọn số thành công có khả năng nhất: $\text{Mod}X$

$(n+1)p = 13 \times 0.6 = 7.8$ Ta có $\text{Mod}X = 7$. Xác suất của trường hợp này là

$$P(X = 7) = C_{12}^7 (0.6)^7 (0.4)^5$$

$$4. \quad P(X=10) = C_{12}^{10} (0.6)^{10} (0.4)^2$$

$$5 \quad P(X=10) + P(X=11) + P(X=12) = C_{12}^{10} (0.6)^{10} (0.4)^2 + C_{12}^{11} (0.6)^{11} (0.4) + (0.6)^{12}$$

$$6. \quad 1 - P(X = 0) = 1 - (0.4)^{12}$$

2.7 Bài tập Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối đồng chất. Tìm xác suất xuất hiện tổng số nốt là 7 biết rằng một con ra 1

Lời giải: Ký hiệu A là biến cố tổng số nốt là 7. B là biến cố 1 con ra 1.

A gồm các kết cục: $A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$

B gồm các kết cục: $B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)\}$

Xác suất phải tìm là : $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{2/36}{10/36} = \frac{1}{5}$

3. Bài tập tự giải

3.1 Bài tập Giả sử một chiếc máy sản xuất bu lông có tỉ lệ sản phẩm lỗi là 20%, hãy xác định xem xác suất để trong 4 chiếc bu lông được chọn ra một cách ngẫu nhiên có a) 1, b) 0, c) ít hơn 2 chiếc bu lông bị lỗi. Cần lấy mẫu (có hoàn lại) cỡ bao nhiêu để xác suất trong mẫu có ít nhất một bu lông lỗi không bé hơn 95% ?

3.2 Bài tập Tìm xác suất để khi gieo đồng thời 2 con xúc xắc cân đối đồng chất 3 lần được ít nhất một lần có tổng số nốt là 7.

3.4 Bài tập . Nếu xác suất một bu lông bị lỗi là 0.1, tìm a) giá trị trung bình, b) độ lệch tiêu chuẩn của số bu lông lỗi trong số 400 chiếc.

3.5 Bài tập Một đồng xu không cân đối đồng chất được gieo 50 lần liên tiếp. Xác suất xuất hiện mặt sấp trong mỗi lần gieo là 0,45. Khi mặt sấp xuất hiện gọi là thành công. Đặt X là số lần thành công trong dãy 50 thí nghiệm trên.

- Tìm luật phân phối của X. Đây là phân phối gì ?
- Tìm xác suất nhận được 7 thành công.
- Tìm số lần thành công có khả năng nhất.
- Gọi X_i là số thành công trong lần gieo thứ i , $i=1,2,\dots,50$. Tìm luật phân phối của biến ngẫu nhiên X_i .
- Biểu diễn biến ngẫu nhiên X thông qua các biến X_i , $i=1,\dots,50$

3.6 Bài tập Phân phối của số thứ phẩm trong mẫu (Lấy mẫu ngẫu nhiên có hoàn lại) Một lô hàng có 25 sản phẩm, trong đó có 3 thứ phẩm (trọng lượng không đạt tiêu chuẩn). Chọn ngẫu

nhiên lần lượt 4 lần độc lập nhau mỗi lần một sản phẩm, đo trọng lượng, ghi kết quả rồi bỏ trả lại vào lô trước khi rút tiếp sản phẩm sau. Gọi X là số lần lấy được thứ phẩm trong 4 lần trên.

- Tìm luật phân bố của X .
- Nhận dạng phân bố (tên và các thông số).
- Nếu quá trình kiểm tra trên
 - Không có lần nào lấy được thứ phẩm thì lô hàng được xếp loại A,
 - Nếu 1 đến 2 lần được thứ phẩm thì lô hàng xếp loại B.

Tìm xác suất lô hàng được xếp loại A; loại B

3.7 Bài tập: Ở các máy bán tem tự động, cứ 10 tem bán ra có một cái có số ở mặt sau, các tem có số được ghi riêng trong một catalogue. Một người chơi tem nhận được 5 bức thư gửi từ 5 người khác nhau, được dán tem từ máy tự động. Trước khi bóc tem người này tự hỏi rằng nếu coi số các con tem có đánh số dán ở 5 bức thư là X thì;

- X có thể nhận các giá trị nào?
- Luật phân bố của X là gì?
- Kỳ vọng của X là bao nhiêu?
- Xác suất để có ít nhất hai trong số tem đó là có đánh số?

3.8 Bài tập Trong số 800 gia đình có 5 con, bạn kỳ vọng bao nhiêu gia đình có (a) 3 trai, (b) 5 gái, (c) 2 hoặc 3 trai, giả sử xác suất sinh con trai và con gái bằng nhau

3.9 Bài tập Gieo một con xúc xắc cân đối đồng chất 3 lần độc lập nhau. Tính xác suất để

- Tổng số chấm xuất hiện là 8 biết rằng ít nhất 1 lần ra một chấm.
- Có ít nhất một lần ra lục nếu biết rằng số chấm ở 3 lần gieo là khác nhau.

3.10 Bài tập Hai đấu thủ A và B thi đấu bóng bàn. Xác suất thắng của A trong một ván là 0.55 (không có hòa). Cuộc thi gồm năm ván. Người nào thắng một số ván lớn hơn là thắng cuộc. Tìm xác suất để B thắng cuộc