

CHƯƠNG I: BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH**§1 MỘT SỐ VÍ DỤ DẪN ĐẾN BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH****I. Bài toán lập kế hoạch sản xuất trong điều kiện tài nguyên hạn chế:**

Ví dụ:

Nhân dịp tết trung thu, 1 xí nghiệp muốn sản xuất 3 loại bánh: Đậu xanh, thập cẩm, bánh dẻo nhân đậu xanh. Để sản xuất 3 loại bánh này, xí nghiệp phải có đường, đậu, bột, trứng, mứt, lạp xưởng... Giả sử số đường có thể chuẩn bị được là 500kg, đậu là 300kg, các nguyên liệu khác muốn có bao nhiêu cũng được. Lượng đường, đậu và số tiền lãi khi bán 1 chiếc bánh mỗi loại cho trong bảng:

Bánh \ Nguyên liệu	Bánh đậu xanh	Bánh thập cẩm	Bánh dẻo
Đường: 500kg	0.06kg	0.04kg	0.07kg
Đậu: 300kg	0.08kg	0	0.04kg
Lãi:	2 ngàn	1.7 ngàn	1.8 ngàn

Cần lập kế hoạch sản xuất mỗi loại bánh bao nhiêu cái để không bị động về đường, đậu và tổng số lãi thu được là lớn nhất(nếu sản xuất ra bao nhiêu cũng bán hết)

GIẢI:

Phân tích:

Gọi $x_1; x_2; x_3$ lần lượt là số lượng bánh đậu xanh, thập cẩm, bánh dẻo cần sản xuất

- Điều kiện của ẩn: $x_i \geq 0, i = \overline{1,3}$.
- Tổng số đường: $0.06 x_1 + 0.04 x_2 + 0.07 x_3$
 Tổng số đậu: $0.08 x_1 + 0. x_2 + 0.04 x_3$
 Tổng tiền lãi: $2 x_1 + 1.7 x_2 + 1.8 x_3$

Ta có mô hình toán học của bài toán:

$$\begin{aligned} \text{Maximize } f(x) &= 2x_1 + 1.7x_2 + 1.8x_3 \rightarrow \max \\ \text{Subject to } \begin{cases} 0.06x_1 + 0.04x_2 + 0.07x_3 \leq 500 \\ 0.08x_1 + 0.x_2 + 0.04x_3 \leq 300 \end{cases} \\ x_j &\geq 0, j = \overline{1,3} \end{aligned}$$

Mô hình toán học dưới dạng ma trận:

Ma trận ràng buộc:

$$A = \begin{bmatrix} 0.06 & 0.04 & 0.07 \\ 0.08 & 0 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$B = \begin{bmatrix} 500 \\ 300 \end{bmatrix}$ véc tơ số hạng tự do.

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ - là véc tơ ẩn số.

Một véc tơ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ - thỏa (2) và (3) gọi là 1 phương án của bài toán.

Một phương án $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ - thỏa (1) gọi là 1 phương án tối ưu của bài toán.

II. Bài toán đầu tư vốn nhỏ nhất:

Ví dụ:

Có 3 xí nghiệp may cùng có thể sản xuất áo vét và quần. Do trình độ công nhân, tài tổ chức, mức trang bị kỹ thuật... khác nhau, nên hiệu quả của đồng vốn ở các xí nghiệp cũng khác nhau. Giả sử đầu tư 1000\$ vào mỗi xí nghiệp thì cuối kỳ ta có kết quả

Xí nghiệp 1: 35 áo 45 quần.

Xí nghiệp 2: 40 áo 42 quần.

Xí nghiệp 3: 43 áo 30 quần.

Lượng vải và số giờ công cần thiết để sản xuất 1 áo hoặc 1 quần (gọi là suất tiêu hao nguyên liệu và lao động) được cho ở bảng sau:

XN \ Sản phẩm	1	2	3
Áo vét	3.5m 20h	4m 16h	3.8m 18h
Quần	2.8m 10h	2.6m 12h	2.5m 15h

Tổng số vải và giờ công lao động có thể huy động được cho cả 3 xí nghiệp là 10.000m và 52.000 giờ công.

Theo hợp đồng kinh doanh thì cuối kỳ phải có tối thiểu 1500 bộ quần áo. Do đặc điểm hàng hóa, nếu lẻ bộ chỉ có quần là dễ bán.

Hãy lập kế hoạch đầu tư vào mỗi xí nghiệp bao nhiêu vốn để :

- Hoàn thành kế hoạch sản phẩm.
- Không khó khăn về tiêu thụ.
- Không bị đọng về vải và tiêu thụ.
- Tổng số vốn đầu tư nhỏ nhất là điều nổi bật cần quan tâm.

Phân tích:

1) Gọi $x_1; x_2; x_3$ lần lượt là số đơn vị vốn đầu tư (1000\$) vào mỗi xí nghiệp.

Ta có: $x_j \geq 0, j = \overline{1, 3}$

2) Tổng số áo của 3 XN: $35 x_1 + 40 x_2 + 43 x_3$,

3) Tổng số quần của 3 XN: $45 x_1 + 42 x_2 + 30 x_3$,

Để không khó khăn về tiêu thụ thì:

$$45 x_1 + 42 x_2 + 30 x_3 \geq 35 x_1 + 40 x_2 + 43 x_3 \Leftrightarrow 10 x_1 + 2 x_2 - 13 x_3 \geq 0$$

4) Tổng số bộ quần áo = Tổng số áo của 3 XN: $35 x_1 + 40 x_2 + 43 x_3$,

5) Tổng số mét vải của 3 xí nghiệp (dùng để may áo và quần):

$$\begin{aligned}
 & 3.5 \times 35 x_1 + 4 \times 40 x_2 + 3.8 \times 43 x_3 \\
 & + \\
 & \frac{2.8 \times 45 x_1 + 2.6 \times 42 x_2 + 2.5 \times 30 x_3}{248 .5 x_1 + 269 .2 x_2 + 238 .4 x_3}
 \end{aligned}$$

6) Tổng số giờ công của 3 xí nghiệp:

$$\begin{aligned}
 & 20 \times 35 x_1 + 16 \times 40 x_2 + 18 \times 43 x_3 \\
 & + \\
 & \frac{10 \times 45 x_1 + 12 \times 42 x_2 + 15 \times 30 x_3}{1150 x_1 + 1144 x_2 + 1224 x_3}
 \end{aligned}$$

7) Tổng số vốn đầu tư(đơn vị: 1000\$): $x_1 + x_2 + x_3$

Mô hình toán học

$$\begin{aligned}
 & \min x = x_1 + x_2 + x_3 \\
 & \begin{cases} 10 x_1 + 2 x_2 - 13 x_3 \geq 0 \\ 35 x_1 + 40 x_2 + 43 x_3 \geq 1500 \\ 248 .5 x_1 + 269 .2 x_2 + 238 .4 x_3 \leq 10000 \\ 1150 x_1 + 1144 x_2 + 1224 x_3 \leq 52000 \end{cases} \\
 & x_j \geq 0, j = \overline{1,3}
 \end{aligned}$$

Mô hình toán học dưới dạng ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & -13 \\ 35 & 40 & 43 \\ 248 .5 & 269 .2 & 238 .4 \\ 1150 & 1144 & 1224 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1500 \\ 10000 \\ 52000 \end{bmatrix}$$

III. Bài toán vận tải

Ví dụ:

Ta cần vận tải vật liệu từ 2 kho: K_1 và K_2 , đến 3 công trường xây dựng: C_1 , C_2 , C_3 . Tổng số vật liệu có ở mỗi kho, tổng số vật liệu yêu cầu của mỗi công trường, khoảng cách từ mỗi kho đến mỗi công trường được cho ở bảng sau:

CT km Kho	C_1 15T	C_2 20T	C_3 25T
	5km	7km	2km
K_1 20T x_{11} x_{12} x_{13}			
K_2 40T x_{21} x_{22} x_{23}	4km	3km	6km

Hãy lập kế hoạch vận chuyển thế nào để:

- Các kho giải phóng hết vật liệu.
- Các công trường nhận đủ vật liệu cần thiết.
- Tổng số $T \times km$ phải thực hiện là ít nhất.

GIAI

Phân tích:

1. Gọi x_{ij} $i=1,2; j=1,2,3$ lần lượt là số tấn vật liệu vận chuyển từ kho

$$K_i \rightarrow C_j \quad \forall x_{ij} \geq 0$$

2. Số tấn vật liệu từ kho K_1 đến 3 công trường:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13}$$

3. Số tấn vật liệu từ kho K_2 đến 3 công trường:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23}$$

4. Số tấn vật liệu công trường C_1 nhận được từ 3 kho:

$$x_{11} + x_{21}$$

5. Số tấn vật liệu công trường C_2 nhận được từ 3 kho:

$$x_{12} + x_{22}$$

6. Số tấn vật liệu công trường C_3 nhận được từ 3 kho:

$$x_{13} + x_{23}$$

7. Tổng số $T \times km$:

$$5x_{11} + 7x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + 3x_{22} + 6x_{23}$$

Mô hình toán học:

1. $f(x) = 5x_{11} + 7x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + 3x_{22} + 6x_{23} \rightarrow \min$

2.
$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 20 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 40 \\ x_{11} + x_{21} = 15 \\ x_{12} + x_{22} = 20 \\ x_{13} + x_{23} = 25 \end{cases}$$

3. $x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2; j = 1, 2, 3$

§2 CÁC DẠNG BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

I. Dạng tổng quát:

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min \quad \max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_j \geq 0, j \in J_1; x_j \leq 0, j \in J_2; x_j \text{ tự do}, j \in J_3; J_1 \cup J_2 \cup J_3 = \{1, 2, \dots, n\} \end{cases}$$

- Vector $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ thỏa (2); (3) gọi là 1 phương án của bài toán.
- Nếu phương án thỏa (1) tức là hàm mục tiêu đạt cực đại (hay cực tiểu) thì gọi là phương án tối ưu.
- Giải 1 bài toán QHTT là đi tìm phương án tối ưu hoặc chỉ ra bài toán không có phương án tối ưu.

Ví dụ:

Bài toán sau đây có dạng tổng quát:

$$\min \sum_{j=1}^5 c_j x_j \rightarrow \min \quad \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 17 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 20 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 \geq -18 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1; x_4 \geq 0; x_2; x_5 \leq 0; x_3 \text{ tự do} \end{cases}$$

II. Dạng chính tắc:

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min \quad \max$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = \overline{1, m}$$

$$\begin{cases} x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Ví dụ: Bài toán sau có dạng chuẩn

$$f(x) = 3x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_4 + x_5 = 20 \\ -3x_1 + 4x_2 - 4x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 28 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1,6}$$

$$A = \begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}$$

Ta có x_5 là ẩn cơ bản thứ nhất, x_6 là ẩn cơ bản thứ hai, x_3 là ẩn cơ bản thứ ba
 Phương án cơ bản ban đầu: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \rightarrow 0, 0, 28, 0, 20, 0$

§3 BIẾN ĐỔI DẠNG CỦA BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

I. Đưa dạng tổng quát về dạng chính tắc:

1) Nếu gặp ràng buộc dạng: $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$ ta cộng thêm vào vế trái 1 ẩn phụ

(Slack variable) không âm $x_{i+1} \geq 0$ để biến về dạng phương trình:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{i+1} = b_i$$

2) Nếu gặp ràng buộc dạng: $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$ ta cộng thêm vào vế trái 1 ẩn phụ

(Slack variable) không âm $x_{i+1} \geq 0$, với hệ số -1 để biến về dạng phương trình:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - x_{i+1} = b_i$$

Chú ý: Các ẩn phụ chỉ là những số giúp ta biến bất phương trình thành phương trình, chứ không đóng vai trò gì về kinh tế, nên nó không ảnh hưởng đến hàm mục tiêu. Vì vậy hệ số của nó trong hàm mục bằng 0.

3) Nếu gặp ẩn $x_j \leq 0$ ta thay $x_j = -t_j$, $t_j \geq 0$

4) Nếu gặp ẩn x_j tự do ta thay $x_j = x'_j - x''_j$, $x'_j, x''_j \geq 0$

Ví dụ:

Đưa bài toán sau về dạng chính tắc:

$$\begin{aligned} \text{Min } f(x) &= 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 \rightarrow \min \\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 7 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 \geq -1 \\ 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 10 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 20 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 7 \\ -x_2 - 2x_3 - x_4 \leq 1 \\ 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 10 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 20 \end{cases} \\ x_1, x_5 \geq 0; x_4 \leq 0; x_2, x_3 \text{ tự do} & \end{aligned}$$

GIẢI

- Cộng vào (a) ẩn phụ $x_6 \geq 0$.
- Cộng vào (b) ẩn phụ $x_7 \geq 0$.
- Cộng vào (c) ẩn phụ $x_8 \geq 0$ với hệ số -1
- Thay $x_4 = -t_4$; $t_4 \geq 0$
- Thay $x_2 = x'_2 - x''_2$; $x'_2 \geq 0$, $x''_2 \geq 0$
- Thay $x_3 = x'_3 - x''_3$; $x'_3 \geq 0$, $x''_3 \geq 0$

Bài toán đưa về dạng chính tắc như sau:

$$\begin{aligned} & \min f(x) = 2x_1 - x_2' - x_2'' + 2x_3' - x_3'' - t_4 - 2x_5 + 0.x_6 + 0.x_7 + 0.x_8 \\ & \begin{cases} x_1 - 2x_2' - x_2'' + x_3' - x_3'' - 2t_4 + x_5 + x_6 = 7 \\ -x_2' - x_2'' + 2x_3' - x_3'' - t_4 + x_7 = 1 \\ 2x_3' - x_3'' - t_4 + 3x_5 - x_8 = 10 \\ x_1 + x_2' - x_2'' + 2x_3' - x_3'' - t_4 = 20 \end{cases} \\ & x_1; x_5 \geq 0; t_4 \geq 0; x_2'; x_2''; x_3'; x_3''; x_6; x_7; x_8 \geq 0 \end{aligned}$$

chú ý:

Nếu $x_1^0, x_2^0, x_2'^0, x_2''^0, x_3^0, x_3'^0, x_3''^0, t_4^0, x_5^0, x_6^0, x_7^0, x_8^0$ là phương án tối ưu của bài toán mới thì

$x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0$ with $x_2^0 = x_2'^0 - x_2''^0, x_3^0 = x_3'^0 - x_3''^0, x_4^0 = -t_4^0$ là phương án tối ưu của bài toán gốc.

II. Đưa dạng chính tắc về dạng chuẩn:

1) Mô tả phương pháp:

Giả sử bài toán đã có dạng chính tắc: (Giả sử $b_i \geq 0, i = \overline{1, m}$)

$$\begin{aligned} & \min f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \\ & x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{aligned}$$

- Ta thêm vào mỗi phương trình một ẩn giả không âm $x_{n+i} \geq 0$ với hệ số 1
- Trong hàm mục tiêu $f(x) \rightarrow \min$, ẩn giả có hệ số M ($M > 0$, M lớn hơn số nào cần so sánh)
- Trong hàm mục tiêu $f(x) \rightarrow \max$, ẩn giả có hệ số $-M$

Ta có bài toán mới gọi là bài toán mở rộng của bài toán xuất phát.

$$\begin{aligned}
 & \text{1-} \left\{ \begin{aligned} & f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \pm M \sum_{i=1}^m x_{n+i} \rightarrow \min \quad \left(\begin{aligned} & \text{max} \end{aligned} \right) \end{aligned} \right. \\
 & \text{2-} \left\{ \begin{aligned} & a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ & a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{aligned} \right. \\
 & \text{3-} \left\{ \begin{aligned} & x_j \geq 0 \quad j = \overline{1, n+m} \end{aligned} \right. \\
 & \overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & \dots & a_{1n}x_n & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}x_1 & \dots & a_{2n}x_n & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1}x_1 & \dots & a_{mn}x_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ta thấy bài toán đã có dạng chuẩn với ẩn cơ bản thứ i là x_{n+i} $i = \overline{1, m}$ - là các ẩn giả.

Ví dụ:

$$\begin{aligned}
 & \text{1-} \left\{ \begin{aligned} & f(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max \end{aligned} \right. \\
 & \text{2-} \left\{ \begin{aligned} & x_1 + 5x_2 + 5x_4 = 25 \\ & -4x_2 - x_3 + 6x_4 = 18 \\ & 3x_2 + 8x_4 = 28 \end{aligned} \right. \\
 & \text{3-} \left\{ \begin{aligned} & x_j \geq 0; j = \overline{1, 4} \end{aligned} \right. \\
 & A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 8 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ta thấy còn thiếu vector cột đơn vị thứ 2 và thứ 3 nên phải thêm ẩn giả vào phương trình thứ 2 và thứ 3. Bài toán đưa về dạng chuẩn.

$$\begin{aligned}
 & \text{1-} \left\{ \begin{aligned} & f(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - Mx_5 - Mx_6 \rightarrow \max \end{aligned} \right. \\
 & \text{2-} \left\{ \begin{aligned} & x_1 + 5x_2 + 5x_4 = 25 \\ & -4x_2 - x_3 + 6x_4 + x_5 = 18 \\ & 3x_2 + 8x_4 + x_6 = 28 \end{aligned} \right. \\
 & \text{3-} \left\{ \begin{aligned} & x_j \geq 0; j = \overline{1, 6} \end{aligned} \right. \\
 & \overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

2) Quan hệ giữa bài toán xuất phát và bài toán mở rộng

NHẬN XÉT

- a) Nếu $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ là phương án của bài toán xuất phát thì $\bar{x} = x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots, 0$ là phương án của bài toán mở rộng.
- b) Nếu $x^0 = x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ là phương án tối ưu của bài toán xuất phát thì $\bar{x}^0 = x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, 0, \dots, 0$ là phương án tối ưu của bài toán mở rộng.
- Từ đó nếu bài mở rộng không có phương án tối ưu thì bài toán xuất phát cũng không có phương án tối ưu.
- c) Nếu $\bar{x}^0 = x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, 0, \dots, 0$ là phương án tối ưu của bài toán mở rộng thì $x^0 = x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ là phương án tối ưu của bài toán xuất phát.
- d) Nếu bài toán mở rộng có phương án tối ưu trong đó có 1 ẩn giả nhận giá trị dương thì bài toán xuất phát không có phương án.

BÀI TẬP CHƯƠNG I

Lập mô hình toán học

1) Công ty bao bì được cần sản xuất 3 loại hộp giấy đựng thuốc B₁, Cao sao vàng và đựng “Quy sâm đại bổ hoàn”.

Để sản xuất ra các hộp này công ty dùng các tấm bìa có kích thước giống nhau. Mỗi tấm bìa có 5 cách cắt khác nhau

Cách	Hộp B ₁	Hộp cao sao vàng	Hộp quy sâm
1	2	0	2
2	0	7	4
3	8	0	3
4	1	6	2
5	9	2	0

Theo kế hoạch số hộp B₁ phải có là 1500, số hộp quy sâm là 2000, số hộp cao sao vàng tối thiểu là 1000. Cần phương án cắt sao cho tổng số tấm bìa phải dùng là ít nhất. Hãy lập mô hình bài toán.

2)

Xí nghiệp cơ khí An Phú cần cắt 1000 đoạn thép dài 0.55m; 800 đoạn dài 0.8m và 1120 đoạn dài 0.45m làm chuồng gà. Để có các đoạn thép này, xí nghiệp phải dùng 3 loại thanh thép: loại 1 dài 1.2m; loại 2 dài 1.5m và loại 3 dài 1.8m. Các cách cắt được cho trong bảng dưới

Loại thép	Cách cắt	0.55m	0.8m	0.45m	Thừa
I: 1.2m	1	1	0	1	0.2
	2	2	0	0	0.1
	3	0	0	2	0.3

Toán chuyên ngành**Quy hoạch tuyến tính**

II: 1.5m	1	1	1	0	0.15
	2	1	0	2	0.05
	3	0	1	1	0.25
	4	0	0	3	0.15
III: 1.8m	1	1	1	1	0
	2	0	1	2	0.1
	3	0	2	0	0.2
	4	0	0	4	0

Cần tìm phương án cắt sao cho tổng số mẫu thép thừa là ít nhất. Lập mô hình bài toán.

Nhận dạng và đổi dạng

Trong các bài toán từ 1 đến 5 dưới đây:

1)

$$1) \quad \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 17 \\ 4x_1 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 20 \end{cases}$$

$$3) \quad x_j \geq 0 \quad j = 1, 5$$

2)

$$1) \quad \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 32 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 16 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 32 \end{cases}$$

$$3) \quad x_1, x_3 \leq 0; x_2 \geq 0; x_4, x_5 \text{ tự do}$$

3)

$$1) \quad \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 17 \\ 4x_1 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 20 \\ -2x_1 + 4x_5 + x_6 = 6 \end{cases}$$

$$3) \quad x_j \geq 0 \quad j = 1, 6$$

4)

$$\begin{aligned} & \text{1) } f(x) \rightarrow \max \\ & \text{2) } \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 8 \end{cases} \\ & \text{3) } x_j \geq 0 \quad j = \overline{1, 4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{5) } f(x) \rightarrow \min \\ & \text{2) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -7 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 15 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 \geq 8 \end{cases} \\ & \text{3) } x_j \geq 0 \quad j = \overline{1, 4} \end{aligned}$$

- Những bài toán nào đã có dạng chính tắc.
- Những bài toán nào đã có dạng chuẩn? Ẩn cơ bản là những ẩn nào? Thứ tự của nó thế nào? Hãy tìm phương án cơ bản ban đầu của nó.
- Những bài toán nào chưa có dạng chuẩn hãy đưa về dạng chuẩn sau đó cho biết ẩn nào là ẩn cơ bản, ẩn cơ bản ấy là ẩn gì? (ẩn chính, ẩn phụ, ẩn giả) thứ tự của nó thế nào? Phương án cơ bản ban đầu của bài toán dạng chuẩn này thế nào.

CHƯƠNG II: PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

§1 THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH

I. Trường hợp $f \rightarrow \min$ (gồm 5 bước)

Bước 1: Lập bảng ban đầu

Hệ số	Ấn cơ bản	Phương án	c_1	c_2	c_r	c_m	c_{m+1}	...	c_v	...	c_n	λ_i
			x_1	x_2	x_r	x_m	x_{m+1}	...	x_v	...	x_n	
c_1	x_1	b_1	1	0	...	0	...	0	a_{1v}	...	a_{1n}	λ_1
c_2	x_2	b_2	0	1	...	0	...	0	a_{2v}	...	a_{2n}	λ_2
c_r	x_r	b_r	0	0	...	1	...	0	a_{rv}	...	a_{rn}	λ_r
c_m	x_m	b_m	0	0	...	0	...	1	a_{mv}	...	a_{mn}	
	f	f_0	Δ_1	Δ_2	Δ_r	Δ_m	Δ_{m+1}	...	Δ_v	...	Δ_n	

Trong đó $f_0 = \sum_{i=1}^m c_i b_i$ & $\Delta_j = \sum_{i=1}^m c_i a_{ij} - c_j$

Bước 2: Kiểm tra tính tối ưu

a) Nếu $\Delta_j \leq 0 \quad \forall j$ thì phương án đang xét là tối ưu và giá trị hàm mục tiêu tương ứng là $f = f_0$

b) Nếu $\exists \Delta_j > 0$ mà $a_{ij} \leq 0 \quad i = \overline{1, m}$ thì bài toán không có phương án tối ưu

Nếu cả 2 trường hợp trên không xảy ra thì chuyển sang bước 3

Bước 3: Tìm ẩn đưa vào:

Nếu $\Delta_v = \max_j \Delta_j$ thì x_v được chọn đưa vào.

Bước 4: Tìm ẩn đưa ra:

$$\lambda_i = \frac{b_i}{a_{iv}} \text{ with } a_{iv} > 0$$

$$\text{If } \lambda_r = \min_i \lambda_i \text{ then } x_r \text{ out}$$

Bước 5: Biến đổi bảng (dùng phương pháp khử Gauss-Jordan)

1. Thay x_r bằng x_v . Các ẩn cơ bản khác và các hệ số tương ứng giữ nguyên.
2. hàng chuẩn=hàng đưa ra(x_r)/ a_{rv} .
3. hàng i(mới)= $-a_{iv} \times$ hàng chuẩn+ hàng i(cũ).
4. hàng cuối (mới)= $-\Delta_v \times$ hàng chuẩn+ hàng cuối(cũ).

II. Trường hợp $f \rightarrow \max$

Đặt $g \rightarrow \min$ $g = -f$. Vậy ta đã chuyển về bài toán Hàm mục tiêu cực tiểu và do đó ta hoàn toàn có thể áp dụng kết quả của bài toán min.

Ví dụ:

Giải bài toán QHTT:

$$f \rightarrow \min \quad 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 - 2x_4 - 9x_5 = 32 \\ 2x_2 + x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_5 = 30 \\ 3x_2 + x_5 \leq 36 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1,5}$$

$\rightarrow$ standard form

$$f \rightarrow \min \quad 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 + 0.x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 - 2x_4 - 9x_5 = 32 \\ 2x_2 + x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_5 = 30 \\ 3x_2 + x_5 + x_6 = 36 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1,6}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & -2 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bảng đơn hình:

Hệ số	Ân cơ bản	Phương án	2	5	4	1	-5	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_1	32	1	-6	0	-2	-9	0
4	x_3	30	0	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0
0	x_6	36	0	3	0	0	1	1
	f	184	0	-9	0	-3	-7	0

$\Delta_j \leq 0, \forall j \Rightarrow$ phương án tối ưu là $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 32, 0, 30, 0, 0$

Ví dụ:

$$f(x) = 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - 7x_6 + 7 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 15 \\ 2x_1 - x_3 + 2x_6 = -9 \\ 4x_1 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, 6}$$

$\rightarrow$ standard form

$$f(x) = 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - 7x_6 + 7 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 15 \\ -2x_1 + x_3 - 2x_6 = 9 \\ 4x_1 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, 6}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Bảng đơn hình:

Hệ số	Ân cơ bản	Phương án	6	1	1	3	1	-7
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	x_2	15	-1	1	0	-1	0	(1)
1	x_3	9	-2	0	1	0	0	-2
1	x_5	2	4	0	0	2	1	-3
	f	26+7	Δ_1 -5	Δ_2 0	Δ_3 0	Δ_4 -2	Δ_5 0	Δ_6 (3)
-7	x_6	15	-1	1	0	-1	0	1
1	x_3	39	-4	2	1	-2	0	0
1	x_5	47	1	3	0	-1	1	0
	f	-19+7	-2	-3	0	(1)	0	0

Ở phương án cơ bản ban đầu:

$$\max \Delta_j = \Delta_6 = 3 \Rightarrow x_6 \text{ in}$$

$$a_{rv} = 1 \Rightarrow x_2 \text{ out}$$

Ở phương án thứ 2

$\max \Delta_j = \Delta_4 = 1$ but $a_{i4} < 0, \Rightarrow 1, -2, -1 \Rightarrow$ bài toán không có phương án tối ưu.

Ví dụ:

$$f(x) = -2x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 52 \\ 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 60 \\ 3x_2 + x_5 = 36 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1,5}$$

→ s tan dard form

$$g(x) = -f(x) = 2x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 3x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 52 \\ 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 60 \\ 3x_2 + x_5 = 36 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1,5}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bảng đơn hình:

Hệ số	Ấn cơ bản	Phương án	2	-6	-4	2	-3
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	52	1	2	(4)	0	0
2	x_4	60	0	4	2	1	0
-3	x_5	36	0	3	0	0	1
	$g(x) =$	116	Δ_1 0	Δ_2 9	Δ_3 (16)	Δ_4 0	Δ_5 0
	x_3	13	1/4	1/2	1	0	0
	x_4	34	-1/2	(3)	0	1	0
	x_5	36	0	3	0	0	1
	$g(x) =$	-92	-4	(1)	0	0	0
	x_3	22/3	1/3	0	1	-1/6	0
	x_2	34/3	-1/6	1	0	1/3	0
	x_5	2	1/2	0	0	-1	1
	$g(x) =$	-310/3	-23/6	0	0	-1/3	0

Ở phương án cơ bản ban đầu:

$$\max \Delta_j = \Delta_3 = 16 \Rightarrow x_3 \text{ in}$$

$$\min \lambda_i = \lambda_1 = \frac{52}{4} = 13$$

$$a_{rv} = 4 \Rightarrow x_1 \text{ out}$$

Ở phương án thứ 2

$$\max \Delta_j = \Delta_2 = 1 \Rightarrow x_2 \text{ in}$$

$$\min \lambda_i = \lambda_2 = \frac{34}{3}$$

$$a_{rv} = 3 \Rightarrow x_4 \text{ out}$$

Phương án cuối cùng: $\Delta_j \leq 0, \forall j \Rightarrow$ ta có phương án tối ưu là:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = \left(0, \frac{34}{3}, \frac{22}{3}, 0, 2 \right)$$

Giá trị của phương án: $f_0 = -g_0 = \frac{310}{3}$

§2 THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH MỞ RỘNG

I. Chú ý trong thuật toán đơn hình mở rộng

Nếu gặp bài toán dạng chính tắc chưa phải dạng chuẩn ta dùng ẩn giả để đưa bài toán về dạng chuẩn.

1. Nếu bài toán mở rộng không có phương án tối ưu thì bài toán xuất phát cũng không có phương án tối ưu.
2. Nếu bài toán mở rộng có phương án tối ưu mà các ẩn giả đều bằng 0, thì bỏ phần ẩn giả đi ta còn phương án tối ưu của bài toán xuất phát.
3. Nếu bài toán mở rộng có phương án tối ưu mà trong đó còn ít nhất 1 ẩn giả > 0 , thì bài toán xuất phát không có phương án tối ưu.

Ví dụ:

$$\begin{aligned} & \min f(x) = x_1 + 2x_2 + x_4 - 5x_5 \\ & \begin{cases} -3x_3 - 9x_4 = 0 \\ x_2 - 7x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 5 \\ x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 + \frac{1}{5}x_5 = \frac{2}{3} \end{cases}, A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -5 & -2 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \\ & x_j \geq 0; j = \overline{1,5} \end{aligned}$$

→ standard form

$$\begin{aligned} & \min f(x) = x_1 + 2x_2 + x_4 - 5x_5 + Mx_6 + Mx_7 \\ & \begin{cases} -3x_3 - 9x_4 + x_6 = 0 \\ x_2 - 7x_3 - 5x_4 - 2x_5 + x_7 = 5 \\ x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 = \frac{2}{3} \end{cases} \\ & x_j \geq 0; j = \overline{1,7} \end{aligned}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -5 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bảng đơn hình:

Hệ số	Ấn cơ bản	Phương án	1	2	0	1	-5
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
M	x_6	0	0	0	-3	-9	0
M	x_7	5	0	(1)	-7	-5	-2
1	x_1	2/3	1	-1/3	2/3	4/3	1/3
	f	5M+2/3	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5
			0	(-7/3+M)	2/3-10M	1/3-14M	16/3-2M
	x_6	0	0	0	-3	-9	0
	x_2	5	0	1	-7	-5	-2
	x_1	7/3	1	0	-5/3	-1/3	-1/3
	f	37/3	0	0	-47/3-3M	-34/3-9M	2/3

Ở phương án cơ bản ban đầu:

$$\max \Delta_j = \Delta_2 = -\frac{7}{3} + M \Rightarrow x_2 \text{ in}$$

$$\min \lambda_i = \lambda_2 = \frac{5}{1}$$

$$a_{rv} = 1 \Rightarrow x_7 \text{ out}$$

Ở phương án thứ 2

$$\max \Delta_j = \Delta_5 = \frac{2}{3} > 0 \text{ but } a_{i5} = \left\{ 0, -2, -\frac{1}{3} \right\} \leq 0 \Rightarrow \text{bài toán không có}$$

phương án tối ưu

Ví dụ:

$$f(x) = -16x_1 + 7x_2 + 9x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + x_3 = \frac{1}{3} \\ -5x_1 + 5x_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ -5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1,3}$$

→ standard form

$$f(x) = -16x_1 + 7x_2 + 9x_3 + Mx_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + x_3 = \frac{1}{3} \\ -5x_1 + 5x_2 + x_4 = 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1,4}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bảng đơn hình:

Hệ số	Ấn cơ bản	Phương án	-16	7	9
			x_1	x_2	x_3
9 M	x_3	1/3	-2/3	-1/3	1
	x_4	7	-5	(5)	0
			Δ_1	Δ_2	Δ_3
	$f(x)$	7M+3	10-5M	(-10+5M)	0
	x_3	12/15	-1	0	1
	x_2	7/5	-1	1	0
	$f(x)$	17	0	0	0

Ở phương án cơ bản ban đầu:

$$\max \Delta_j = \Delta_2 = -10 + 5M \Rightarrow x_2 \text{ in}$$

$$\min \lambda_i = \lambda_2 = \frac{7}{5}$$

$$a_{rv} = 5 \Rightarrow x_4 \text{ out}$$

Phương án cuối cùng: $\Delta_j \leq 0, \forall j \Rightarrow$ ta có phương án tối ưu là:

$$x_1, x_2, x_3 \succeq \left(0, \frac{7}{5}, \frac{12}{15}\right)$$

Giá trị của phương án: $f_0 = 17$

Ví dụ:

$$f(x) = 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 27 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 50 \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 18 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, 3}$$

$\rightarrow$ s tan dard form

$$f(x) = 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 0 \cdot x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 27 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 50 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 18 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, 4}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ s tan dard form

$$f(x) = 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 0 \cdot x_4 + Mx_5 + Mx_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 = 27 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 50 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 18 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, 6}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bảng đơn hình:

Hệ số	Ấn cơ bản	Phương án	1	2	0	1
			x_1	x_2	x_3	x_4
M	x_5	27	1	-2	1	0
M	x_6	50	2	1	(2)	0
0	x_4	18	1	-1	-1	1
	f	77M	Δ_1 -2+3M	Δ_2 -4-M	Δ_3 (2+3M)	Δ_4 0
	x_5	2	0	-5/2	0	0
	x_3	25	1	1/2	1	0
	x_4	43	2	-1/2	0	1
	f	-50+2M	-4	-5-5M/2	0	0

Ở phương án cơ bản ban đầu:

$$\max \Delta_j = \Delta_3 = 2 + 3M \Rightarrow x_3 \text{ in}$$

$$\min \lambda_i = \lambda_2 = 25$$

$$a_{rv} = 2 \Rightarrow x_6 \text{ out}$$

Ở phương án thứ 2

$$\forall \Delta_j \leq 0 \text{ but } x_5 = 2 > 0 \Rightarrow \text{bài toán xuất phát không có phương án tối ưu.}$$

BÀI TẬP

Bài 1

$$\min f(x) = 2x_1 - x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 = 7 \\ x_2 + x_3 = 10 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, 3}$$

→ standard form

Bảng đơn hình:

Hệ số	Ấn cơ bản	Phương án	2	-1	2
			x_1	x_2	x_3
2 -1	x_1 x_2	7 10	1 0	0 1	(4) 1
	$f(x)$	4	Δ_1 0	Δ_2 0	Δ_3 (5)
	x_3 x_2	7/4 33/4	1/4 -1/4	0 1	1 0
	$f(x)$	-19/4	-5/4	0	0

Phương án cuối cùng: $\Delta_j \leq 0, \forall j \Rightarrow$ ta có phương án tối ưu là:

$$x_1, x_2, x_3 = \left(0, \frac{33}{4}, \frac{7}{4} \right)$$

Giá trị của phương án: $f_0 = -\frac{19}{4}$

Bài 2

$$f(x) = 4x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, 3}$$

→ standard form

$$f(x) = -f(x) = -4x_1 - x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$$

Bảng đơn hình:

Hệ số	Ấn cơ bản	Phương án	-4	-1	2
			x_1	x_2	x_3
2	x_3	8	0	(1)	1
-4	x_1	5	1	-1	0
	$g(x)$	-4	Δ_1 0	Δ_2 (7)	Δ_3 0
	x_2	8	0	1	1
	x_1	13	1	0	1
	$g(x)$	-60	0	0	-7

Phương án cuối cùng: $\Delta_j \leq 0, \forall j \Rightarrow$ ta có phương án tối ưu là:

$$x_1, x_2, x_3 = 13, 8, 0$$

Giá trị của phương án: $f_0 = -g_0 = 60$

Bài 3

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 12 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 10 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1,3}$$

→ standard form

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 12 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 10 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1,5}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bảng đơn hình:

Hệ số	Ấn cơ bản	Phương án	1	-2	1	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	12	1	2	1	1	0
0	x_5	10	2	1	-1	0	1
	$f(x)$	0	Δ_1 -1	Δ_2 2	Δ_3 -1	Δ_4 0	Δ_5 0
	x_2	6	1/2	1	1/2	1/2	0
	x_5	4	3/2	0	-3/2	-1/2	1
	$f(x)$	-12	-2	0	-2	-1	0

Phương án cuối cùng: $\Delta_j \leq 0, \forall j \Rightarrow$ ta có phương án tối ưu là:

$$x_1, x_2, x_3 = 0, 6, 0$$

Giá trị của phương án: $f_0 = -12$

Bài 4

$$1) f(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max$$

$$2) \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 5 \end{cases}$$

$$3) x_j \geq 0; j = \overline{1,3}$$

→ s tan dard form

$$1) g(x) = -f(x) = -x_1 - 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 \rightarrow \min$$

$$2) \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5 = 5 \end{cases}$$

$$3) x_j \geq 0; j = \overline{1,5}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

→ s tan dard form

$$1) g(x) = -f(x) = -x_1 - 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 \rightarrow \min$$

$$2) \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5 + x_6 = 5 \end{cases}$$

$$3) x_j \geq 0; j = \overline{1,6} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bảng đơn hình:

Hệ số	Ân cơ bản	Phương án	-1	-2	1	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	10	-1	2	3	1	0
M	x_6	5	1	(3)	1	0	-1
	$g \curvearrowright$	5M	Δ_1 M+1	Δ_2 (3M+2)	Δ_3 M-1	Δ_4 0	Δ_5 -M
	x_4	20/3	-5/3	0	7/3	1	(2/3)
	x_2	5/3	1/3	1	1/3	0	-1/3
	$g \curvearrowright$	-10/3	1/3	0	-5/3	0	(2/3)
	x_5	10	-5/2	0	7/2	3/2	1
	x_2	5	-1/2	1	3/2	1/2	0
	$g \curvearrowright$	-10	2	0	-4	-1	0

Phương án cuối cùng: $\exists \Delta_1 = 2 > 0$, but $a_{i1} = \left\{ -\frac{5}{2}; -\frac{1}{2} \right\} \curvearrowright 0 \Rightarrow$ Bài toán

xuất phát không có phương án tối ưu.

Bài 5

$$f \curvearrowright \curvearrowright 3x_1 + x_2 - 3x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -10x_2 + 5x_3 = 5 \\ -3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -10 & 5 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, 3}$$

$\rightarrow$ standard form

$$f \curvearrowright \curvearrowright -f \curvearrowright \curvearrowright -3x_1 - x_2 + 3x_3 + Mx_4 + Mx_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -10x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ -3x_2 + 2x_3 + x_5 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, 5} \Rightarrow \overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bảng đơn hình:

Hệ số	Ân cơ bản	Phương án	-3	-1	3
			x_1	x_2	x_3
-3	x_1	2	1	2	-1
M	x_4	5	0	-10	(5)
M	x_5	4	0	-3	2
	g	9M-6	Δ_1 0	Δ_2 -13M-5	Δ_3 (7M)
	x_1	3	1	0	0
	x_3	1	0	-2	1
	x_5	2	0	(1)	0
	g	2M-6	0	(M-5)	0
	x_1	3	1	0	0
	x_3	5	0	0	1
	x_2	2	0	1	0
	g	4	0	0	0

Phương án cuối cùng: $\Delta_j \leq 0, \forall j \Rightarrow$ ta có phương án tối ưu là:

$x_1, x_2, x_3 = 3, 2, 5$, Giá trị của phương án: $f_0 = -g = -4$

Bài 6

$$1) f(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min$$

$$2) \begin{cases} -4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 12 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 10 \\ x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 23 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3) x_j \geq 0; j = \overline{1,5}$$

→ s tan dard form

$$1) f(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 + Mx_6 + Mx_7 \rightarrow \min$$

$$2) \begin{cases} -4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 12 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 10 \\ x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_7 = 23 \end{cases}$$

$$3) x_j \geq 0; j = \overline{1,7} \Rightarrow \bar{A} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bảng đơn hình:

Hệ số	Ấn cơ bản	Phương án	2	1	-1	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
M	x_6	12	-4	-1	(2)	-1	1
0	x_5	10	-2	2	-1	0	0
M	x_7	23	1	-2	-1/2	0	0
	$f(x)$	35M	Δ_1 -3M-2	Δ_2 -3M-1	Δ_3 (3M/2+1)	Δ_4 -M	Δ_5 0
	x_3	6	-2	-1/2	1	-1/2	0
	x_5	16	-4	3/2	0	-1/2	1
	x_7	26	0	-9/4	0	-1/4	0
	$f(x)$	26M-6	0	(-9M/4-1/2)	0	-M/4+1/2	0

Phương án cuối cùng: $\Delta_j \leq 0, \forall j$ but $x_7 = 26 > 0 \Rightarrow$ Bài toán gốc không có phương án tối ưu.

Bài toán 7

1. $f(x) = x_4 + x_5 + 20 \rightarrow \max$

2. $\begin{cases} x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 7 \\ x_3 - x_4 - 3x_5 = 2 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. $x_j \geq 0; j = \overline{1,5}$

→ s tan dard form

1. $g(x) = -f(x) = -x_4 - x_5 - 20 \rightarrow \min$

2. $\begin{cases} x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 7 \\ x_3 - x_4 - 3x_5 = 2 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$

3. $x_j \geq 0; j = \overline{1,5}$

Bảng đơn hình:

Hệ số	Ấn cơ bản	Phương án	0	0	0	-1	-1
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_2	7	0	1	0	2	3
0	x_3	2	0	0	1	-1	-3
0	x_1	2	1	0	0	(1)	1
	$g(x) = -20$		Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5
			0	0	0	(1)	1
	x_2	3	-2	1	0	0	1
	x_3	4	1	0	1	0	-2
	x_4	2	1	0	0	1	1
	$g(x) = -22$		-1	0	0	0	0

Phương án cuối cùng: $\Delta_j \leq 0, \forall j \Rightarrow$ ta có phương án tối ưu là:

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0, 3, 4, 2, 0$, Giá trị của phương án: $f_0 = -g_0 = 22$

Bài 8

$$\begin{aligned} 1-f \quad & \vec{x} = x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max \\ 2- & \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq -6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x_1 - 4x_2 - 2x_3 \leq 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \\ 3- & \vec{x}_j \geq 0; j = \overline{1,3} \end{aligned}$$

→ s tan dard form

$$\begin{aligned} 1-g \quad & \vec{x} = -f \quad \vec{x} = -x_1 - 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 \rightarrow \min \\ 2- & \begin{cases} -4x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

→ s tan dard form

$$\begin{aligned} 1-g \quad & \vec{x} = -f \quad \vec{x} = -x_1 - 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7 \rightarrow \min \\ 2- & \begin{cases} -4x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_7 = 4 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 3- & \vec{x}_j \geq 0; j = \overline{1,7} \end{aligned}$$

Hệ số	Ấn cơ bản	Phương án	-1	-2	1	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	6	-4	-4	-2	1	0
M	x_6	6	1	1	2	0	-1
M	x_7	4	2	-1	(2)	0	0
	$g \quad \vec{x} =$	10M	Δ_1 3M+1	Δ_2 -2	Δ_3 (4M-1)	Δ_4 0	Δ_5 -M
	x_4	10	-2	-5	0	1	0
	x_6	2	-1	(2)	0	0	-1
	x_3	2	1	-1/2	1	0	0
	$g \quad \vec{x} =$	2M+2	-M+2	(2M+3/2)	0	0	-M
	x_4	15	-9/2	0	0	1	-5/2
	x_2	1	-1/2	1	0	0	-1/2
	x_3	5/2	3/4	0	1	0	-1/4
	$g \quad \vec{x} =$	1/2	11/4	0	0	0	3/4

Phương án cuối cùng: $\Delta_5 = \frac{3}{4} > 0$, but $a_{i5} \leq 0 \Rightarrow$ Bài toán xuất phát

không có phương án tối ưu.

Bài 9

$$f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, 4}$$

$\rightarrow$ standard form

$$f(x) = -f(x) = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 + Mx_5 + Mx_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_6 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bảng đơn hình:

Hệ số	Ấn cơ bản	Phương án	-1	-2	-3	-1
			x_1	x_2	x_3	x_4
M	x_5	15	1	-2	3	0
M	x_6	20	2	1	(5)	0
-1	x_4	10	1	2	1	1
	$g(x)$	35M-10	Δ_1 3M	Δ_2 -M	Δ_3 (8M+2)	Δ_4 0
	x_5	3	-1/5	-13/5	0	0
	x_3	4	2/5	1/5	1	0
	x_4	6	3/5	9/5	0	1
	$g(x)$	3M-18	-M/5-4/5	-13M/5-2/5	0	0

Phương án cuối cùng: $\Delta_j \leq 0, \forall j$ but $x_5 = 3 > 0 \Rightarrow$ Bài toán gốc không có phương án tối ưu.

Bài 10

$$1 \rightarrow f(x) = -2x_1 + x_2 + x_4 \rightarrow \min$$

$$2 \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 18 \end{cases}$$

$$3 \rightarrow x_j \geq 0; j = \overline{1,4}$$

→ s tan dard form

$$1 \rightarrow f(x) = -2x_1 + x_2 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 \rightarrow \min$$

$$2 \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_6 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3 \rightarrow x_j \geq 0; j = \overline{1,6}$$

Bảng đơn hình:

Hệ số	Ấn cơ bản	Phương án	-2	1	0	1	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_5	15	1	1	-1	0	1	0
1	x_4	27	1	1	1	1	0	0
0	x_6	18	(2)	-1	-1	0	0	1
	$f(x) =$	27	Δ_1 (3)	Δ_2 0	Δ_3 1	Δ_4 0	Δ_5 0	Δ_6 0
	x_5	6	0	3/2	-1/2	0	1	-1/2
	x_4	18	0	3/2	(3/2)	1	0	-1/2
	x_1	9	1	-1/2	-1/2	0	0	1/2
	$f(x) =$	0	0	3/2	(5/2)	0	0	-3/2
	x_5	12	0	2	0	1/3	1	-2/3
	x_3	12	0	1	1	2/3	0	-1/3
	x_1	15	1	0	0	1/3	0	1/3
	$f(x) =$	-30	0	-1	0	-5/3	0	-2/3

Phương án cuối cùng: $\Delta_j \leq 0, \forall j \Rightarrow$ ta có phương án tối ưu là:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 = 15, 0, 12, 0, \text{ Giá trị của phương án: } f_0 = -30$$

Bài 11

$$f(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 1 \\ -5x_2 - 2x_4 \leq 3 \\ 2x_2 + 8x_3 + 2x_4 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1,4}$$

→ standard form

$$g(x) = -f(x) = -2x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 + x_5 = 1 \\ -5x_2 - 2x_4 + x_6 = 3 \\ 2x_2 + 8x_3 + 2x_4 + x_7 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1,7}$$

Bảng đơn hình:

Hệ số	Ấn cơ bản	Phương án	-2	-4	-1	-1	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-2	x_1	1	1	3	0	1	1	0	0
0	x_6	3	0	-5	0	-2	0	1	0
0	x_7	6	0	2	(8)	2	0	0	1
	$g(x)$	-2	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	Δ_7
			0	-2	(1)	-1	-2	0	0
	x_1	1	1	3	0	1	1	0	0
	x_6	3	0	-5	0	-2	0	1	0
	x_3	3/4	0	1/4	1	1/4	0	0	1/8
	$g(x)$	-11/4	0	-9/4	0	-5/4	-2	0	-1/8

Phương án cuối cùng: $\Delta_j \leq 0, \forall j \Rightarrow$ ta có phương án tối ưu là:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 = \left(1, 0, \frac{3}{4}, 0\right), \text{ Giá trị của phương án: } f_0 = -g_0 = \frac{11}{4}$$

Bài 12

$$f(x) = -10x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 - 4x_6 + 5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 + 2x_6 = 2 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 = 3 \\ 4x_1 + 6x_3 - 6x_4 + 3x_5 + 4x_6 = 18 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1,6}$$

→ standard form

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 & -6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$f(x) = -10x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 - 4x_6 + Mx_7 + Mx_8 + 5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 + 2x_6 = 2 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 + x_7 = 3 \\ 4x_1 + 6x_3 - 6x_4 + 3x_5 + 4x_6 + x_8 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & -6 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1,8}$$

Bảng đơn hình:

Hệ số	Ấn cơ bản	Phương án	-10	-3	2	2	-2	-4
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-3	x_2	2	1	1	-1	0	1	2
M	x_7	3	2	0	(1)	-1	2	1
M	x_8	18	4	0	6	-6	3	4
	$g(x)$	21M-1	Δ_1 6M+7	Δ_2 0	Δ_3 (7M+1)	Δ_4 -7M-2	Δ_5 5M-1	Δ_6 5M-2
	x_2	5	3	1	0	-1	3	3
	x_3	3	2	0	1	-1	2	1
	x_8	0	-8	0	0	0	-9	-2
	$g(x)$	-4	-8M+5	0	0	-1	-9M-3	-2M-3

Phương án cuối cùng: $\Delta_j \leq 0, \forall j \Rightarrow$ ta có phương án tối ưu là:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 = 0, 5, 3, 0, 0, 0, \text{ Giá trị của phương án: } f_0 = -4$$

Bài 13

Giải bài toán QHTT:

$$1) \quad \vec{x} = 10x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 + 4x_6 + 2 \rightarrow \max$$

$$2) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 + 2x_6 = 2 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 = 3 \\ 4x_1 + 6x_3 - 6x_4 + 3x_5 + 4x_6 = 18 \end{cases}$$

$$3) \quad x_j \geq 0; j = \overline{1,6}$$

Bài 14

Giải bài toán QHTT:

$$1) \quad \vec{x} = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

$$2) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ -x_2 + 3x_3 + 7x_4 \leq 2 \\ 2x_3 + 3x_4 \leq 5 \end{cases}$$

$$3) \quad x_j \geq 0; j = \overline{1,4}$$

$$DS : x = \vec{x}_1, x_2, x_3, x_4 = \vec{0}, 2, 0, 0$$

Bài 15

Giải bài toán QHTT:

$$1) \quad \vec{x} = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - x_4 \rightarrow \min$$

$$2) \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_3 + 3x_4 \geq 1 \\ x_1 - 4x_3 + 2x_4 \leq 4 \end{cases}$$

$$3) \quad x_j \geq 0; j = \overline{1,4}$$

$$DS : x = \vec{x}_1, x_2, x_3, x_4 = \left(0, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3} \right)$$

Bài 16

Giải bài toán QHTT:

$$1) \quad \vec{x} = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

$$2) \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 5 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 14 \end{cases}$$

$$3) \quad x_j \geq 0; j = \overline{1,3}$$

$$DS : x = \vec{x}_1, x_2, x_3 = \vec{2}, 0, 4$$

Bài 17

Giải bài toán QHTT:

$$1 \rightarrow \min \quad Z = 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 \rightarrow \min$$

$$2 \rightarrow \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 57 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 16 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 12 \end{cases}$$

$$3 \rightarrow x_j \geq 0; j = \overline{1, 4}$$

Bài 18

Giải bài toán QHTT:

$$1 \rightarrow \min \quad Z = 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

$$2 \rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -5 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 12 \end{cases}$$

$$3 \rightarrow x_j \geq 0; j = \overline{1, 4}$$

$$DS : x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 2, 1, 0)$$

Bài 19

Giải bài toán QHTT:

$$1 \rightarrow \max \quad Z = 2x_1 - 10x_2 + 4x_3 - 6x_4 \rightarrow \max$$

$$2 \rightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_4 \leq 16 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 \geq -4 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$3 \rightarrow x_j \geq 0; j = \overline{1, 4}$$

$$DS : no \quad PATU$$

Bài 20

Giải bài toán QHTT:

$$1 \rightarrow \min \quad Z = -x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

$$2 \rightarrow \begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$3 \rightarrow x_j \geq 0; j = \overline{1, 3}$$

$$DS : x = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{14}{5}, \frac{12}{5}, \frac{2}{5} \right)$$

CHƯƠNG III: BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

§1 KHÁI NIỆM

I. Bài toán đối ngẫu (D) của bài toán gốc (P) dạng chính tắc:

$$\begin{aligned}
 (P) \quad & \min f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \rightarrow \min \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \\
 & \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \\
 & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3 \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (D) \quad & \max g(y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 \rightarrow \max \\
 & \begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 \leq c_1 \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 \leq c_2 \\ a_{13} y_1 + a_{23} y_2 \leq c_3 \end{cases} \\
 & y_j \text{ tự do } j = 1, 2
 \end{aligned}$$

Nhận xét:

- hàm mục tiêu $Pf(x) \rightarrow \min$ thì hàm mục tiêu của $Dg(y) \rightarrow \max$ và ngược lại.
- số ẩn của bài toán này là số ràng buộc của bài toán kia và ngược lại.
- các hệ số c_i & b_i ở 2 bài toán đối ngẫu cho nhau.
- ma trận các hệ số ràng buộc ở 2 bài toán là chuyển vị của nhau.

II. Quy tắc lập bài toán đối ngẫu (Dual problem)

Bài toán P(D)	Bài toán D(P)
$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$	$g(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \max$
Ràng buộc thứ i: $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \begin{cases} \leq b_i \\ \geq b_i \\ = b_i \end{cases}$	Ẩn thứ i: $y_i \begin{cases} \leq 0 \\ \geq 0 \\ \text{tự do} \end{cases}$
Cùng chiều	Cùng chiều
Ẩn thứ j: $x_j \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \\ \text{tự do} \end{cases}$	Ràng buộc thứ j: $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \begin{cases} \leq c_j \\ \geq c_j \\ = c_j \end{cases}$
Ngược chiều	Ngược chiều

Ví dụ: Tìm bài toán đối ngẫu của bài toán

$$\text{1- f } x \Rightarrow 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$\text{2- } \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \leq 5 & \text{1-} \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 & \text{2-} \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 20 & \text{3-} \end{cases}$$

$$\text{3- } x_1, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \text{ tự do}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

B-

$$\text{1- g } y \Rightarrow 5y_1 + 7y_2 + 20y_3 \rightarrow \min$$

$$\text{2- } \begin{cases} 2y_1 + 1y_2 + 5y_3 \geq 2 \\ -y_1 + y_2 + y_3 \geq 3 \\ -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq -1 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

$$\text{3- } y_1 \geq 0, y_2 \text{ tự do}, y_3 \leq 0$$

Ví dụ: Tìm bài toán đối ngẫu của bài toán

$$1 \rightarrow f(x) = 5x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 6x_5 \rightarrow \min$$

$$2 \rightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 80 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq -10 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 \leq 30 \\ x_1 + x_3 \leq 6 \end{cases}$$

$$3 \rightarrow x_1 \leq 0, x_2, x_3 \geq 0, x_4, x_5 \text{ tự do}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Đ

$$1 \rightarrow g(y) = 80y_1 - 10y_2 + 30y_3 + 6y_4 \rightarrow \max$$

$$2 \rightarrow \begin{cases} 3y_1 + y_2 + 3y_3 + y_4 \geq 5 \\ -y_1 + y_2 - 2y_3 \leq -1 \\ 2y_1 + y_2 - 2y_3 + y_4 \leq 3 \\ 3y_1 + y_2 - y_3 = 3 \\ 4y_1 + y_2 + y_3 = -6 \end{cases}$$

$$3 \rightarrow y_1 \text{ tự do}, y_2 \geq 0, y_3, y_4 \leq 0$$

§2 QUAN HỆ GIỮA BÀI TOÁN GỐC VÀ BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

I. Định lý đối ngẫu:

1) Định lý 1: Đối với cặp bài toán đối ngẫu P&D chỉ xảy ra 1 trong các trường hợp sau:

1. cả 2 đều không có phương án.
2. cả 2 đều có phương án, lúc đó cả 2 có cùng phương án tối ưu và giá trị 2 hàm mục tiêu đối với phương án tối ưu bằng nhau.
3. điều kiện cần và đủ để 2 phương án $x^0 \in P$ & $y^0 \in D$ - Tối ưu là: $f(x^0) = g(y^0)$

2) Định lý 2: (độ lệch bù yếu):

Điều kiện cần và đủ để 2 phương án $x^0 \in P$ & $y^0 \in D$ - Tối ưu

$$\text{là: } \begin{cases} x_j^0 \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^0 - c_j \right) = 0 & j = \overline{1, n} \\ y_i^0 \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 - b_i \right) = 0 & i = \overline{1, m} \end{cases}$$

II. Tìm nghiệm của bài toán gốc qua nghiệm của bài toán đối ngẫu

Giả sử bài toán đối ngẫu có phương án tối ưu:

$$y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$$

Thứ 1: nếu có $y_i^0 > 0 \Rightarrow \sum_j a_{ij} x_j = b_i$

Thứ 2: Thay $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$ vào các biểu thức $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^0 - c_j$ $j = \overline{1, n}$

nếu với chỉ số j nào đó biểu thức này khác 0 thì $x_j = 0$

ví dụ:

cho bài toán gốc:

$$f(x) = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 - 5x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 - 2x_4 - 9x_5 = 32 \\ 2x_2 + x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_5 = 30 \\ 3x_2 + x_5 \leq 36 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1, 5}$$

Bài toán đối ngẫu là:

$$\max f(x) = 32x_1 + 30x_2 + 36x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 2 \\ -6x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ x_2 \leq 4 \\ -2x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 1 \\ -9x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 \leq -5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \leq 0$$

Ta đã biết kết quả bài toán gốc:

phương án tối ưu: $x^0 = (32, 0, 30, 0, 0)$ với $f(x^0) = 184$ Bây giờ ta tìm

phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu:

thứ 1:

$$x_1^0 = 32 \Rightarrow y_1 = 2$$

$$x_3^0 = 30 \Rightarrow y_2 = 4$$

Thứ 2: thay $x^0 = (32, 0, 30, 0, 0)$ vào biểu thức $3x_2 + x_5 - 36 < 0 \Rightarrow y_3 = 0$

Vậy phương án tối ưu là $y^0 = (2, 4, 0)$ & $g(y^0) = 184$

Ví dụ:

Cho bài toán gốc:

$$\min f(x) = 52x_1 + 60x_2 + 36x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 \geq -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_2 \geq -2 \\ x_3 \geq 3 \end{cases}$$

$$x_j \text{ tự do } y_j = 1, 3$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bài toán đối ngẫu là:

$$f^0 = -2y_1 + 6y_2 + 4y_3 - 2y_4 + 3y_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 52 \\ 4y_2 + 2y_3 + y_4 = 60 \\ 3y_2 + y_5 = 36 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 \quad i = 1, 5$$

Kết quả của bài toán đối ngẫu:

$$y^0 = \left(0, \frac{34}{3}, \frac{22}{3}, 0, 2 \right), f^0 = \frac{310}{3}$$

Bây giờ ta tìm kết quả của bài toán gốc:

Thứ 1:

$$y_2^0 = \frac{34}{3} > 0 \Rightarrow 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 6$$

$$y_3^0 = \frac{22}{3} > 0 \Rightarrow 4x_1 + 2x_2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{11}{6} \\ x_2 = -\frac{5}{3} \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

$$y_5^0 = 2 > 0 \Rightarrow x_3 = 3$$

Vậy phương án tối ưu của bài toán gốc: $x^0 = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{11}{6}, -\frac{5}{3}, 3 \right)$

BÀI TẬP:

1)

$$f = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 5x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 1 \\ -5x_2 - 2x_4 \leq 3 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 4$$

a) Tìm BTĐN của bài toán trên.

b) Giải BT gốc và suy ra kết quả cho BTĐN.

2)

$$f(x) = 27x_1 + 50x_2 + 18x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \leq -2 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \text{ tự do}, x_3 \leq 0$$

c) Tìm BTĐN của bài toán trên.

d) Giải BTĐN và suy ra kết quả cho BT gốc.

3)

$$f(x) = -2x_1 + x_2 + x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 18 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 4$$

e) Tìm BTĐN của bài toán trên.

f) Giải BT gốc và suy ra kết quả cho BTĐN.

4)

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 15 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 20 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 3$$

g) Tìm BTĐN của bài toán trên.

h) Giải BT gốc và suy ra kết quả cho BTĐN.

BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

$$\begin{aligned} 1) \quad & f(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max \\ & \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 1 & (1) \\ -5x_2 - 2x_4 \leq 3 & (2) \\ 2x_2 + 8x_3 + 2x_4 \leq 6 & (3) \end{cases} \\ & x_j \geq 0, j = 1, 4 \end{aligned}$$

i) Tìm BTĐN của bài toán trên.

j) Giải BT gốc và suy ra kết quả cho BTĐN.

GIẢI:

Bài toán đối ngẫu là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad & g(y) = y_1 + 3y_2 + 6y_3 \rightarrow \min \\ & \begin{cases} y_1 \geq 2 \\ 3y_1 - 5y_2 + 2y_3 \geq 4 \\ 8y_3 \geq 1 \\ y_1 - 2y_2 + 2y_3 \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 3$$

Ta đã biết kết quả bài toán gốc:

phương án tối ưu: $x^0 = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(1, 0, \frac{3}{4}, 0\right)$ with $f(x^0) = \frac{11}{4}$ Bây giờ

ta tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu:

thứ 1:

$$x_1^0 = 1 \Rightarrow y_1 = 2$$

$$x_3^0 = \frac{3}{4} \Rightarrow y_3 = \frac{1}{8}$$

Thứ 2: thay $x^0 = \left(1, 0, \frac{3}{4}, 0\right)$ vào biểu thức(2)

$$-5x_2 - 2x_4 - 3 = -3 \neq 0 \Rightarrow y_2 = 0$$

Vậy phương án tối ưu là $y^0 = \left(2, 0, \frac{1}{8}\right)$ & $g(y^0) = \frac{11}{4}$

2)

$$f(x) = -10x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 - 4x_6 + 5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 + 2x_6 = 2 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 = 3 \\ 4x_1 + 6x_3 - 6x_4 + 3x_5 + 4x_6 = 18 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1,6}$$

k) Tìm BTĐN của bài toán trên.

l) Giải BT gốc và suy ra kết quả cho BTĐN.

GIẢI:

Bài toán đối ngẫu là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 & -6 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$g(y) = 2y_1 + 3y_2 + 18y_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 4y_3 \leq -10 \\ y_1 \leq -3 \\ -y_1 + y_2 + 6y_3 \leq 2 \\ -y_2 - 6y_3 \leq 2 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq -2 \\ 2y_1 + y_2 + 4y_3 \leq -4 \end{cases}$$

$$y_j \text{ tự do } j = \overline{1,3}$$

Ta đã biết kết quả bài toán gốc:

phương án tối ưu: $x^0 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 5, 3, 0, 0, 0)$ with $f(x^0) = \frac{11}{4}$

Bây giờ ta tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu:

thứ 1:

$$x_2^0 = 5 > 0 \Rightarrow y_1 = -3$$

$$x_3^0 = 3 > 0 \Rightarrow y_2 + 6y_3 = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = -3 \\ y_3 = a \\ y_2 = -6a - 1 \end{cases}$$

Vậy phương án tối ưu là

$$y^0 = (y_1, y_2, y_3) = (-3, -6a - 1, a) \quad \forall a \in \mathbb{R} \text{ và } g(y^0) = -4$$

3)

$$x^0 = (x_1, x_2, x_3) \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_3 \geq \frac{1}{3} \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

m) Tìm BTĐN của bài toán trên.

n) Giải BTĐN và suy ra kết quả cho gốc.

GIẢI:

Bài toán đối ngẫu là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g(y) = 2y_1 + 4y_2 + \frac{1}{4}y_3 + y_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 \leq 1 \\ 2y_1 + y_2 \leq 3 \\ y_2 + y_3 \leq 3 \\ y_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Ta biết kết quả bài toán ĐN:

$$\text{phương án tối ưu: } y^0 = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 3, 0, 0) \text{ với } g(y^0) = \frac{11}{4} \text{ Bây giờ}$$

ta tìm phương án tối ưu của bài toán gốc:

thứ 1:

$$y_1^0 = 1 > 0 \Rightarrow x_1 + 2x_2 = 2$$

$$y_3^0 = 3 > 0 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{4}$$

Thứ 2: thay $y^0 = (1, 0, 3, 0)$ vào biểu thức (2) $2y_1 + y_2 - 3 = -1 \neq 0 \Rightarrow x_2 = 0$

Vậy phương án tối ưu là $x^0 = \left(2, 0, \frac{1}{4}\right)$ & $f(x^0) = \frac{11}{4}$

4)

$$f(x) = 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 2x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 15 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 30 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 16 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 4$$

o) Tìm BTĐN của bài toán trên.

p) Giải BT gốc và suy ra kết quả cho BTĐN.

GIẢI:

Bài toán đối ngẫu là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$g(y) = 15y_1 + 30y_2 + 16y_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ -3y_1 - 2y_2 - 2y_3 \geq -7 \\ -y_1 + 3y_2 - 3y_3 \geq 1 \\ 2y_1 + 4y_3 \geq -2 \end{cases}$$

$$y_1, y_2 \geq 0, y_3 \text{ tự do}$$

Ta đã biết kết quả bài toán gốc:

phương án tối ưu: $x^0 = (7, 0, 0, \frac{1}{2})$ with $f(x^0) = 20$ Bây giờ

ta tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu:

thứ 1:

$$x_1^0 = 7 > 0 \Rightarrow 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 = 3$$

$$x_4^0 = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow 2y_1 + 4y_3 = -2$$

Thứ 2: thay $x^0 = \left(7, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$ vào biểu thức(2)

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 30 = -16 \neq 0 \Rightarrow y_2 = 0$$

Vậy phương án tối ưu là $y^0 = \left(4, 0, -\frac{5}{2}\right)$ & $g y^0 = 20$

5)

$$f(x) = 12x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 8x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 15 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 12 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 4$$

q) Tìm BTĐN của bài toán trên.

r) Giải BT gốc và suy ra kết quả cho BTĐN.

GIẢI:

Bài toán đối ngẫu là:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g(y) = 15y_1 + 10y_2 + 12y_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 12 \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 9 \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 7 \\ y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 8 \end{cases}$$

$$y_1 \leq 0, y_2 \text{ tự do}, y_3 \geq 0$$

Ta đã biết kết quả bài toán gốc:

phương án tối ưu: $x^0 = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 0, 4, 0)$ with $f x^0 = 52$ Bây giờ

ta tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu:

thứ 1:

$$x_1^0 = 2 > 0 \Rightarrow 3y_1 + y_2 + 2y_3 = 12$$

$$x_3^0 = 4 > 0 \Rightarrow y_1 + 2y_2 + 2y_3 = 7$$

Thứ 2: thay $x^0 = (2, 0, 4, 0)$ vào biểu thức(1)

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 15 = -5 \neq 0 \Rightarrow y_1 = 0$$

Vậy phương án tối ưu là $y^0 = \left(0, -5, \frac{17}{2}\right)$ & $g(y^0) = 52$

6)

$$f(x) = 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 40 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 60 \\ x_1 \leq 20 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$$

s) Tìm BTĐN của bài toán trên.

t) Giải BT gốc và suy ra kết quả cho BTĐN.

GIẢI:

Bài toán đối ngẫu là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g(y) = 40y_1 + 60y_2 + 20y_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \geq 4 \\ 2y_1 + y_2 \geq 3 \\ y_1 + 2y_2 \geq 3 \end{cases}$$

$$y_j \geq 0, j = 1, 2, 3$$

Ta đã biết kết quả bài toán gốc:

phương án tối ưu: $x^0 = (x_1, x_2, x_3) = (20, 0, 20)$ with $f(x^0) = 140$ Bây giờ ta tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu:

thứ 1:

$$x_1^0 = 20 > 0 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 4$$

$$x_3^0 = 20 > 0 \Rightarrow y_1 + 2y_2 = 3$$

Thứ 2: thay $x^0 = (20, 0, 20)$ vào các biểu thức (1)(2)(3) đều nhận kết quả = 0

$$\text{Vì } y_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 5 - 2a \\ y_2 = -1 + a, a > 0, a \in R \\ y_3 = a \end{cases}$$

Vậy phương án tối ưu là $y^0 = (5 - 2a, -1 + a, a)$ & $g(y^0) = 140$

7)

$$f(x) = 6x_1 + 8x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geq 20 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 9 \\ 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 30 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 3$$

u) Tìm BTĐN của bài toán trên.

v) Giải BTĐN và suy ra kết quả cho gốc.

GIẢI:

Bài toán đối ngẫu là:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$g(y) = 20y_1 + 9y_2 + 30y_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 + 6y_3 \leq 6 \\ 5y_1 + 3y_2 + 2y_3 \leq 8 \\ 3y_1 + 2y_2 + 5y_3 \leq 1 \end{cases}$$

$$y_j \geq 0, j = 1, 3$$

Ta biết kết quả bài toán ĐN:

phương án tối ưu: $y^0 = \left(\frac{1}{3}, 0, 0 \right)$ with $g(y^0) = \frac{20}{3}$ Bây giờ ta

tìm phương án tối ưu của bài toán gốc:

thứ 1:

$$y_1^0 = \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 20$$

Thứ 2: thay $y^0 = \left(\frac{1}{3}, 0, 0 \right)$ vào biểu thức(1)&(2)

$$5y_1 + 3y_2 + 2y_3 - 8 = \frac{-19}{3} \neq 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$3y_1 + y_2 + 6y_3 - 6 = -5 \neq 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

Vậy phương án tối ưu là $x^0 = \left(0, 0, \frac{20}{3} \right)$ & $f(x^0) = \frac{20}{3}$

8)

$$\begin{aligned} & f(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min \\ & \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 \geq 12 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10 \\ x_1 - x_2 - x_3 \geq -8 \end{cases} \\ & x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

w) Tìm BTĐN của bài toán trên.

x) Giải BTĐN và suy ra kết quả cho gốc.

GIẢI:

Bài toán đối ngẫu là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & g(y) = 12y_1 + 10y_2 - 8y_3 \rightarrow \max \\ & \begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 1 \\ -3y_1 + y_2 - y_3 \leq 2 \\ 4y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 1 \end{cases} \\ & y_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Ta biết kết quả bài toán ĐN:

phương án tối ưu: $y^0 = (y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, 0\right)$ with $g(y^0) = \frac{21}{5}$ Bây giờ ta

tìm phương án tối ưu của bài toán gốc:

thứ 1:

$$y_1^0 = \frac{1}{10} > 0 \Rightarrow x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 12$$

$$y_2^0 = \frac{3}{10} > 0 \Rightarrow 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$$

Thứ 2: thay $y^0 = \left(\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, 0\right)$ vào biểu thức(2)

$$-3y_1 + y_2 - y_3 - 2 = -2 \neq 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 2x_3 = 10 \end{cases}$$

Vậy phương án tối ưu là $x^0 = \left(\frac{8}{5}, 0, \frac{13}{5}\right)$ & $f(x^0) = \frac{21}{5}$

9)

$$f(x) = x_1 + 2x_2 + 4x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 6 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 3$$

y) Tìm BTĐN của bài toán trên.

z) Giải BTĐN và suy ra kết quả cho gốc.

GIẢI:

Bài toán đối ngẫu là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$g(y) = 4y_1 + 6y_2 + 2y_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 1 \\ -y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 2 \\ 3y_1 - 3y_2 + 3y_3 \leq 4 \end{cases}$$

$$y_j \geq 0, j = 1, 3$$

Ta biết kết quả bài toán ĐN:

$$\text{phương án tối ưu: } y^0 = (y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{10}{11}, \frac{31}{33}, \frac{17}{33} \right) \text{ with } g(y^0) = \frac{349}{33} \text{ Đây}$$

giờ ta tìm phương án tối ưu của bài toán gốc:

thứ 1:

$$y_1^0 = \frac{10}{11} > 0 \Rightarrow x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$$

$$y_2^0 = \frac{31}{33} > 0 \Rightarrow 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6$$

$$y_3^0 = \frac{17}{33} > 0 \Rightarrow -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{32}{11} \\ x_2 = \frac{14}{11} \\ x_3 = \frac{26}{33} \end{cases} \text{ PATU } \quad x^0 = \left(\frac{32}{11}, \frac{14}{11}, \frac{26}{33} \right)$$

10)

$$f(x) = 16x_1 + 8x_2 + 4x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 16 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 14 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 12 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$$

aa) Tìm BTĐN của bài toán trên.

bb) Giải BTĐN và suy ra kết quả cho gốc.

GIẢI:

Bài toán đối ngẫu là:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g(y) = 16y_1 + 14y_2 + 12y_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + 5y_3 \leq 16 \\ 2y_1 + 3y_2 + 3y_3 \leq 8 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 4 \end{cases}$$

$$y_j \geq 0, j = 1, 2, 3$$

Ta biết kết quả bài toán ĐN:

phương án tối ưu: $y^0 = (y_1, y_2, y_3) = (1, 2, 0)$ with $g(y^0) = 44$ Bây giờ ta tìm phương án tối ưu của bài toán gốc:

thứ 1:

$$y_1^0 = 1 > 0 \Rightarrow 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 16$$

$$y_2^0 = 2 > 0 \Rightarrow 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 14$$

Thứ 2: thay $y^0 = (1, 2, 0)$ vào biểu thức(1)

$$3y_1 + 4y_2 + 5y_3 - 16 = -5 \neq 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x_2 + 2x_3 = 16 \\ 3x_2 + 2x_3 = 14 \end{cases}$$

Vậy phương án tối ưu là $x^0 = (0, 3, 5)$ & $f(x^0) = 44$

CHƯƠNG IV: BÀI TOÁN VẬN TẢI

§1 BÀI TOÁN VẬN TẢI DẠNG TỔNG QUÁT

I. Thiết lập bài toán

Giả sử có m nơi $A_1, A_2, \dots, A_m$ cung cấp 1 mặt hàng nào đó có khối lượng tương ứng là $a_1, a_2, \dots, a_m$. Cùng lúc đó có n nơi $B_1, B_2, \dots, B_n$ tiêu thụ loại hàng đó với khối lượng yêu cầu tương ứng là $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Gọi $A_i \ (i = \overline{1, m})$ là điểm phát hàng thứ i , $B_j \ (j = \overline{1, n})$ là điểm thu hàng thứ j .

Điều kiện cân bằng thu phát $\sum_i a_i = \sum_j b_j$

Ma trận cước phí $C = (c_{ij})_{m \times n}$ trong đó c_{ij} là chi phí vận chuyển 1 tấn hàng từ A_i đến B_j

Hãy lập kế hoạch vận chuyển từ mỗi điểm phát đến mỗi điểm thu bao nhiêu tấn hàng để:

- các điểm phát đều phát hết hàng.
- Các điểm thu nhận đủ số hàng yêu cầu.
- Tổng cước phí phải trả là ít nhất

II. Mô hình toán học:

Gọi x_{ij} là số tấn hàng vận chuyển từ A_i đến B_j

Ta có mô hình toán học:

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m}) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n}) \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$$

III Bài toán dưới dạng bảng

Thu Cước Phát	B_1 b_1	B_2 b_2	...	B_j b_j	...	B_n b_n
$A_1 : a_1$	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}
$A_2 : a_2$	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2j} x_{2j}	...	c_{2n} x_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
$A_i : a_i$	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}
...	...	...	...	...	...	...
$A_m : a_m$	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}

1) Dây chuyền:

- 1 dãy các ô của bảng mà 2 ô liên tiếp ở cùng hàng hay cột gọi là dây chuyền.
- 1 dây chuyền khép kín gọi là 1 vòng.
- Những ô ứng với $x_{ij} > 0$ trong 1 phương án nào đó gọi là ô chọn.

Những ô còn lại là ô loại.

- 1 phương án có đủ $m+n-1$ ô chọn gọi là phương án không suy biến.

	X	-	-	X
			X	X
X	-	-	-	X

Các ô đánh dấu X lập
thành 1 dây chuyền

X	-	-	-	X	
			X	-	X
X	-	-	-	-	X

Các ô đánh dấu X tạo
thành 1 vòng kín

§2 TÍNH CHẤT CỦA BÀI TOÁN VẬN TẢI

I. Tính chất 1:

Bài toán vận tải cân bằng thu phát luôn có phương án tối ưu.

II. Tính chất 2:

X	X	X	X
		X	
	X		
		X	4,4

Giả sử ta có bảng m hàng, n cột và E là tập hợp gồm $m+n-1$ ô của bảng không chứa vòng. Giả sử i, j - là ô của bảng không thuộc E . Nếu ta bổ sung i, j - vào E để được E_1 thì E_1 sẽ chứa 1 vòng duy nhất V . Cuối cùng ta loại khỏi E_1 1 ô tùy ý của vòng V để được E_2 , thì E_2 lại gồm $m+n-1$ ô của bảng không chứa vòng.

Ở hình trên: $m=4, n=4$, tập E gồm $m+n-1=7$ ô đánh dấu X không chứa vòng. Khi bổ sung thêm ô $(4,4)$ tạo thành vòng V duy nhất. Khi mất đi 1 ô của V thì mất vòng.

III. Lập phương án cơ bản ban đầu

Dùng phương pháp phân phối tối đa vào ô có cước phí nhỏ nhất

Ví dụ

Thu Cước phí Phát	B_1 20	B_2 40	B_3 30
$A_1 : 30$	1 × 20	3 × 10	5
$A_2 : 25$	5	4	2 × 25
$A_3 : 35$	8	5 × 30	4 × 5

Phương án cơ bản ban đầu có 5 ô chọn đúng bằng $m+n-1=5$, nên Phương án ban đầu không suy biến.

Ví dụ

Thu Cước phí Phát	B_1 25	B_2 25	B_3 10
$A_1 : 10$	5	3	1 × 10
$A_2 : 30$	7 × 25	6 × 5	8 ×
$A_3 : 20$	3	2 × 20	2

Phương án cơ bản ban đầu có 4 ô chọn $< m+n-1=5$, nên Phương án ban đầu suy biến do đó ta phải bổ sung ô chọn không ô (2,3) mà không tạo thành vòng.

IV. Thuật toán “Quy 0 ô chọn”

1. Định lý: Nếu ta cộng vào hàng i của ma trận cước $C = c_{ij}$ số

r_i và cộng vào cột j số s_j ta sẽ có

bài toán vận tải mới với ma trận cước phí

$C' = c'_{ij}$ with $c'_{ij} = c_{ij} + r_i + s_j$ tương đương với bài toán ban đầu

(nghĩa là phương án tối ưu của bài toán này cũng là phương án tối ưu của bài toán kia và ngược lại)

2. Thuật toán:

Bước 1: quy 0 cước phí các ô chọn:

Giả sử ta có 1 phương án cơ bản ban đầu với $m+n-1$ ô chọn. Ta cộng vào

hàng i của ma trận cước phí số r_i và cộng vào cột j số

s_j . Ta chọn r_i, s_j thế nào để cước phí mới

$$c'_{ij} = c_{ij} + r_i + s_j = 0$$

Bước 2: Kiểm tra tính tối ưu:

- 1) Nếu sau khi quy 0 cước phí các ô chọn, mà các ô loại đều có cước phí ≥ 0 thì phương án đang xét là tối ưu.
- 2) Nếu sau khi quy 0 cước phí các ô chọn, mà có ít nhất 1 ô loại có cước phí < 0 thì phương án đang xét không phải tối ưu, ta chuyển sang bước 3

Bước 3: Xây dựng phương án mới tốt hơn

- 1) Tìm ô đưa vào: i^*, j^* có cước phí âm nhỏ nhất là ô đưa vào.

2) Tìm vòng điều chỉnh: bổ sung i^*, j^* vào $m+n-1$ ô chọn ban đầu để được vòng điều chỉnh

3) Phân ô chẵn lẻ của vòng V : ta đánh số thứ tự các ô của vòng V bắt đầu từ ô i^*, j^* , khi đó V phân thành 2 lớp:

V^C : Các ô có thứ tự chẵn

V^L : Các ô có thứ tự lẻ.

4) Tìm ô đưa ra và lượng điều chỉnh:

Ô đưa ra là $\min_{(i,j) \in V^C} x_{ij} = x_{i^0 j^0}$

5) Lập phương án mới: $x' = x_{ij} - x_{i^0 j^0}$

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} - x_{i^0 j^0} & \text{if } (i,j) \in V^C \\ x_{ij} + x_{i^0 j^0} & \text{if } (i,j) \in V^L \\ x_{ij} & \text{if } (i,j) \notin V \end{cases}$$

Nghĩa là:

- Các ô lẻ ta cộng thêm vào 1 lượng điều chỉnh $x_{i^0 j^0}$.
- Các ô chẵn ta trừ 1 lượng điều chỉnh $x_{i^0 j^0}$.
- Giữ nguyên các ô không nằm trong vòng điều chỉnh.

Ví dụ: Giải bài toán vận tải sau:

Thu Cước phí Phát	B_1 80	B_2 20	B_3 60	
$A_1 : 50$	5 50	4	1 × 50	$r_1 = 6$
$A_2 : 40$	3 × 20	2 × 20	6	$r_2 = 0$
$A_3 : 70$	7 × 60	9	11 × 10	$r_3 = -4$
	$s_1 = -3$	$s_2 = -2$	$s_3 = -7$	

Bước 1: lập phương án cơ bản ban đầu: có 5 ô chọn đúng bằng $m+n-1=5$, do đó PABĐ là 0 suy biến.

Bước 2: quy 0 ô chọn

$$\text{Chọn } r_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -3 \\ s_3 = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_3 = -4 \\ r_1 = 6 \end{cases} \Rightarrow s_2 = -2$$

Cước phí mới các ô 0 chọn: $c'_{ij} = c_{ij} + r_i + s_j$

Ô (1,1): $10 - 7 + 5 = 8$.

Ô (1,2): $6 - 2 + 4 = 8$.

Ô (2,2): $6 - 7 + 1 = 0$

Ô (3,2): $-4 + 9 - 2 = 2$.

Ô (2,3): $0 + 6 - 7 = -1$

8	8	0 × 50	$r = -1$
0 × 20	0 × 20	-1	$r = 0$
0 × 60	2	0 × 10	$r = 0$
S=0	S=0	S=1	

Bước 3: Kiểm tra tính tối ưu: Phương án chưa tối ưu vì ô loại (2,3) có cước phí âm

Bước 4: lập phương án mới tốt hơn:

Chọn vòng điều chỉnh $v = (2,3) \rightarrow (2,1) \rightarrow (3,1) \rightarrow (3,3) \rightarrow (2,3)$

Lượng điều chỉnh: $\min \{20, 10\} = 10$

2 ô chẵn -10

2 ô lẻ +10

Ta có phương án mới và cước phí mới theo bảng sau:

7	7	0 × 50
0 × 10	0 × 20	0 10
0 × 70	3	1 0

Ta có cước phí mới các ô không chọn ≥ 0 , nên phương án cuối cùng là tối ưu.

Kết quả của bài toán:

PATU:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 10 & 20 & 10 \\ 70 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Chi phí vận chuyển:

$$f(x) = 1 \times 50 + 3 \times 20 + 2 \times 20 + 7 \times 60 + 11 \times 10 = 680$$

§3 BÀI TOÁN VẬN TẢI KHÔNG CÂN BẰNG THU PHÁT**I. Trường hợp tổng lượng hàng phát > tổng lượng hàng thu**

$$\sum a_i > \sum b_j$$

Mô hình toán học có dạng:

$$\min \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i & i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j & j = \overline{1, n} \\ x_{ij} \geq 0 & i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n} \end{cases}$$

II. I. Trường hợp tổng lượng hàng phát < tổng lượng hàng thu

$$\sum a_i < \sum b_j$$

Mô hình toán học có dạng:

$$\min \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i & i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j & j = \overline{1, n} \\ x_{ij} \geq 0 & i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Phương pháp:

Trường hợp 1: lập thêm trạm thu giả B_{n+1} với nhu cầu

$$b_{n+1} = \sum a_i - \sum b_j > 0 \text{ các ô trên cột này có cước phí } = 0$$

Trường hợp 2: lập thêm trạm phát giả A_{m+1} với nhu cầu

$$a_{m+1} = \sum b_j - \sum a_i > 0 \text{ các ô trên hàng này có cước phí } = 0$$

Chú ý: khi tìm phương án cơ bản ban đầu, ta phân phối vào các ô chính trước, các ô trên hàng hay cột ứng với các trạm phát hay thu giả khi nào còn thừa mới phân vào.

Ví dụ:

Giải bài toán vận tải dưới đây:

Thu	20	40	60
Cước phí phát			
80	3	4	1
30	4	2	3
50	1	5	6

Tổng số phát=160>tổng số thu=120

Ta lập thêm trạm thu giả(cột thứ tư) ta được bảng sau:

Thu	20	40	60	(40) Trạm Thu giả	
Cước phí phát					
80	3 4	4 0	1 0	0 0	R=0
		10	60	10	
30	4 7	2 0	3 4	0 2	R=2
		30			
50	1 0	5 1	6 5	0 0	R=0
	20			30	
	S=1	S=-4	S=-1	S=0	

Ta có các ô 0 chọn có cước phí ≥ 0 . Ta có PATU:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 60 & 10 \\ 0 & 30 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

Tổng chi phí vận chuyển: $f \rightarrow 180$

BÀI TẬP:

1) Giải bài toán vận tải sau:

	80	20	60
50	5	4	1
40	3	2	6
70	7	9	11

GIẢI:

	80	20	60	
50	5 8	4 8	1 0	R=6
40	3 0	2 0	6 -1	R=0
	20(-10)	20	(+10)	
70	7 0	9	11 0	R=-4
	60(+10)		10(-10)	
	S=-3	S=-2	S=-7	

Chọn vòng điều chỉnh

$$v = \begin{pmatrix} 2,3 \\ 2,1 \\ 3,1 \\ 3,3 \end{pmatrix}$$

Lượng điều chỉnh: $\min \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = 10$

Phương án và cước phí mới được cho ở bảng sau:

5	7	4	7	1	0	R=-1
				50		
3	0	2	0	6	0	R=0
10		20		10		
7	0	9	3	11	1	R=0
70				0		
S=0		S=0		S=1		

Ta có các ô 0 chọn có cước phí ≥ 0 . Ta có PATU:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 10 & 20 & 10 \\ 70 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tổng chi phí vận chuyển: $f_{\min} = 670$

2) Giải bài toán vận tải sau:

	60	70	40	30
100	2	1	4	3
80	5	3	2	6
20	6	2	1	5

GIẢI:

	60	70	40	30	
100	2 0	1 0	4 5	3 0	R=3
	30(+30)	70(-30)			
80	5 0	3 -1	2 0	6 0	R=0
	30(-30)	(+30)	20	30	
20	6 2	2 -1	1 0	5 0	R=1
			20		
	S=-5	S=-4	S=-2	S=-6	

Chọn vòng điều chỉnh

$$v = \begin{matrix} 2,2 \\ 1,2 \\ 1,1 \\ 2,1 \end{matrix}$$

Lượng điều chỉnh: $\min \begin{matrix} 30 \\ 70 \end{matrix} \rightarrow 30$

Phương án và cước phí mới được cho ở bảng sau:

2	0	1	0	4	4	3	-1	R=-1
60		40(-30)				(+30)		
5	1	3	0	2	0	6	0	R=0
0		30(+30)		20		30 (-30)		
6	3	2	0	1	0	5	0	R=0
				20				
S=1		S=1		S=0		S=0		

Chọn vòng điều chỉnh

$$v = \begin{matrix} 1,4 \\ 1,2 \\ 2,2 \\ 2,4 \end{matrix}$$

Lượng điều chỉnh: $\min \begin{matrix} 30 \\ 40 \end{matrix} \rightarrow 30$

Phương án và cước phí mới được cho ở bảng sau:

2	0	1	0	4	4	3	0	R=0
60		10				30		
5	1	3	0	2	0	6	1	R=0
0		60		20		0		
6	3	2	0	1	0	5	1	R=0
				20				
S=0		S=0		S=0		S=1		

Ta có các ô 0 chọn có cước phí ≥ 0 . Ta có PATU:

$$X = \begin{bmatrix} 60 & 10 & 0 & 30 \\ 0 & 60 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

Tổng chi phí vận chuyển: $f_x = 460$

3) Giải bài toán vận tải sau:

	20	100	145	30	150
120	6	3	1	4	5
150	1	2	5	4	3
150	2	4	3	1	6
25	3	1	4	2	7

GIẢI:

	20	100	145	30	150	
120	6 4	3 0	1 0	4 5	5 1	R=2
			120			
150	1 0	2 0	5 5	4 6	3 0	R=3
	20(-20)	75			55(+20)	
150	2 -2	4 -1	3 0	1 0	6 0	R=0
	(+20)		25	30	95(-20)	
25	3 3	1 0	4 5	2 5	7 5	R=4
		25				
	S=-4	S=-5	S=-3	S=-1	S=-6	S=-4

Chọn vòng điều chỉnh

$$v = \begin{matrix} 3,1 & 3,5 & 2,5 & 2,1 \end{matrix}$$

Lượng điều chỉnh: $\min \begin{matrix} 20 & 95 \end{matrix} = 20$

Phương án và cước phí mới được cho ở bảng sau:

6	6	3	0	1	0	4	5	5	1	R=0
				120						
1	2	2	0	5	5	4	6	3	0	R=0
0		75(-75)						75(+75)		
2	0	4	-1	3	0	1	0	6	0	R=0
20		(+75)		25		30		75(-75)		
3	5	1	0	4	5	2	5	7	5	R=0
		25								
S=2		S=0		S=0		S=0		S=0		

Chọn vòng điều chỉnh

$$v = \begin{matrix} 3,2 \\ 3,5 \\ 2,5 \\ 2,2 \end{matrix}$$

Lượng điều chỉnh: $\min \frac{1}{75}, \frac{1}{75} = \frac{1}{75}$, lúc này phương án mới có 7 ô chọn < 8 ô. Nên PA suy biến ta bổ sung thêm ô chọn 0: ô(3,5) mà 0 tạo thành vòng với các ô đã chọn của PA mới.

Phương án và cước phí mới được cho ở bảng sau:

6	6	3	1	1	0	4	5	5	1	R=0
				120						
1	2	2	1	5	5	4	6	3	0	R=0
0		0						150		
2	0	4	0	3	0	1	0	6	0	R=0
20		75		25		30		0		
3	4	1	0	4	4	2	4	7	4	R=-1
		25								
S=0		S=1		S=0		S=0		S=0		

Ta có các ô 0 chọn có cước phí ≥ 0 . Ta có PATU:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 150 \\ 20 & 75 & 25 & 30 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tổng chi phí vận chuyển: $f = 1040$

4) Giải bài toán vận tải sau:

	10	10	10	20	20
5	5	1	4	6	7
15	3	4	2	7	8
20	4	3	1	7	9
30	6	5	4	9	11

GIẢI:

	10	10	10	20	20	
5	5 4	1 0	4 5	6 1	7 0	R=4
		5				
15	3 0	4 1	2 1	7 0	8 -1	R=2
	10			5(-5)	(+5)	
20	4 1	3 0	1 0	7 0	9 0	R=2
			10	10		
30	6 1	5 0	4 1	9 0	11 0	R=0
		5		5(+5)	20(-5)	
	S=-5	S=-5	S=-3	S=-9	S=-11	

Chọn vòng điều chỉnh

$v = 2,5$

Lượng điều chỉnh: $\min 20,5 = 5$

Phương án và cước phí mới được cho ở bảng sau:

5	3	1	0	4	5	6	1	7	0	R=0
		5								
3	0	4	2	2	2	7	0	8	0	R=1
10						0		5		
4	0	3	0	1	0	7	0	9	0	R=0
				10		10				
6	0	5	0	4	1	9	0	11	0	R=0
		5				10		15		
S=-1		S=0		S=0		S=0		S=0		

Ta có các ô 0 chọn có cước phí ≥ 0 . Ta có PATU:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 10 & 15 \end{bmatrix}$$

Tổng chi phí vận chuyển: $f_x = 435$

5 Giải bài toán vận tải sau:

	30	15	2	15
25	3	4	2	6
15	5	1	6	2
40	2	1	5	3

GIẢI:

	30	15	2	15	
25	3 0	4 2	2 0	6 2	R=-1
	5		20		
15	5 3	1 0	6 5	2 -1	R=0
		15(-15)		Đưa vào (+15)	
40	2 0	1 0	5 4	3 0	R=0
	25	Bổ sung 0(+15)		15(-15)	
	S=-2	S=-1	S=-1	S=-3	

Ở bảng trên: PACB ban đầu có 5 ô $m+n-1=6$. PA suy biến, do đó ta bổ sung ô(3,2) 0 tạo vòng với các ô đã chọn.

Chọn vòng điều chỉnh

$$V = \begin{matrix} \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\ 2,4 & 2,2 & 3,2 & 3,4 \end{matrix}$$

Lượng điều chỉnh: $\min \{15, 15\} = 15$

Phương án và cước phí mới được cho ở bảng sau:

3 0	4 2	2 0	6 3	R=0
5		20		
5 3	1 0	6 5	2 0	R=0
	Bổ sung 0		15	
2 0	1 0	5 4	3 0	R=0
25	15		0	
S=0	S=0	S=0	S=1	

Ở PA này số ô chọn: $5 < 6$, nên PA suy biến ta bổ sung ô(2,2) 0 tạo vòng với các ô đã chọn.

Ta có các ô 0 chọn có cước phí ≥ 0 . Ta có PATU:

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 25 & 15 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tổng chi phí vận chuyển: $f = 150$

6) Giải bài toán vận tải sau:

	180	200	230	280
280	8	6	14	7
320	2	4	6	7
290	5	3	4	9

GIẢI:

	180	200	230	280	
280	8 5	6 0 Bổ sung 0	14 7	7 0	R=-3
320	2 0	4 -1 Đưa vào	6 0	7 1	R=-2
	180		140		
290	5 5	3 0	4 0	9 5	R=0
		200	90		
	S=0	S=-3	S=-4	S=-4	

Ở bảng trên: PACB ban đầu có 5 ô $m+n-1=6$. PA suy biến, do đó ta bổ sung ô(1,) 0 tạo vòng với các ô đã chọn.

Chọn vòng điều chỉnh

$$v = \begin{matrix} 2,2 & 3,2 & 3,3 & 2,3 \end{matrix}$$

Lượng điều chỉnh: $\min \begin{matrix} 200, 140 \end{matrix} = 140$

Phương án và cước phí mới được cho ở bảng sau:

8 4	6 0 Bổ sung 0	14 7	7 0	R=0
2 0	4 0 Đưa vào	6 1	7 2	R=1
180	140	0		
5 4	3 0	4 0	9 5	R=0
	60	230		
S=-1	S=0	S=0	S=0	

Ở PA này số ô chọn: $5 < 6$, nên PA suy biến ta bổ sung ô(1,) 0 tạo vòng với các ô đã chọn.

Ta có các ô 0 chọn có cước phí ≥ 0 . Ta có PATU:

Toán chuyên ngành**Quy hoạch tuyến tính**

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 280 \\ 180 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 230 & 0 \end{bmatrix}$$

Tổng chi phí vận chuyển: $f_{\min} = 3980$

Bài toán không cân bằng thu phát

7 Giải bài toán vận tải sau:

	8	7	12	15
10	8	9	12	5
19	4	8	5	9
11	5	9	7	1
9	1	2	6	3

GIẢI:

	8	7	12	15	Trạm thu giả	
10	8 1	9 1	12 7	5 0	0 0	R=0
19	4 -3 Đưa vào (+6)	8 0	5 0	9 4	0 0	R=0
11	5 2	9 5	7 6	1 0	0 4	R=4
9	1 0	2 0	6 7	3 4	0 6	R=6
	S=-7	S=-8	S=-5	S=-5	S=0	

Chọn vòng điều chỉnh

$$v = \begin{matrix} 2,1 \rightarrow 4,1 \rightarrow 4,2 \rightarrow 2,2 \rightarrow \end{matrix}$$

Lượng điều chỉnh: $\min \{6,8\} = 6$

Phương án và cước phí mới được cho ở bảng sau:

8 4	9 4	12 7	5 0	0 0	R=0
4 0	8 3	5 0	4 6	0 0	R=0
Đưa vào 6	0	12		1	
5 5	9 8	7 6	1 0	0 4	R=0
			11		
1 0	2 0	6 4	3 1	0 3	R=-3
2	7				
S=3	S=3	S=0	S=0	S=0	

Ta có các ô 0 chọn có cước phí ≥ 0 . Ta có PATU:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 0 \\ 2 & 7 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tổng chi phí vận chuyển: $f_x = 131$

8) Giải bài toán vận tải sau:

	20	50	60	30
50	4	5	1	0
40	2	3	6	0
70	9	7	11	0

GIẢI:

	20	50	60	30 Trạm thu giả	
50	4 8	5 8	1 0	0 10	R=10
			50		
40	2 0	3 0	6 -1	0 4	R=4
	20	20(-10)	(+10)		
70	9 3	7 0	11 0	0 0	R=0
		30(+10)	10(-10)	30	
	S=-6	S=-7	S=-11	S=0	

Chọn vòng điều chỉnh

$$v = \begin{matrix} 2,3 \\ 2,2 \\ 3,2 \\ 3,3 \end{matrix}$$

Lượng điều chỉnh: $\min \{10, 20\} = 10$

Phương án và cước phí mới được cho ở bảng sau:

4 7	5 7	1 0	0 9	R=-1
		50		
2 0	3 0	6 0	0 4	R=0
20	10	Đưa vào 10		
9 3	7 0	11 1	0 0	R=0
	40	0	30	
S=0	S=0	S=1	S=0	

Ta có các ô 0 chọn có cước phí ≥ 0 . Ta có PATU:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 50 & 0 \\ 20 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

Tổng chi phí vận chuyển: $f_x = 460$

9) Giải bài toán vận tải sau:

	30	40	60	70
100	4	5	3	2
80	7	3	6	4
20	6	2	7	3

GIẢI:

	30	40	60	70	
100	4 0	5 5	3 0	2 0	R=3
			30(+30)	70(-30)	
80	7 0	3 0	6 0	4 -1	R=0
	30	20	30(-30)	Đưa vào (+30)	
20	6 0	2 0	7 2	3 -1	R=1
		20			
	S=-7	S=-3	S=-6	S=-5	

Chọn vòng điều chỉnh

$$v = \begin{matrix} 2,4 \\ 1,4 \\ 1,3 \\ 2,3 \end{matrix}$$

Lượng điều chỉnh: $\min \{70, 30\} = 30$

Phương án và cước phí mới được cho ở bảng sau:

4 -1	5 4	3 0	2 0	R=-1
(+30)		60	40(-30)	
7 0	3 0	6 1	4 0	R=0
30(-30)	20	0	30(+30)	
6 0	2 0	7 3	3 0	R=0
	20			
S=0	S=0	S=1	S=1	

Chọn vòng điều chỉnh

$$v = \begin{matrix} 1,1 \\ 2,1 \\ 2,4 \\ 1,4 \end{matrix}$$

Lượng điều chỉnh: $\min \{40, 30\} = 30$

Phương án và cước phí mới được cho ở bảng sau:

4 0	5 4	3 0	2 0	R=0
30		60	10	
7 1	3 0	6 1	4 0	R=0
0	20	0	60	
6 1	2 0	7 3	3 0	R=0
	20			
S=1	S=0	S=0	S=0	

Ta có các ô 0 chọn có cước phí ≥ 0 . Ta có PATU:

$$X = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 60 & 10 \\ 0 & 20 & 0 & 60 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tổng chi phí vận chuyển: $f_x = 660$

10) Giải bài toán vận tải sau:

	150	120	80	50
100	3	5	7	11
130	1	4	6	3
170	5	8	12	7

GIẢI:

	150	120	80	50	
100	3 0	5 0	7 -2	11 7	R=3
	20(-20)	80(+20)			
130	1 0	4 1	6 -1	3 1	R=5
	130				
170	5 -1	8 0	12 0	7 0	R=0
	Đưa vào (+20)	40(-20)	80	50	
	S=-6	S=-8	S=-12	S=-7	

Chọn vòng điều chỉnh

$$v = \begin{bmatrix} 3,1 & 3,2 & 1,2 & 1,1 \end{bmatrix}$$

Lượng điều chỉnh: $\min \begin{matrix} 40 \\ 20 \end{matrix} \rightarrow 20$

Phương án và cước phí mới được cho ở bảng sau:

3	1	5	0	7	-2	11	7	R=0
0		100(-80)		(+80)				
1	0	4	0	6	-2	3	0	R=-1
130								
5	0	8	0	12	0	7	0	R=0
20		20(+80)		80(-80)		50		
S=1		S=0		S=0		S=0		

Chọn vòng điều chỉnh

$v = \begin{matrix} 1,3 \\ 1,2 \\ 3,2 \\ 3,3 \end{matrix} \rightarrow$

Lượng điều chỉnh: $\min \begin{matrix} 100 \\ 80 \end{matrix} \rightarrow 80$

Phương án và cước phí mới được cho ở bảng sau:

3	1	5	0	7	0	11	7	R=0
0		20		80				
1	0	4	0	6	0	3	0	R=0
130								
5	0	8	0	12	2	7	0	R=0
20		100		0		50		
S=0		S=0		S=2		S=0		

Ta có các ô 0 chọn có cước phí ≥ 0 . Ta có PATU:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 80 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 100 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

Tổng chi phí vận chuyển: $f = 2040$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Giải các bài toán vận tải cho bởi bảng sau:

1)

	25	40	20	10
40	4	3	7	8
20	6	2	3	4
35	5	3	8	6

ĐÁP SỐ

$$X = \begin{bmatrix} 25 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Tổng chi phí vận chuyển: $f \rightarrow 340$

2)

	220	310	200	250
300	8	5	4	6
500	12	11	9	13
180	10	15	18	14

ĐÁP SỐ

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 50 & 0 & 250 \\ 40 & 260 & 200 & 0 \\ 180 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tổng chi phí vận chuyển: $f \rightarrow 8690$

3)

	76	62	88	45	40
79	10	19	9	6	8
102	13	11	8	7	4
70	12	17	10	5	3
60	12	18	18	7	9

ĐÁP SỐ

$$X = \begin{bmatrix} 31 & 0 & 48 & 0 & 0 \\ 0 & 62 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 40 \\ 45 & 0 & 0 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

Tổng chi phí vận chuyển: $f_x = 2659$

4)

	85	75	60	50
105	4	16	10	14
65	10	18	12	20
55	6	4	14	18
45	8	6	8	12

$$\text{ĐÁP SỐ } X = \begin{bmatrix} 85 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 60 & 5 \\ 0 & 55 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

Tổng chi phí vận chuyển: $f_x = 2080$

5)

	120	280	130	270
100	6	8	3	7
300	9	10	11	4
150	5	7	9	10
250	12	13	8	9

ĐÁP SỐ

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 270 \\ 120 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 220 & 30 & 0 \end{bmatrix}$$

Tổng chi phí vận chuyển: $f^* = 5590$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] GS. Đặng Hấn. Quy hoạch tuyến tính. Trường Đại học Kinh Tế TP. Hồ Chí Minh.
- [2] Ngô Thành Phong. Đại số tuyến tính và Quy hoạch tuyến tính. Nhà xuất bản Đại học quốc gia TP. Hồ Chí Minh-2003.
- [3] Nguyễn Cảnh. Quy hoạch tuyến tính. Nhà xuất bản Đại học quốc gia TP. Hồ Chí Minh-2004.
- [4] Bùi Minh Trí. Toán Kinh Tế. Nhà xuất bản Đại học Bách khoa Hà Nội-2007.

MỤC LỤC

	Trang
Chương 1: Bài toán quy hoạch tuyến tính	1
§1 : 1 số ví dụ dẫn đến bài toán quy hoạch tuyến tính	1
§2 : Các dạng bài toán quy hoạch tuyến tính	6
§3 : Biến đổi dạng của bài toán quy hoạch tuyến tính	9
Chương 2: Phương pháp đơn hình	15
§1 : Thuật toán đơn hình	15
§2 : Thuật toán đơn hình mở rộng	20
Bài tập có lời giải	26
Chương 3: Bài toán đối ngẫu	41
§1 : Khái niệm	41
§2 : Quan hệ giữa bài toán gốc và bài toán đối ngẫu	44
Bài tập có lời giải	47
Chương 4: Bài toán vận tải	59
§1 : Bài toán vận tải dạng tổng quát	59
§2 : Tính chất của bài toán vận tải	61
§3 : Bài toán vận tải không cân bằng thu phát	66
Bài tập có lời giải	68
Tài liệu tham khảo	86
Mục lục	87