

Ch-2: Phân tích hệ thống LTI trong miền thời gian

Lecture-3

2.1. Giới thiệu

2.2. Hệ thống LTI: tích chập

2.3. Các tính chất của hệ thống LTI

2.1. Giới thiệu

- Trong môn học này ta tập trung khảo sát hệ thống LTI:
 - Nhiều hệ thống vật lý thực tế có tính LTI
 - Hệ thống LTI thỏa nguyên lý xếp chồng & bất biến: biểu diễn tín hiệu vào thành tổng các tín hiệu cơ bản (hoặc phiên bản trễ)
→ đáp ứng của hệ thống một cách dễ dàng.
- Các ví dụ về biểu diễn tín hiệu thành tổng các tín hiệu cơ bản:
 - Biểu diễn tín hiệu thành tổng của các xung đơn vị
 - Biểu diễn tín hiệu thành tổng các tín hiệu hàm mũ phức: chuỗi Fourier, biến đổi Fourier, biến đổi Laplace
- Trong chương này ta khảo sát việc biểu diễn tín hiệu thành tổng các xung đơn vị để tính đáp ứng của hệ thống dùng khái niệm đáp ứng xung của hệ thống và tích chập.

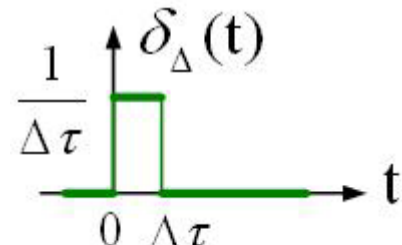
2.2. Hệ thống LTI: Tích chập

2.2.1. Biểu diễn tín hiệu thành tổng các xung đơn vị

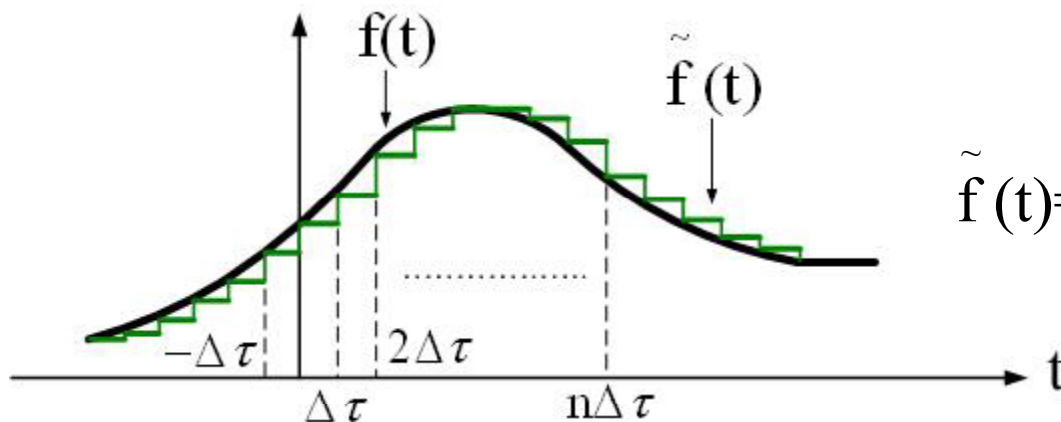
2.2.2. Đáp ứng xung và biểu diễn hệ thống LTI bằng tích chập

2.2.1. Biểu diễn tín hiệu thành tổng các xung đơn vị

□ Định nghĩa xung $\delta_{\Delta}(t)$:

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta\tau}; & 0 < t < \Delta\tau \\ 0; & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t) = \delta(t)$$

□ Biểu diễn gần đúng $f(t)$ dùng $\delta_{\Delta}(t)$:



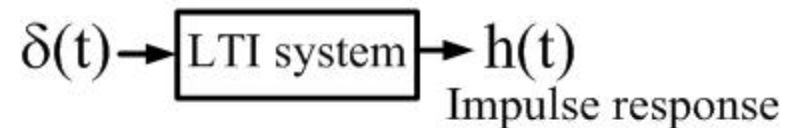
$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\Delta\tau) \delta_{\Delta}(t - n\Delta\tau) \Delta\tau$$

□ Biểu diễn $f(t)$ thành tổng các $\delta(t)$:

$$f(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \tilde{f}(t) \Rightarrow f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

2.2.2. Đáp ứng xung và biểu diễn hệ thống LTI bằng tích chập

□ Đáp ứng xung của hệ thống LTI: là đáp ứng của hệ thống với $\delta(t)$

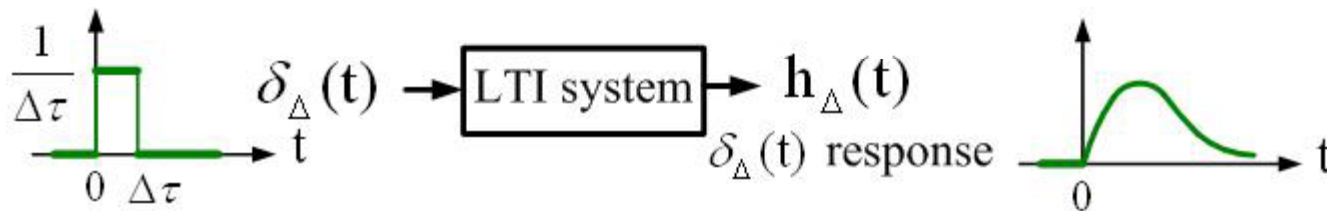


Ví dụ: (a) hệ thống đơn vị $y(t)=f(t)$  $h(t)=\delta(t)$

(b) hệ thống có phương trình: $y(t)=\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau$

 $h(t)=\int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = u(t)$

□ Đáp ứng của hệ thống LTI với xung $\delta_{\Delta}(t)$:



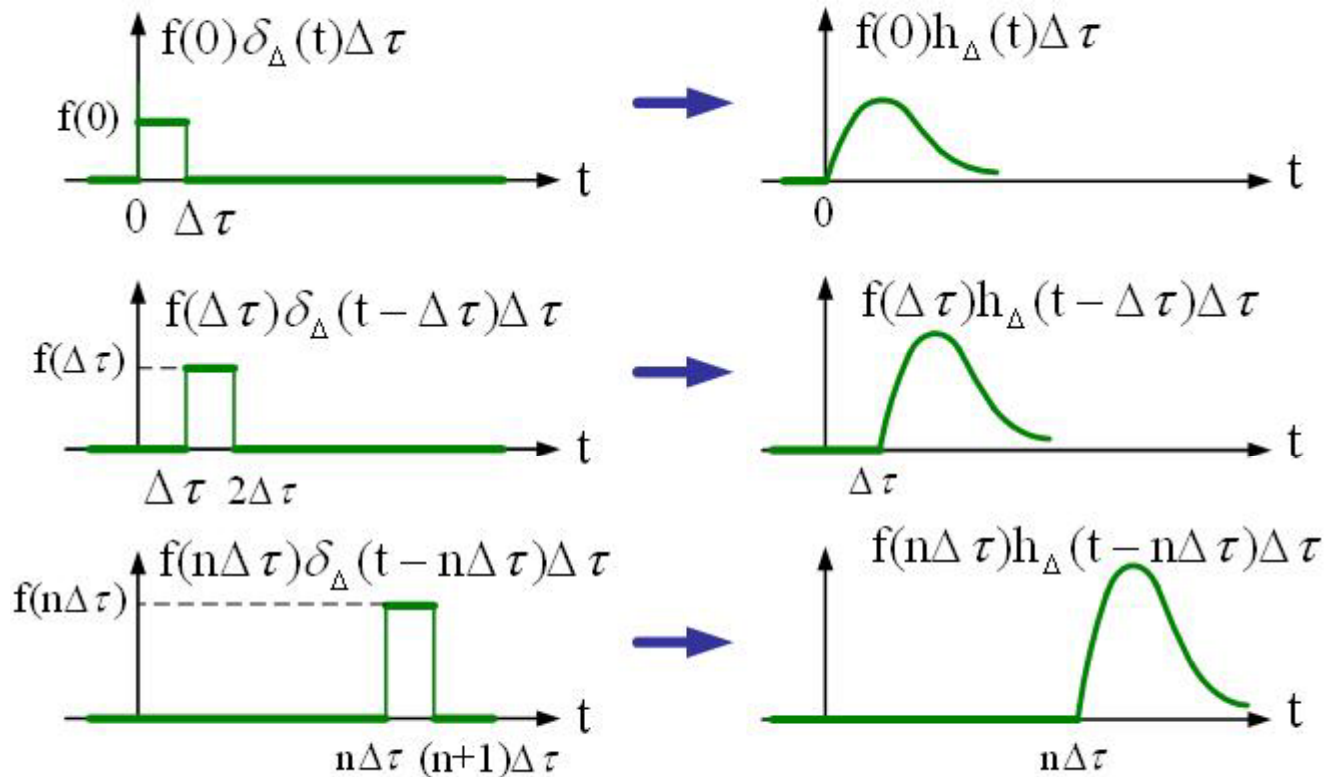
$$\Rightarrow \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} h_{\Delta}(t) = h(t)$$

2.2.2. Đáp ứng xung và biểu diễn hệ thống LTI bằng tích chập

□ Đáp ứng của hệ thống LTI với tín hiệu gần đúng của $f(t)$

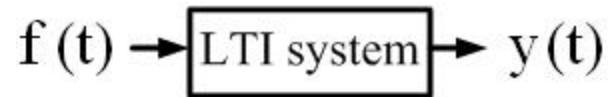
$$\tilde{f}(t) \rightarrow \boxed{\text{LTI system}} \rightarrow \tilde{y}(t) \quad \text{Với: } \tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\Delta\tau) \delta_{\Delta}(t - n\Delta\tau) \Delta\tau$$

$$\text{Do hệ thống LTI nên: } \tilde{y}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\Delta\tau) h_{\Delta}(t - n\Delta\tau) \Delta\tau$$



2.2.2. Đáp ứng xung và biểu diễn hệ thống LTI bằng tích chập

- Đáp ứng của hệ thống LTI với tín hiệu vào $f(t)$

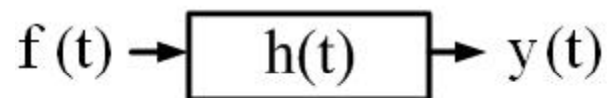


Ta có: $f(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$

Suy ra: $y(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \tilde{y}(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\Delta\tau) h_{\Delta}(t - n\Delta\tau) \Delta\tau$

$$\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau \Leftrightarrow y(t) = f(t) * h(t) \quad (\text{tích chập})$$

- Trong phân tích và thiết kế người ta hay biểu diễn mô hình hệ thống LTI theo tích chập với đáp ứng xung $h(t)$

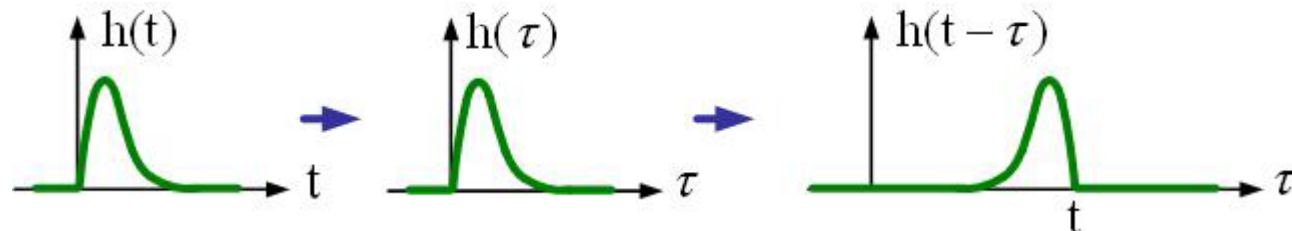


2.2.2. Đáp ứng xung và biểu diễn hệ thống LTI bằng tích chập

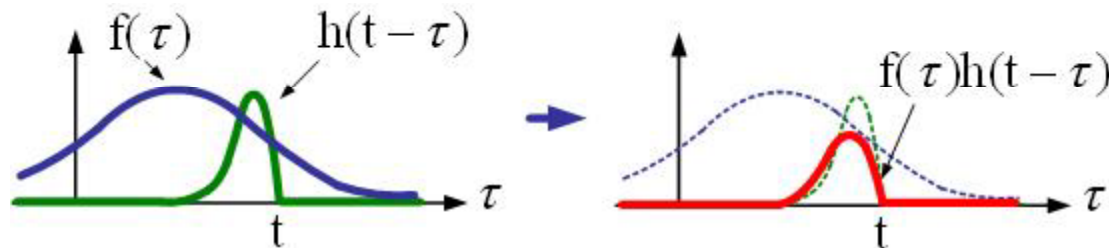
□ Tính tích chập: $f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau$

(Lưu ý: ta sẽ tính tích phân trên tính theo thang thời gian τ còn t là tham số cũng chính là biến thời gian của kết quả)

- Xác định $h(t-\tau)$ theo biến τ :



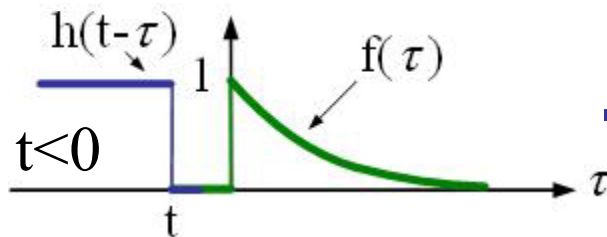
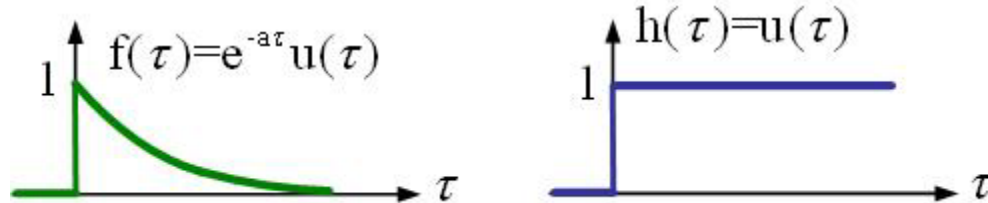
- Nhân $f(\tau)$ với $h(t-\tau)$



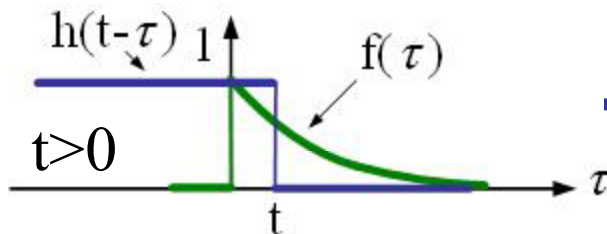
- Lấy tích phân trên toàn thang τ

2.2.2. Đáp ứng xung và biểu diễn hệ thống LTI bằng tích chập

- Ví dụ: cho $f(t)=e^{-at}u(t)$; $a>0$ là ngõ vào của hệ thống LTI có đáp ứng xung $h(t)=u(t)$. Xác định đáp ứng $y(t)$ của hệ thống?

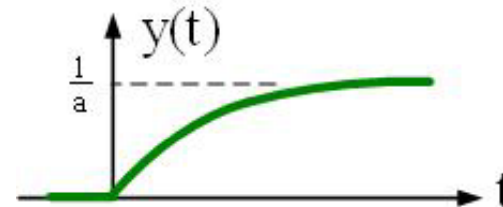


$$\rightarrow f(t) * h(t) = 0$$



$$\rightarrow f(t) * h(t) = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})$$

$$\rightarrow y(t) = f(t) * h(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t)$$

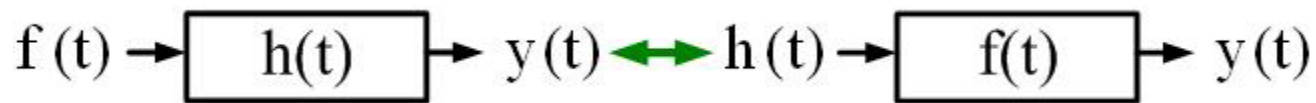


2.3. Các tính chất của hệ thống LTI

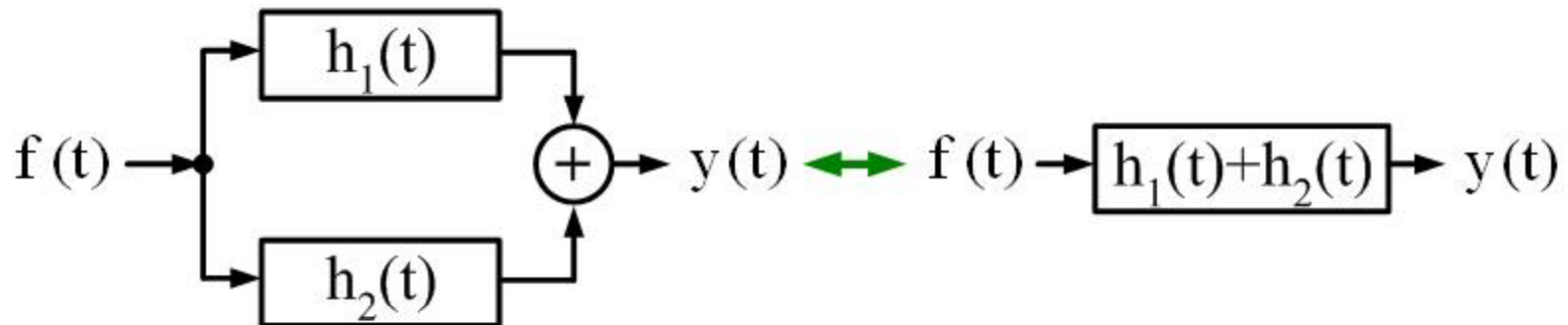
□ Tính giao hoán: $y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau$

Đặt: $\tau_1 = t - \tau \Rightarrow \tau = t - \tau_1 \Rightarrow d\tau = -d\tau_1$

$$\Rightarrow y(t) = - \int_{+\infty}^{-\infty} f(t - \tau_1)h(\tau_1)d\tau_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1)f(t - \tau_1)d\tau_1 = h(t) * f(t)$$

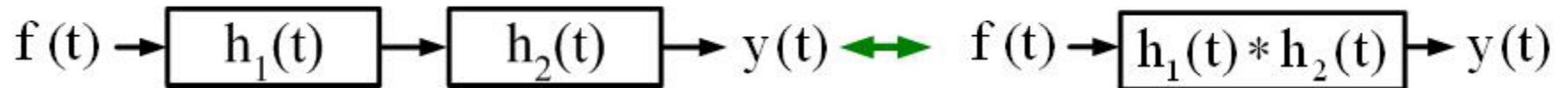


□ Tính phân phối: $y(t) = f(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = f(t) * h_1(t) + f(t) * h_2(t)$



2.3. Các tính chất của hệ thống LTI

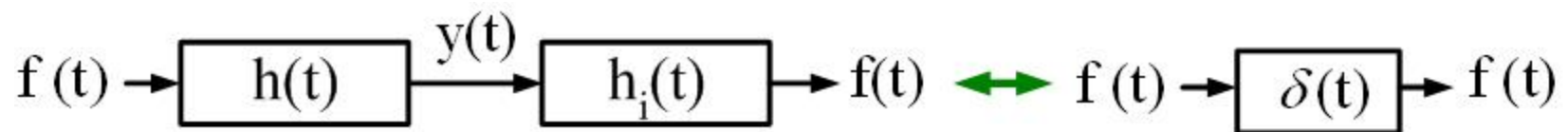
□ Tính kết hợp: $y(t)=[f(t) * h_1(t)] * h_2(t)=f(t) * [h_1(t) * h_2(t)]$



□ Hệ thống LTI không nhớ: $h(t)=K\delta(t)$

$$\Rightarrow y(t)=f(t) * h(t)=f(t) * K\delta(t)=Kf(t)$$

□ Tính khả nghịch: ta dễ dàng chứng minh được hệ thống nghịch đảo của một hệ thống LTI cũng là hệ thống LTI. Do đó hệ thống LTI khả nghịch khi tồn tại $h_i(t)$ sao cho $h(t) * h_i(t)=\delta(t)$



2.3. Các tính chất của hệ thống LTI

□ Tính nhân quả: hệ thống LTI nhân quả khi $h(t)=0$ khi $t<0$

$$\Rightarrow y(t)=f(t) * h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^{+\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

□ Tính ổn định: giả sử tín hiệu vào bị chặn $|f(t)|\leq B$

$$\Rightarrow |y(t)|=|f(t) * h(t)|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau\right|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau\right|$$

$$\Rightarrow |y(t)|\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| |f(t-\tau)|d\tau \Rightarrow |y(t)|\leq B \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau$$

Vậy hệ thống LTI ổn định khi: $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau$ hữu hạn

□ Đáp ứng của hệ thống LTI với $u(t)$:

$$s(t)=u(t) * h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau)d\tau \Rightarrow h(t)=\frac{ds(t)}{dt}$$