

Ch-2: Phân tích hệ thống LTI trong miền thời gian

Lecture-4

2.4. Hệ thống LTI nhân quả mô tả bởi phương trình vi phân

2.4. Hệ thống LTI nhân quả mô tả bởi phương trình vi phân

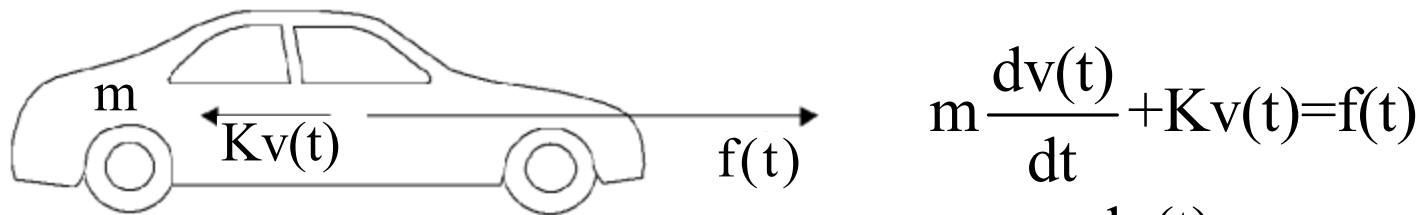
2.4.1. Hệ thống LTI nhân quả mô tả bởi phương trình vi phân

2.4.2. Đáp ứng xung của hệ thống

2.4.3. Đa thức đặc trưng và tính ổn định của hệ thống

2.4.1. Hệ thống LTI nhân quả mô tả bởi phương trình vi phân

- Trên thực tế tồn tại rất nhiều hệ thống mô tả bởi PTVP hệ số hằng
 - Ví dụ: phương trình xác định mối quan hệ của vận tốc và lực kéo tác dụng lên xe



Giả sử: $m=1000\text{kg}$; $K=300\text{N}/(\text{m/s}) \Rightarrow 1000 \frac{dv(t)}{dt} + 300v(t) = f(t)$

- Tổng quát phương trình VP mô tả cho hệ thống có dạng:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m f(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} f(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{df(t)}{dt} + b_0 f(t)$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k f(t)}{dt^k}} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\left[\sum_{k=0}^n a_k D^k \right]}_{Q(D)} y(t) = \underbrace{\left[\sum_{k=0}^m b_k D^k \right]}_{P(D)} f(t) \quad a_n = 1; n \geq m$$

$\Leftrightarrow \boxed{Q(D)y(t) = P(D)f(t)}$

2.4.1. Hệ thống LTI nhân quả mô tả bởi phương trình vi phân

- Giải phương trình để xác định đáp ứng: thường dùng phương pháp tích phân kinh điển: tổng của 2 đáp ứng tự do & cưỡng bức
- Đáp ứng tự do: đáp ứng bởi các tác nhân nội tại bên trong hệ thống, thường là do năng lượng tích trữ & tín hiệu vào
- Đáp ứng cưỡng bức (zero-state): đáp ứng với tín hiệu ngõ vào của hệ thống

□ Ví dụ: $1000 \frac{dv(t)}{dt} + 300v(t) = f(t) \Leftrightarrow \frac{dv(t)}{dt} + 0.3v(t) = 10^{-3}f(t)$

Với: $f(t) = 5000e^{-2t}u(t)$

- Bước 1: xác định đáp ứng cưỡng bức $v_{cb}(t) = Ke^{-2t}$ khi $t > 0$

$$-2Ke^{-2t} + 0.3Ke^{-2t} = 5e^{-2t} \Rightarrow K = -2.94 \Rightarrow v_{cb}(t) = -2.94e^{-2t}$$

2.4.1. Hệ thống LTI nhân quả mô tả bởi phương trình vi phân

- Bước 2: xác định đáp ứng tự do $v_{td}(t) \rightarrow$ giải pt thuần nhất

$$\frac{dv_{td}(t)}{dt} + 0.3v_{td}(t) = 0$$

Phương trình đặc trưng: $\lambda + 0.3 = 0 \Rightarrow \lambda = -0.3$

$$\Rightarrow v_{td}(t) = K_1 e^{-0.3t}$$

- Bước 3: xác định đáp ứng tổng

$$\Rightarrow v(t) = v_{td}(t) + v_{cb}(t) = K_1 e^{-0.3t} - 2.94e^{-2t}$$

- Điều kiện đầu: HT LTI nhân quả  HT phải ở trạng thái nghỉ

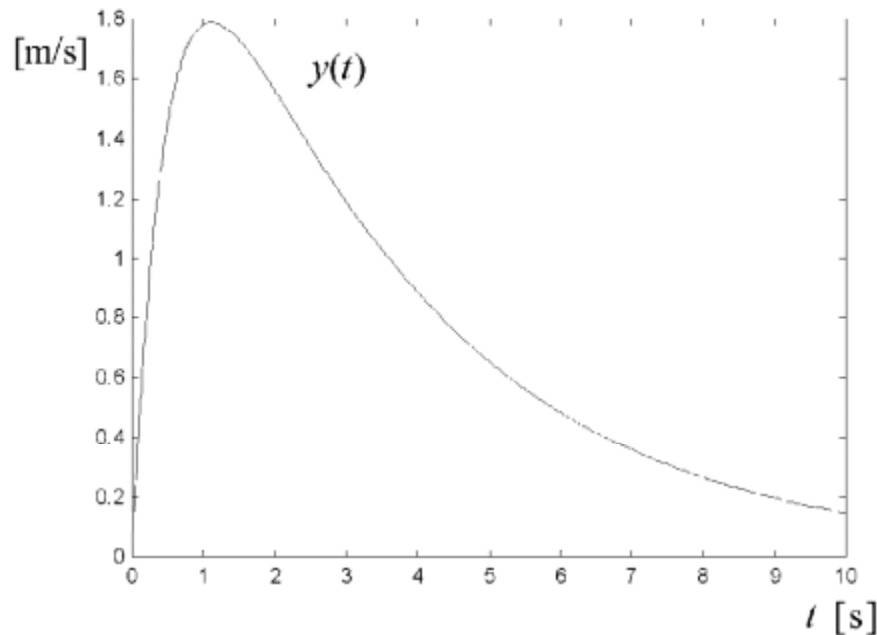
$$y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = \dots = \frac{dy^{n-1}(0)}{dt^{n-1}} = 0$$

2.4.1. Hệ thống LTI nhân quả mô tả bởi phương trình vi phân

Áp dụng cho ví dụ trước ta được $v(0)=0 \Rightarrow K_1 - 2.94 = 0$

$$\Rightarrow K_1 = 2.94 \Rightarrow v(t) = 2.94(e^{-0.3t} - e^{-2t}); t > 0$$

$$\Rightarrow v(t) = 2.94(e^{-0.3t} - e^{-2t})u(t)$$



2.4.2. Đáp ứng xung của hệ thống

- a) Phương pháp tính trực tiếp
- b) Phương pháp tính theo đáp ứng với $u(t)$

a) Phương pháp tính trực tiếp

□ Xét hệ thống LTI nhân quả mô tả bởi PTVP

$$f(t) \rightarrow \boxed{Q(D)y(t) = P(D)f(t)} \rightarrow y(t)$$

$$\Leftrightarrow f(t) \rightarrow \boxed{w(t) = P(D)f(t)} \xrightarrow{w(t)} \boxed{Q(D)y(t) = w(t)} \rightarrow y(t)$$

$$\Leftrightarrow f(t) \rightarrow \boxed{Q(D)w_1(t) = f(t)} \xrightarrow{w_1(t)} \boxed{y(t) = P(D)w_1(t)} \rightarrow y(t)$$

$$\Rightarrow \delta(t) \rightarrow \boxed{Q(D)h_a(t) = \delta(t)} \xrightarrow{h_a(t)} \boxed{h(t) = P(D)h_a(t)} \rightarrow h(t)$$

a) Phương pháp tính trực tiếp

□ Trình tự xác định $h(t)$:

- Xét phương trình $Q(D)h_a(t) = \delta(t)$ khi $t > 0$, tức $t = 0^+$ trở đi nên $h_a(t)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất $Q(D)h_a(t) = 0$ các hằng số trong $h_a(t)$ sẽ được xác định dùng điều kiện đầu tại $t = 0^+$.
- Do hệ thống ở trạng thái nghỉ nên

$$h_a(0^-) = \frac{dh_a(0^-)}{dt} = \dots = \frac{dh_a^{n-1}(0^-)}{dt^{n-1}} = 0$$

$$\text{Từ phương trình: } Q(D)h_a(t) = \delta(t) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k h_a(t)}{dt^k} = \delta(t); a_n = 1$$

Kết luận: $\frac{d^{k-1}h_a(t)}{dt^{k-1}}; k=1 \rightarrow n-1$ phải là hàm liên tục tại 0, suy ra:

$$\int_{0^-}^{0^+} \frac{d^k h_a(t)}{dt^k} dt = \frac{d^{k-1}h_a(0^+)}{dt^{k-1}} - \frac{d^{k-1}h_a(0^-)}{dt^{k-1}} = 0 \Rightarrow \frac{d^{k-1}h_a(0^+)}{dt^{k-1}} = 0$$

a) Phương pháp tính trực tiếp

Lấy tích phân từ 0^- tới 0^+ hai vế phương trình: $\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k h_a(t)}{dt^k} = \delta(t)$

$$\text{Suy ra: } \int_{0^-}^{0^+} a_n \frac{d^n h_a(t)}{dt^n} dt = 1 \Leftrightarrow \frac{d^{n-1} h_a(0^+)}{dt^{n-1}} = 1 / a_n = 1$$

Vậy điều kiện đầu để xác định $h_a(t)$ là:

$$\frac{d^{n-1} h_a(0^+)}{dt^{n-1}} = 1; \quad \frac{d^{k-1} h_a(0^+)}{dt^{k-1}} = 0, \quad k=1 \rightarrow n-1$$

- Xác định $h(t) = P(D)h_a(t)$

a) Phương pháp tính trực tiếp

- Ví dụ: tính đáp ứng xung của HT nhân quả được mô tả bởi PTVP

$$(D+2)y(t)=(3D+5)f(t)$$

- **Bước 1:** Xác định $h_a(t)$

Do HT nhân quả nên $h_a(t)=0$ khi $t<0$

Khi $t>0$: $h_a(t)$ là nghiệm của PT $(D+2)h_a(t)=0 \Rightarrow h_a(t)=Ke^{-2t}$

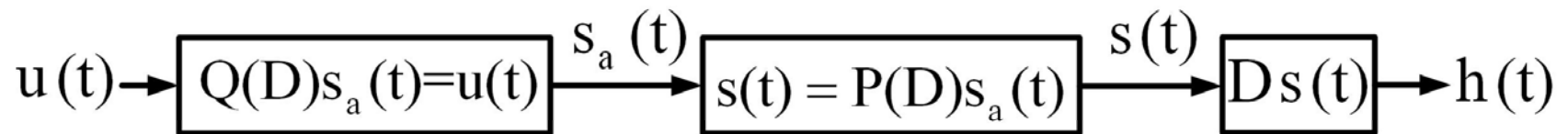
Áp dụng ĐK đầu tại 0^+ : $h_a(0^+)=K=1 \Rightarrow h_a(t)=e^{-2t}u(t)$

- **Bước 2:** Xác định $h(t)$

$$h(t)=P(D)h_a(t)=3\frac{dh_a(t)}{dt}+5h_a(t)$$

$$\Rightarrow h(t)=(3D+5)e^{-2t}u(t)=3\delta(t)-e^{-2t}u(t)$$

b) Phương pháp tính theo đáp ứng với $u(t)$



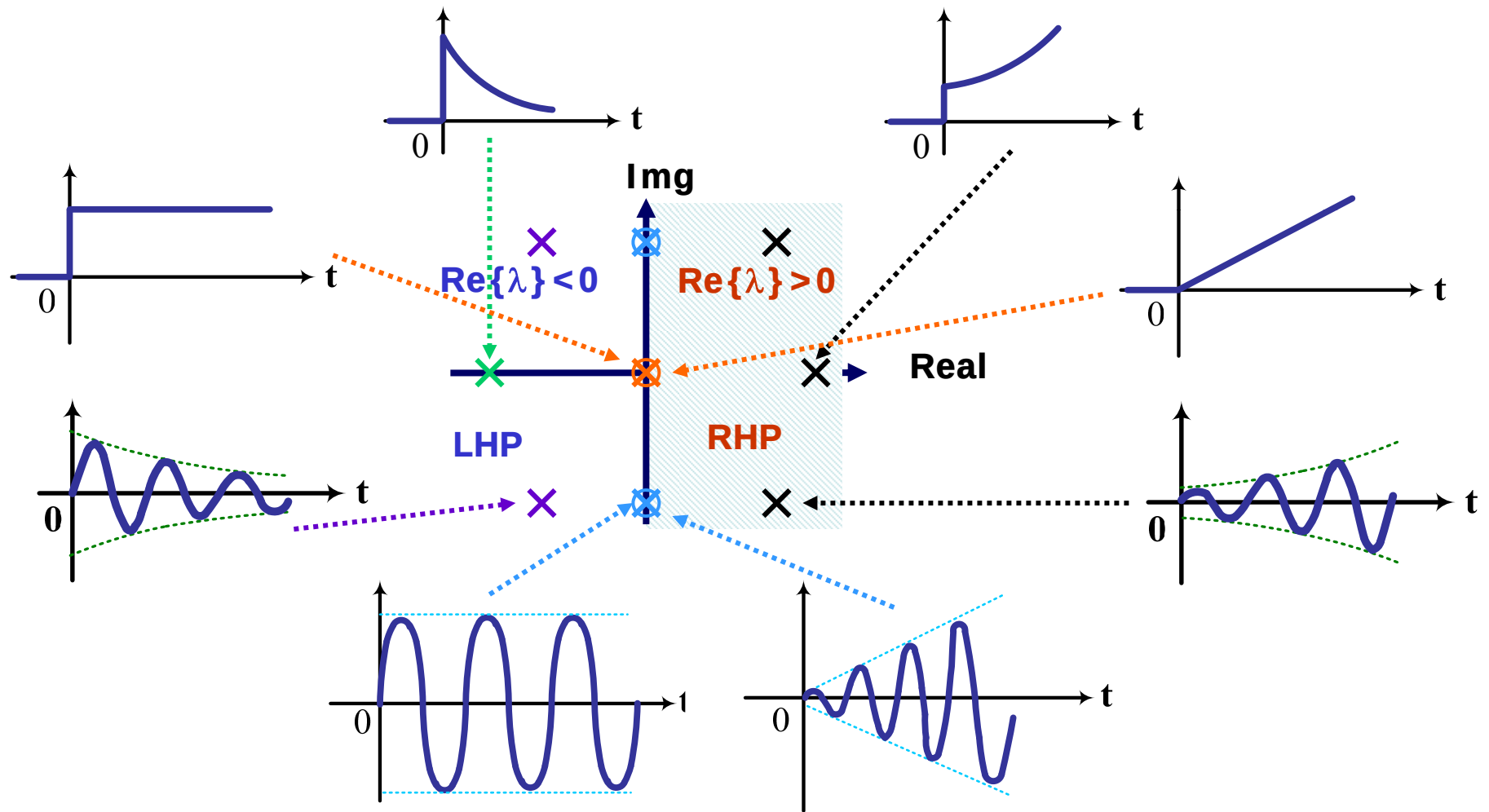
Sơ đồ hệ thống tính đáp ứng xung theo $u(t)$

Ví dụ: tính đáp ứng xung của HT được mô tả bởi PTVP:

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = Df(t)$$

2.4.3. Đa thức đặc trưng và tính ổn định của hệ thống

- Đa thức đặc trưng của hệ thống: $Q(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$
- Nghiệm của $Q(\lambda) = 0$ quyết định tính ổn định của hệ thống:



2.4.3. Đa thức đặc trưng và tính ổn định của hệ thống

□ Kết luận:

- Hệ thống ổn định tiệm cận khi tất cả các nghiệm của PT đặc trưng nằm bên trái của mặt phẳng phức
- Hệ thống ổn biên khi có nghiệm đơn trên trục ảo và các nghiệm còn lại nằm ở nửa trái của MP phức
- Hệ thống không ổn định khi có nghiệm nằm ở nửa phải hoặc nghiệm bội trên trục ảo