

Ch-3: Biểu diễn tín hiệu tuần hoàn dùng chuỗi Fourier

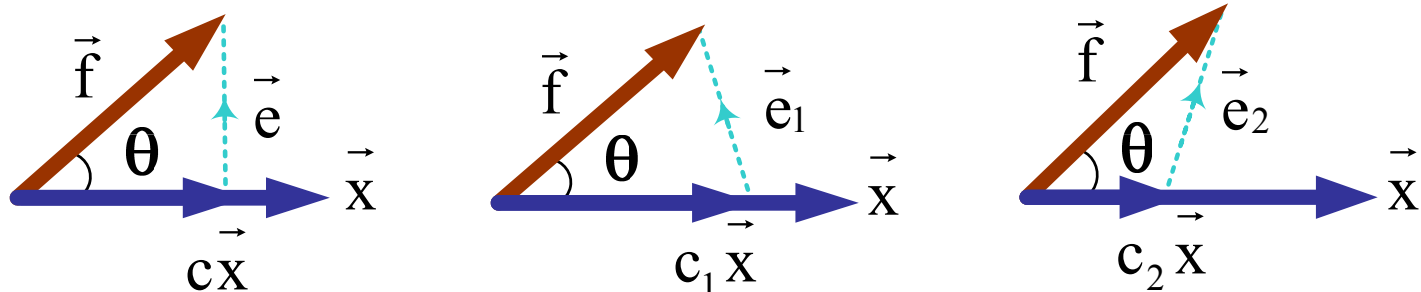
Lecture-5

3.1. Tích vô hướng và phân tích tương quan tín hiệu

3.2. Biểu diễn vectơ tín hiệu

3.1. Tích vô hướng và phân tích tương quan tín hiệu

□ Biểu diễn gần đúng vectơ:



$$\vec{f} = c\vec{x} + \vec{e} = c_1\vec{x} + \vec{e}_1 = c_2\vec{x} + \vec{e}_2 \Rightarrow \vec{e}: \min \Rightarrow \vec{f} \simeq c\vec{x} \Rightarrow c = \frac{1}{\vec{x}\vec{x}} \vec{f}\vec{x}$$

□ Biểu diễn gần đúng tín hiệu:

- Biểu diễn gần đúng $f(t)$ theo $x(t)$: $f(t) \simeq cx(t)$; $t_1 \leq t \leq t_2$

$$\Rightarrow e(t) = \begin{cases} f(t) - cx(t), & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Tìm c để sai số nhỏ nhất $\rightarrow E_e = \int_{t_1}^{t_2} |f(t) - cx(t)|^2 dt : \min$

3.1. Tích vô hướng và phân tích tương quan tín hiệu

■ Kết quả:
$$c = \frac{1}{\int_{t_1}^{t_2} x(t)x^*(t)dt} \int_{t_1}^{t_2} f(t)x^*(t)dt = \frac{1}{(x(t),x(t))} (f(t),x(t))$$

Với: $(x(t),x(t)) = \int_{t_1}^{t_2} x(t)x^*(t)dt$ và $(f(t),x(t)) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)x^*(t)dt$

□ Tích vô hướng của hai tín hiệu: $(f(t),x(t)) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)x^*(t)dt$

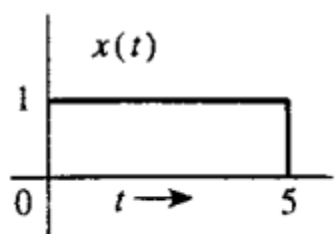
hai tín hiệu gọi là trực giao khi tích vô hướng bằng không, tích vô hướng được sử dụng rộng rãi trong phân tích và biểu diễn tín hiệu

□ Hệ số tương quan giữa hai tín hiệu:
$$C_n = \frac{1}{\sqrt{E_f E_x}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)x^*(t)dt$$

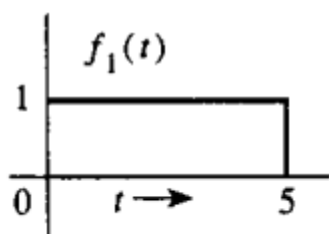
Ta có: $-1 \leq C_n \leq 1$, nếu $C_n = -1$ hai tín hiệu đối nghịch nhau, $C_n = 0$ hai tín hiệu độc lập nhau (trực giao), $C_n = 1$ hai tín hiệu đồng dạng.

3.1. Tích vô hướng và phân tích tương quan tín hiệu

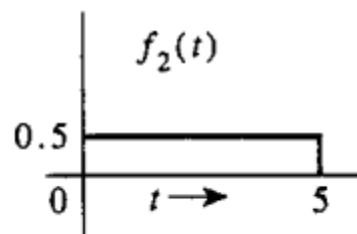
Ví dụ: tính hệ số tương quan C_n giữa $x(t)$ với các tín hiệu $f(t)$



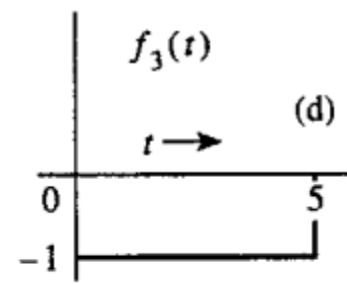
(a)



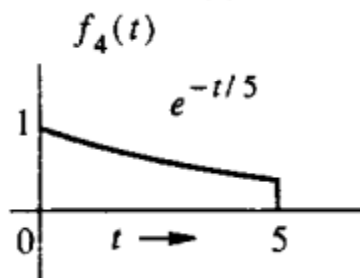
(b)



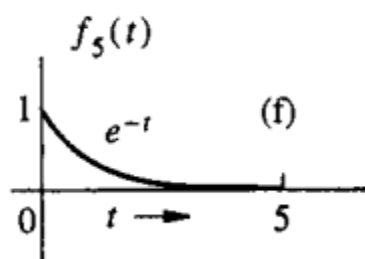
(c)



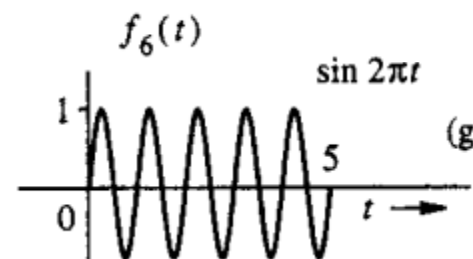
(d)



(e)



(f)



(g)

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{(5)(5)}} \int_0^5 dt = 1$$

$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt{(1.25)(5)}} \int_0^5 (0.5) dt = 1$$

$$(3) \quad \frac{1}{\sqrt{(5)(5)}} \int_0^5 (-1) dt = -1$$

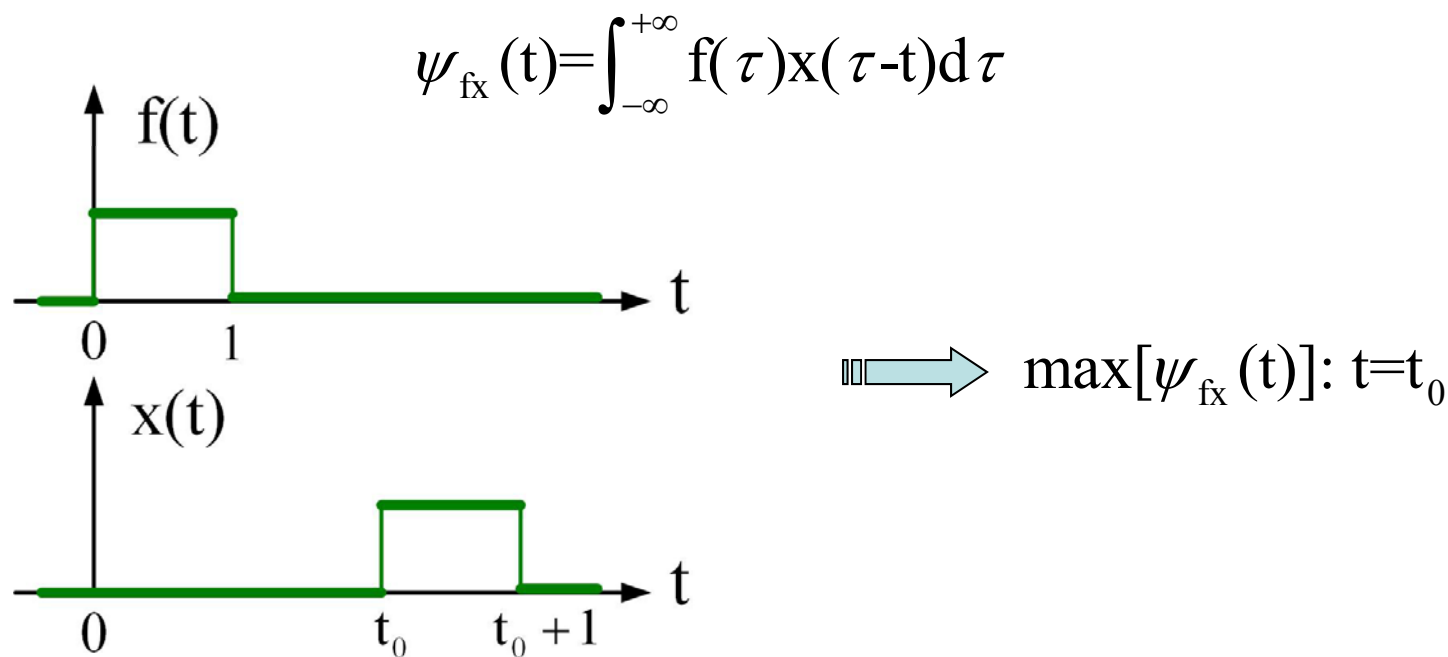
$$(4) \quad \frac{1}{\sqrt{(2.1617)(5)}} \int_0^5 e^{-t/5} dt = 0.961$$

$$(5) \quad \frac{1}{\sqrt{(0.5)(5)}} \int_0^5 e^{-t} dt = 0.628$$

$$(6) \quad \frac{1}{\sqrt{(2.5)(5)}} \int_0^5 \sin 2\pi t dt = 0 \quad \blacksquare$$

3.1. Tích vô hướng và phân tích tương quan tín hiệu

- ❑ Ứng dụng của tính tương quan giữa hai tín hiệu: xử lý tín hiệu radar, sonar, thông tin số, và nhiều ứng dụng khác
- ❑ Hàm tương quan giữa hai tín hiệu (tương quan chéo)
Thực tế tín hiệu thu luôn bị trễ đi so với tín hiệu gốc, do vậy để so sánh tương quan người ta phải dùng tới hàm tương quan cho các tín hiệu thực như sau:



3.1. Tích vô hướng và phân tích tương quan tín hiệu

- Hàm tương quan của $f(t)$ với chính nó được gọi là hàm tự tương quan:

$$\psi_f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)f(\tau-t)d\tau$$

$\psi_f(t=0)$: năng lượng tín hiệu nếu $f(t)$ là tín hiệu năng lượng

$\psi_f(t)$: liên quan mật thiết với mật phổ năng lượng của tín hiệu

- Mỗi liên hệ của hàm tương quan với tích chập:

$$\psi_{fx}(t) = f(t) * x(-t)$$

như vậy để tính hàm tương quan ta có thể tính tương tự tích chập dùng biểu thức trên

3.2. Biểu diễn vector tín hiệu

□ Không gian tín hiệu trực giao:

- $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)\}$ trực giao trong khoảng $[t_1, t_2]$ nếu:

$$(x_m(t), x_n(t)) = \int_{t_1}^{t_2} x_m(t) x_n^*(t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ E_n & m = n \end{cases}$$

- Nếu $E_n = 1$ với mọi $n \rightarrow$ không gian tín hiệu trực chuẩn

□ Biểu diễn tín hiệu trong không gian tín hiệu trực giao:

$$f(t) \simeq c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_N x_N(t) = \sum_{n=1}^N c_n x_n(t)$$

$$\Rightarrow e(t) = f(t) - \sum_{n=1}^N c_n x_n(t) : \min \Rightarrow c_n = \frac{1}{E_n} \int_{t_1}^{t_2} f(t) x_n^*(t) dt$$

$$\Rightarrow \min \{E_e\} = E_f - \sum_{n=1}^N c_n^2 E_n \Rightarrow \min \{E_e\} = 0 : N = \infty$$

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n(t); t_1 \leq t \leq t_2 \quad (\text{Dấu “=” đúng về mặt NL})$$