

Ch-3: Biểu diễn tín hiệu tuần hoàn dùng chuỗi Fourier

Lecture-6

3.3. Chuỗi Fourier và tính chất

3.4. Chuỗi Fourier và hệ thống LTI

3.3. Chuỗi Fourier và các tính chất

3.3.1. Chuỗi Fourier

3.3.2. Điều kiện tồn tại chuỗi Fourier

3.3.3. Các tính chất của chuỗi Fourier

3.3.1. Chuỗi Fourier

□ Xét tập tín hiệu: $\{e^{jn\omega_0 t}\}; n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ và $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } (e^{jn\omega_0 t}, e^{jm\omega_0 t}) &= \int_{t_1}^{t_1+T_0} e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt = \int_{t_1}^{t_1+T_0} e^{j(n-m)\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{j(n-m)\omega_0} e^{j(n-m)\omega_0 t} \Big|_{t_1}^{t_1+T_0} = \frac{1}{j(n-m)\omega_0} e^{j(n-m)\omega_0 t_1} [e^{j(n-m)\omega_0 T_0} - 1] = 0\end{aligned}$$

$$\text{Và: } (e^{jn\omega_0 t}, e^{jn\omega_0 t}) = \int_{t_1}^{t_1+T_0} e^{jn\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt = T_0 = E_n$$

Vậy tập tín hiệu trên là không gian tín hiệu trực giao.

□ Dùng kết quả phần trước ta có biểu diễn chuỗi Fourier cho $f(t)$ trong khoảng $t_1 < t < t_1 + T_0$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{với} \quad D_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

3.3.1. Chuỗi Fourier

□ Chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn:

$$\text{Ta có: } f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{với} \quad D_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

chỉ đúng trong khoảng $t_1 < t < t_1 + T_0$. Trên toàn trục thời gian:

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \Rightarrow \varphi(t+T_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 (t+T_0)} = \varphi(t)$$

Suy ra chuỗi Fourier biểu diễn cho tín hiệu tuần hoàn. Tóm lại, nếu $f(t)$ tuần hoàn với chu kỳ T_0 sẽ được biểu diễn bởi chuỗi Fourier như sau:

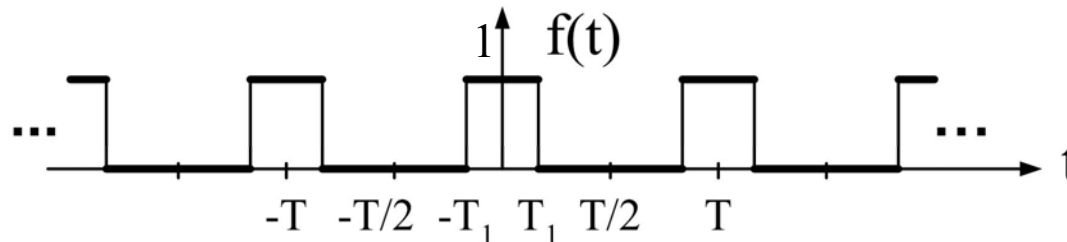
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

3.3.1. Chuỗi Fourier

□ Ví dụ: tìm chuỗi Fourier biểu diễn cho TH tuần hoàn như hình vẽ



$$D_0 = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T} = \frac{1}{3}$$

$$D_n = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{-jn\omega_0 T} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{1}{-j2n\pi} (e^{-jn\omega_0 T_1} - e^{jn\omega_0 T_1})$$

$$= \frac{1}{n\pi} \sin(n\omega_0 T_1) = \frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \frac{1}{3} \text{sinc}\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{3} \text{sinc}\left(\frac{n\pi}{3}\right) e^{jn\omega_0 t}$$

3.3.1. Chuỗi Fourier

□ Chuỗi Fourier lượng giác: trong trường hợp $f(t)$ là tín hiệu thực

$$f(t)=f^*(t) \implies f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n^* e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{-n}^* e^{jn\omega_0 t}$$

$$\implies D_n = D_{-n}^* \implies D_n^* = D_{-n}$$

chuỗi Fourier được viết lại như sau:

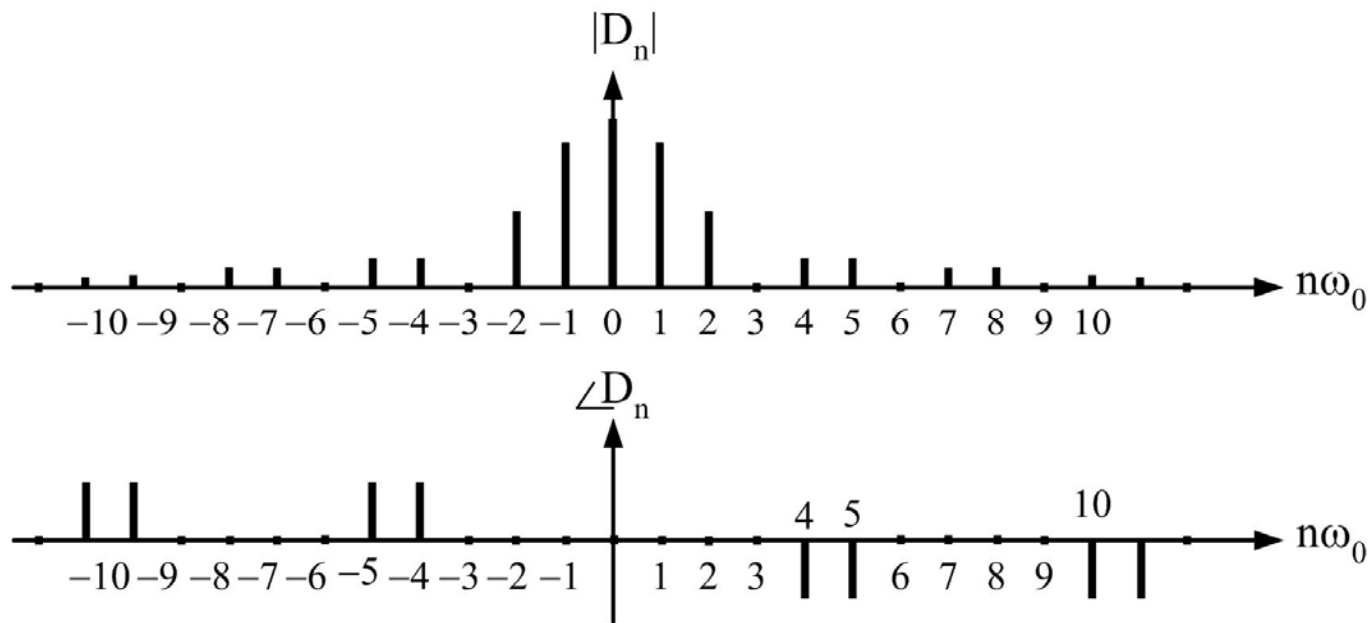
$$f(t)=D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (D_n e^{jn\omega_0 t} + D_{-n} e^{-jn\omega_0 t}) = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (D_n e^{jn\omega_0 t} + D_n^* e^{-jn\omega_0 t})$$

$$\implies \boxed{\begin{aligned} f(t) &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \\ C_0 &= D_0; \quad C_n = 2|D_n|; \quad \theta_n = \angle D_n \end{aligned}}$$

3.3.1. Chuỗi Fourier

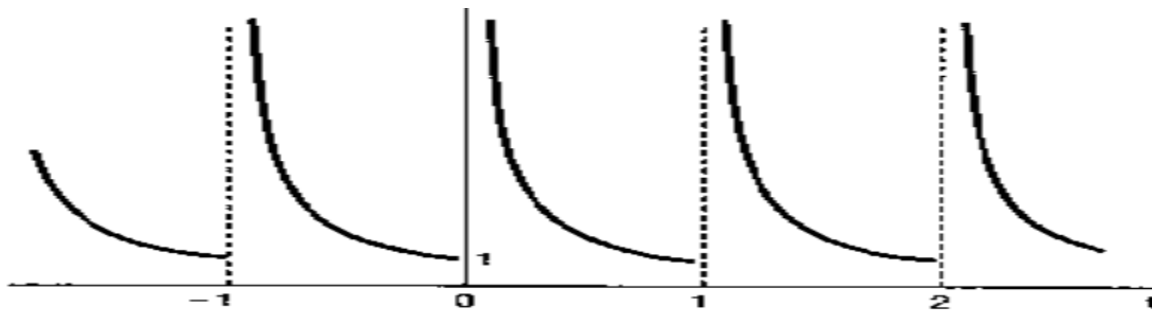
- Phổ của tín hiệu tuần hoàn: chuỗi Fourier biểu diễn tín hiệu tuần hoàn thành tổng các thành phần tần số. Phân bố giá trị của các thành phần trên thang tần số gọi là phổ tần số (thường gọi là phổ) tín hiệu. Trong trường hợp tổng quát người ta dùng phổ biên độ và phổ pha.

Xét ví dụ trước:
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{3} \text{sinc}\left(\frac{n\pi}{3}\right) e^{jn\omega_0 t}$$



3.3.2. Điều kiện tồn tại chuỗi Fourier

- Các tín hiệu tuần hoàn có năng lượng trong 1 chu kỳ hữu hạn đều có thể biểu diễn bằng chuỗi Fourier (D_n hữu hạn & năng lượng sai số bằng 0). Thực tế $f(t)$ & chuỗi Fourier sẽ không có sự phân biệt đối với các hệ thống vật lý vì chúng đáp ứng trên cơ sở năng lượng
- Điều kiện Dirichlet: chuỗi Fourier hội tụ về giá trị trung bình tại điểm gián đoạn
 - Điều kiện 1: $\int_T |f(t)| dt < \infty \implies D_n$ hữu hạn

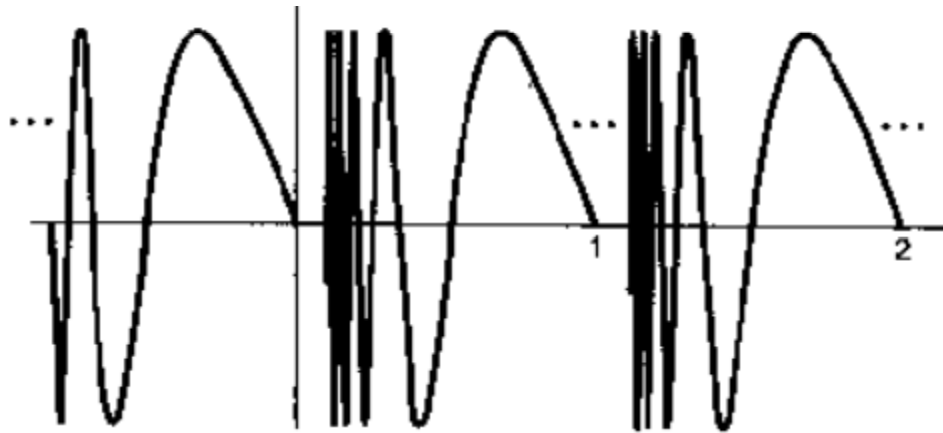


$f(t)=1/t; 0 < t \leq 1 \implies$ Không thỏa điều kiện 1

3.3.2. Điều kiện tồn tại chuỗi Fourier

- Điều kiện 2: có số cực đại và cực tiểu hữu hạn trong 1 chu kỳ

Ex: $f(t) = \sin(2\pi/t)$; $0 < t \leq 1$ $\Rightarrow$ Thỏa ĐK 1 nhưng không thỏa 2



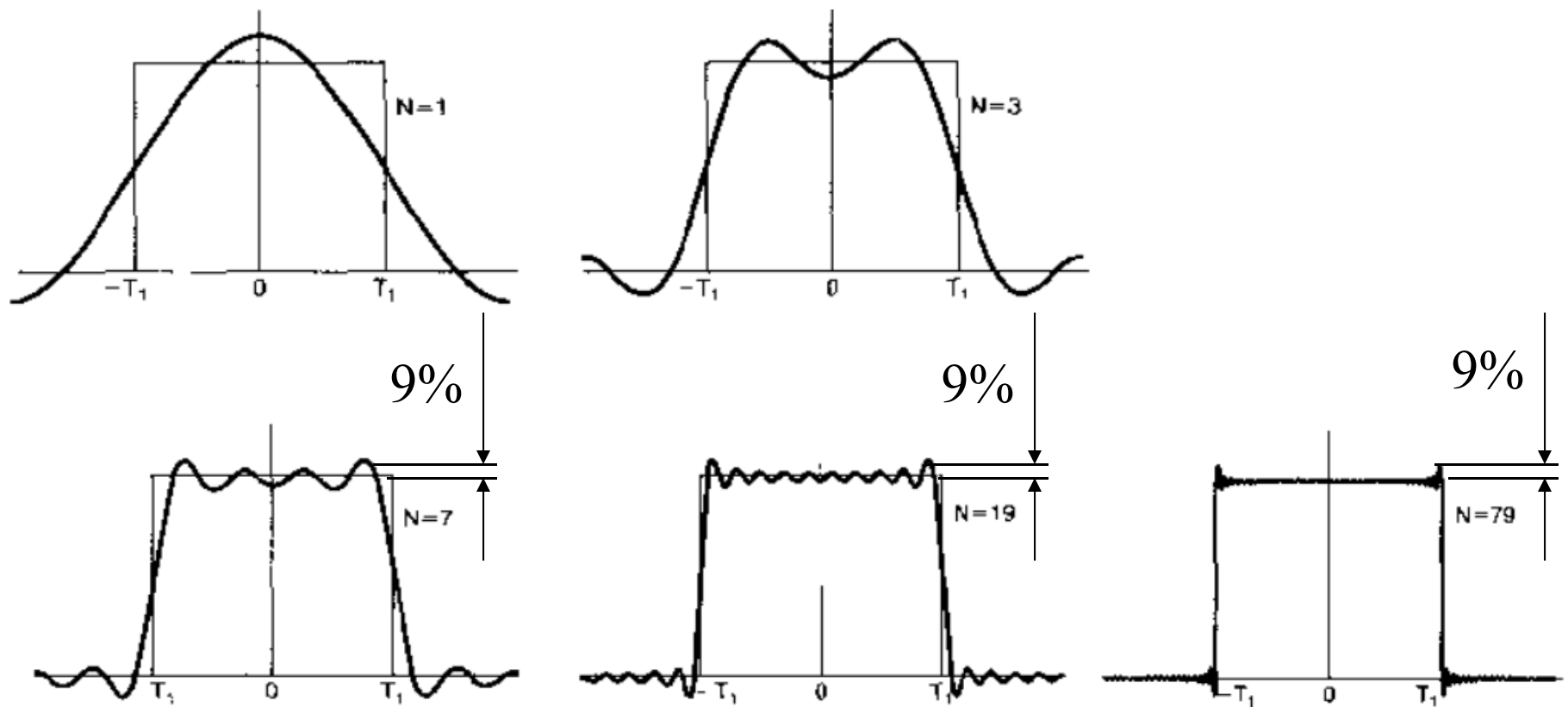
- Điều kiện 3: có số điểm gián đoạn và giá trị gián đoạn là hữu hạn trong 1 chu kỳ



$\Rightarrow$ Không thỏa ĐK 3

3.3.2. Điều kiện tồn tại chuỗi Fourier

- Hiện tượng Gibbs: *phát hiện*: nhà vật lý Michelson → *giải thích*: nhà toán học Gibbs



3.3.3. Các tính chất của chuỗi Fourier

□ Tính tuyến tính:

$$\left. \begin{array}{l} f_1(t) \leftrightarrow D_{1n} \\ f_2(t) \leftrightarrow D_{2n} \end{array} \right\} \Rightarrow f(t) = k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) \leftrightarrow D_n = k_1 D_{1n} + k_2 D_{2n}$$

□ Phép dịch thời gian:

$$f(t) \leftrightarrow D_n \Rightarrow f(t - t_0) \leftrightarrow e^{-jn\omega_0 t_0} D_n$$

□ Phép đảo thời gian:

$$f(t) \leftrightarrow D_n \Rightarrow f(-t) \leftrightarrow D_{-n}$$

□ Phép tỷ lệ thời gian:

$$f(t) \leftrightarrow D_n \Rightarrow f(at) \leftrightarrow D_n; f(at) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jna\omega_0 t}$$

3.3.3. Các tính chất của chuỗi Fourier

□ Nhân 2 tín hiệu:

$$\left. \begin{array}{l} f_1(t) \leftrightarrow D_{1n} \\ f_2(t) \leftrightarrow D_{2n} \end{array} \right\} \Rightarrow f(t) = f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow D_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_{1k} D_{2(n-k)}$$

□ Liên hiệp phức:

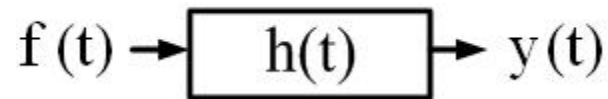
$$f(t) \leftrightarrow D_n \Rightarrow f^*(t) \leftrightarrow D_{-n}^*$$

□ Định lý Parseval :

$$P_f = \frac{1}{T} \int_T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2$$

3.4. Chuỗi Fourier và hệ thống LTI

□ Xét hệ thống LTI với đáp ứng xung là $h(t)$



và $f(t)$ là tín hiệu tuần hoàn thỏa điều kiện Dirichlet. Khi đó có thể biểu diễn $f(t)$ thành chuỗi Fourier là tổng của các thành phần TS $e^{jn\omega_0 t}$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow y(t) = f(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n [e^{jn\omega_0 t} * h(t)]$$

$$\Rightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{jn\omega_0(t-\tau)} d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau \right] e^{jn\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \quad H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

3.4. Chuỗi Fourier và hệ thống LTI

- Nhận xét về đáp ứng của hệ thống LTI với tín hiệu tuần hoàn
 - $y(t)$ cũng được biểu diễn dưới dạng chuỗi Fourier với các hệ số là $D_n H(n\omega_0) \rightarrow y(t)$ là tín hiệu tuần hoàn cùng tần số với $f(t)$
 - Các thành phần tần số khác nhau của $f(t)$ khi qua HT LTI sẽ bị thay đổi khác nhau về biên độ và pha tùy thuộc vào $H(\omega) \rightarrow$ HT LTI đóng vai trò là một bộ chọn lọc tần số; $H(\omega)$: đáp ứng tần số.
- Ví dụ: xác định chuỗi Fourier của ngõ ra HT LTI có đáp ứng xung $h(t)=e^{-2t}u(t)$ với ngõ vào $f(t)$ như ví dụ phần 3.3.1 có $T=\pi$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{3} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi}{3}\right) e^{jn\omega_0 t} \quad ; \quad H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2+j\omega}$$

$$\Rightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{6(1+jn)} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi}{3}\right) e^{j2nt}$$