

Ch-4: Biểu diễn tín hiệu dùng biến đổi Fourier

Lecture-7

- 4.1. Biểu diễn tín hiệu không tuần hoàn dùng biến đổi Fourier
- 4.2. Các tính chất của biến đổi Fourier
- 4.3. Biến đổi Fourier của tín hiệu tuần hoàn

4.1. Biểu diễn tín hiệu không tuần hoàn dùng biến đổi Fourier

4.1.1. Biến đổi Fourier

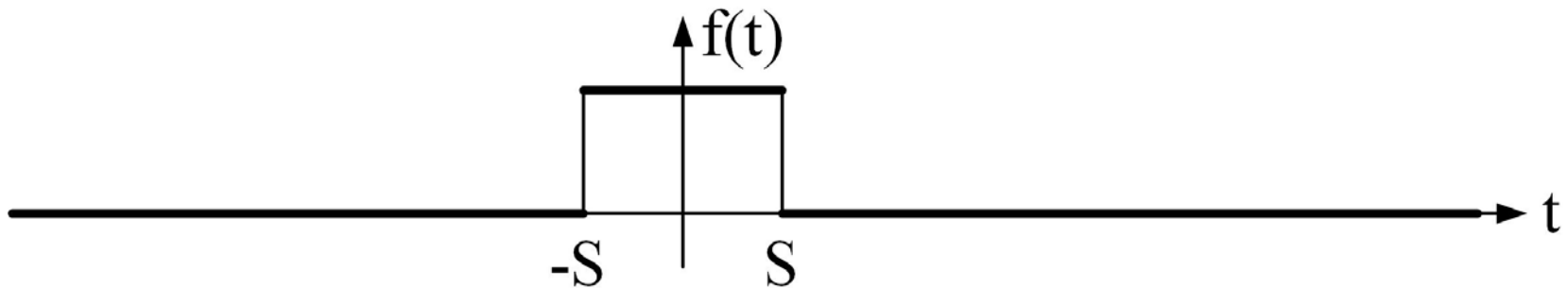
4.1.2. Điều kiện tồn tại biến đổi Fourier

4.1.3. Biến đổi Fourier của một số tín hiệu cơ bản

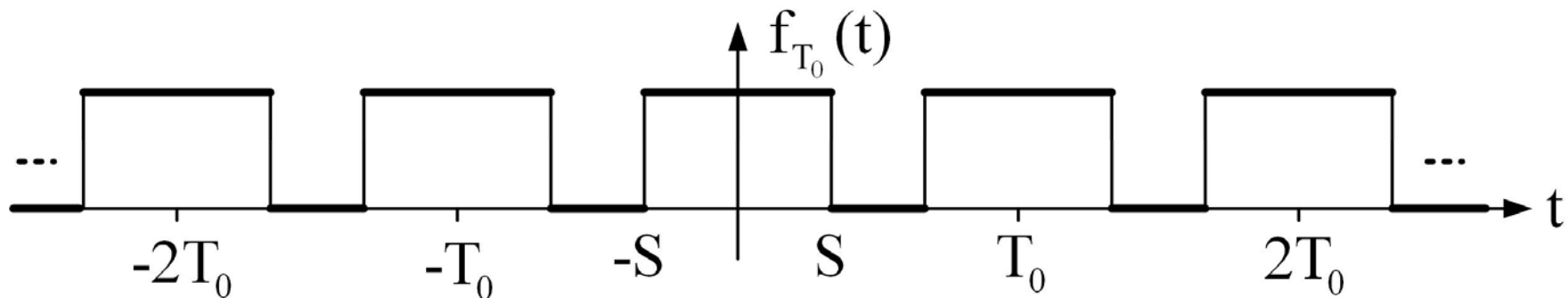
4.1.1. Biến đổi Fourier

- ❑ Tín hiệu không tuần hoàn được xem như tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ dài vô hạn

Xét $f(t)$ là tín hiệu không tuần hoàn:



và $f_{T_0}(t)$ là tín hiệu tuần hoàn được tạo thành do sự lặp lại $f(t)$ với chu kỳ T_0 .

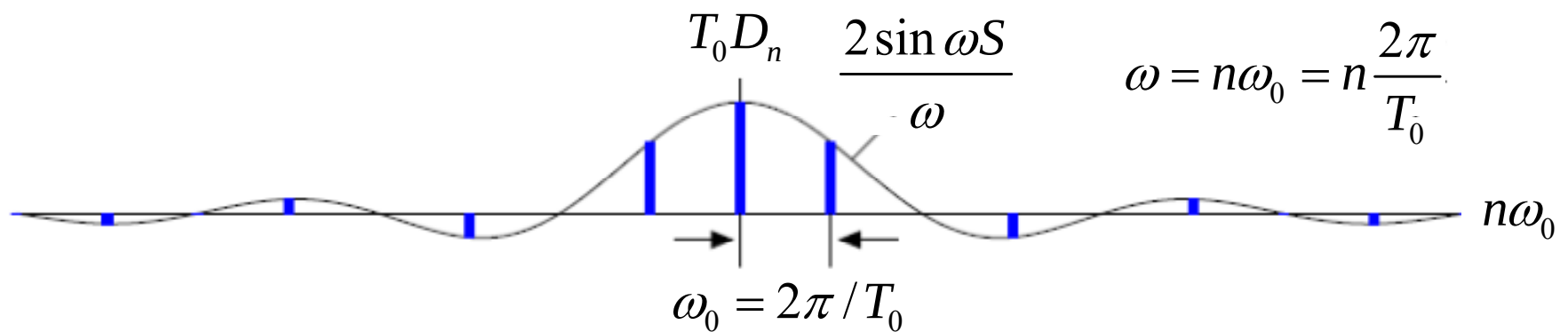


Ta có quan hệ giữa $f(t)$ và $f_{T_0}(t)$ như sau:
$$f(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} [f_{T_0}(t)]$$

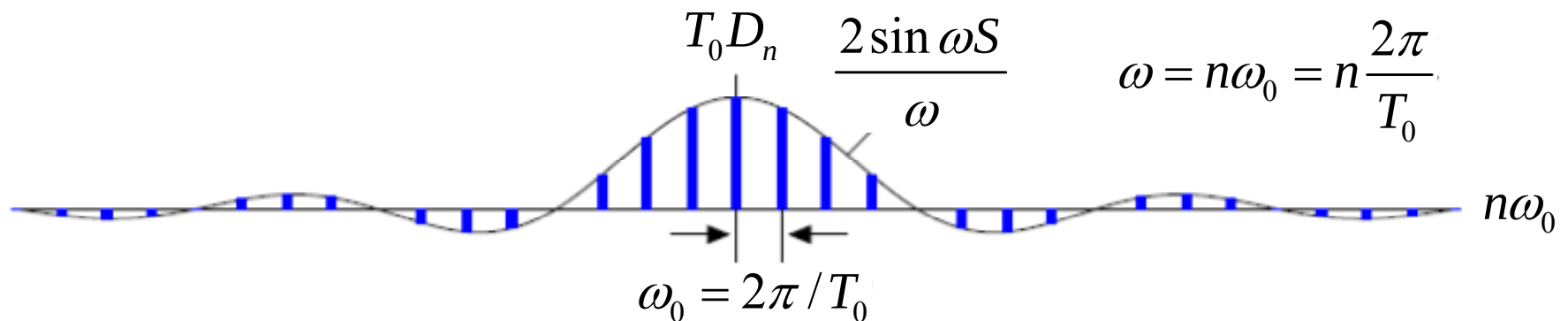
4.1.1. Biến đổi Fourier

□ Biểu diễn $f_{T_0}(t)$ dùng chuỗi Fourier

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_{T_0}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-S}^S e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{2}{T_0} \frac{\sin n\omega_0 S}{n\omega_0}$$

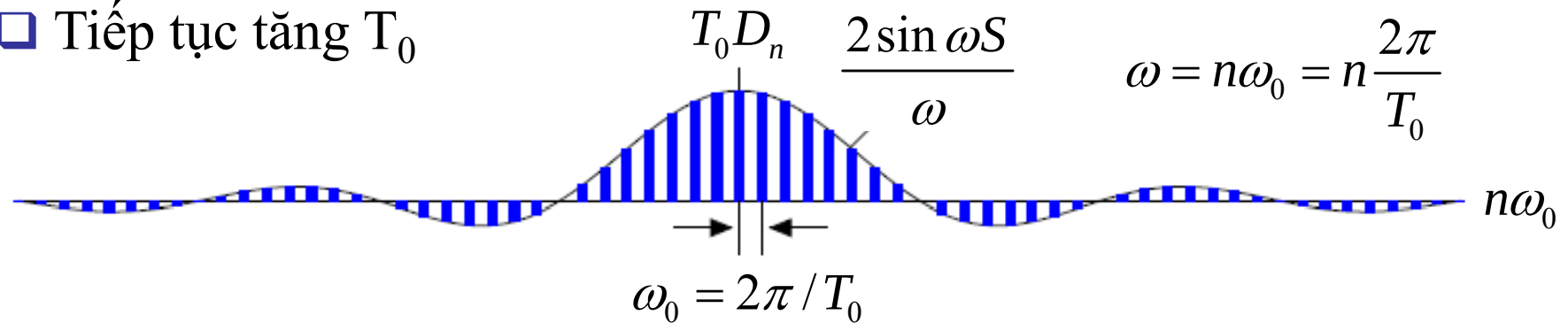


□ Gấp đôi T_0 :



4.1.1. Biến đổi Fourier

□ Tiếp tục tăng T_0



□ Khi $T_0 \rightarrow \infty$, $T_0 D_n \rightarrow$ hàm liên tục

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} [T_0 \cdot D_n] = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_{T_0}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = F(\omega)$$

□ Phổ của tín hiệu không tuần hoàn:

$$D(\omega) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} [D_n] = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{F(n\omega_0)}{T_0} = \frac{1}{2\pi} F(\omega) \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} [\Delta\omega] = 0$$

- Phổ của tín hiệu không tuần hoàn có tính chất phân bố
- Hàm mật độ phổ tín hiệu, $F(\omega)$, được xem là phổ tín hiệu

4.1.1. Biến đổi Fourier

□ Tích phân Fourier

$$f(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} f_{T_0}(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} F(n\Delta\omega) e^{jn\Delta\omega t} \Delta\omega$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

□ Tóm lại ta có kết quả: $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Phương trình phân tích – Biến đổi Fourier thuận

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Phương trình tổng hợp – Biến đổi Fourier ngược

Cho phép phân tích/tổng hợp tín hiệu $f(t)$ thành/từ các thành phần tần số, $e^{j\omega t}$

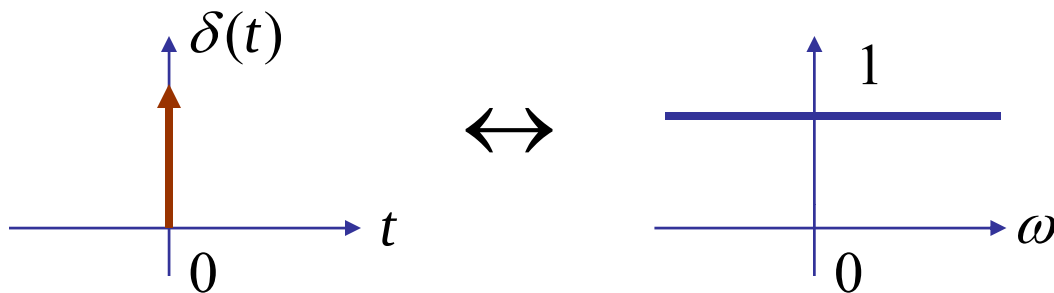
4.1.2. Điều kiện tồn tại biến đổi Fourier

- ❑ Tín hiệu $f(t)$ có năng lượng hữu hạn đều tồn tại $F(\omega)$ hữu hạn và năng lượng sai số bằng 0.
- ❑ Điều kiện Dirichlet:
 - Điều kiện 1: $\int_T |f(t)| dt < \infty$
 - Điều kiện 2: $f(t)$ có hữu hạn cực đại và cực tiểu trong khoảng thời gian hữu hạn
 - Điều kiện 3: $f(t)$ có hữu hạn số gián đoạn trong khoảng thời gian hữu hạn và gián đoạn phải có độ lớn là hữu hạn

4.1.3. Biến đổi Fourier của một số tín hiệu cơ bản

□ $f(t)=\delta(t)$:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt=\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt=1 \implies \boxed{\delta(t) \leftrightarrow 1}$$



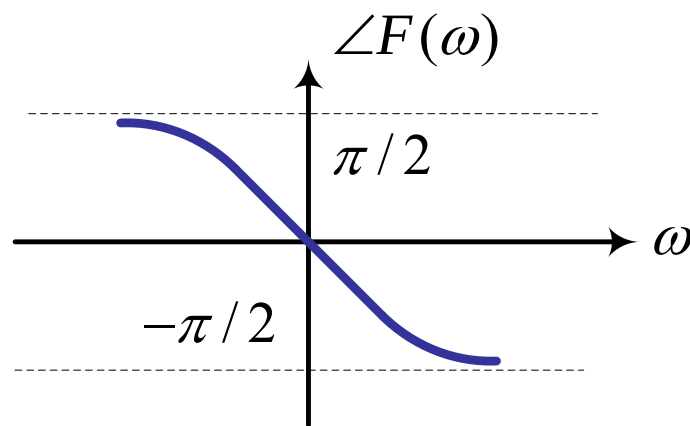
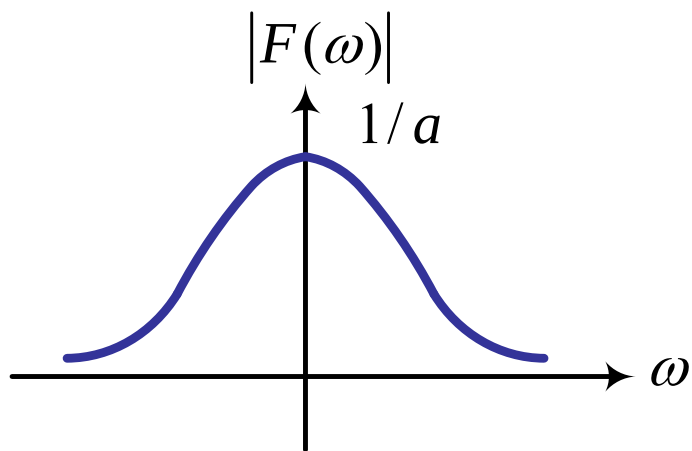
□ $f(t)=e^{-at}u(t)$; $a>0$:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t} dt=\int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt=-\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega}$$

$$\implies \boxed{e^{-at}u(t); a>0 \leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}}$$

4.1.3. Biến đổi Fourier của một số tín hiệu cơ bản

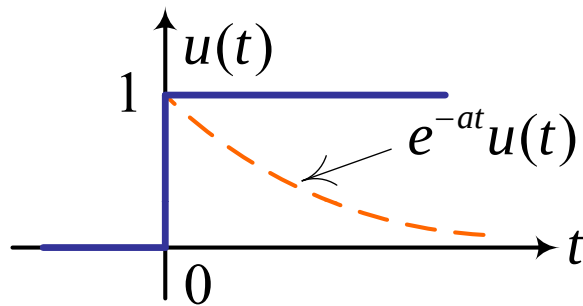
$$\Rightarrow \begin{cases} |F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \\ \angle F(\omega) = -\tan^{-1}(\omega / a) \end{cases}$$



4.1.3. Biến đổi Fourier của một số tín hiệu cơ bản

□ $f(t)=u(t)$:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_0^{+\infty} = ?$$



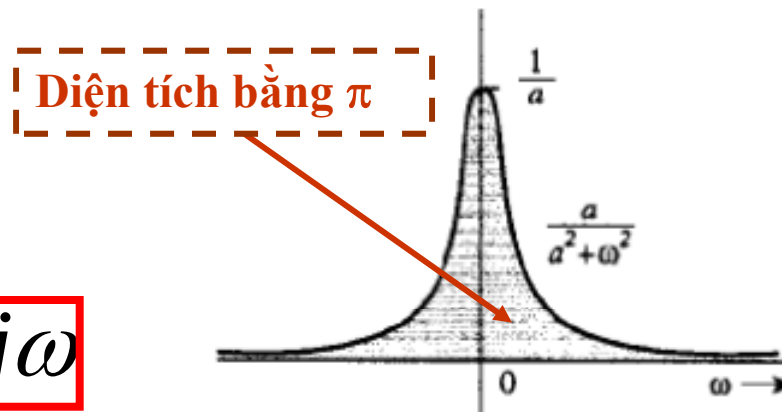
$$u(t) = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-at} u(t)$$

$$\Rightarrow F(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t) e^{-j\omega t} dt = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a + j\omega} = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{a - j\omega}{a^2 + \omega^2} \right]$$

$$\Rightarrow F(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{a^2 + \omega^2} + \frac{1}{j\omega}$$

$$\Rightarrow F(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + 1/j\omega$$



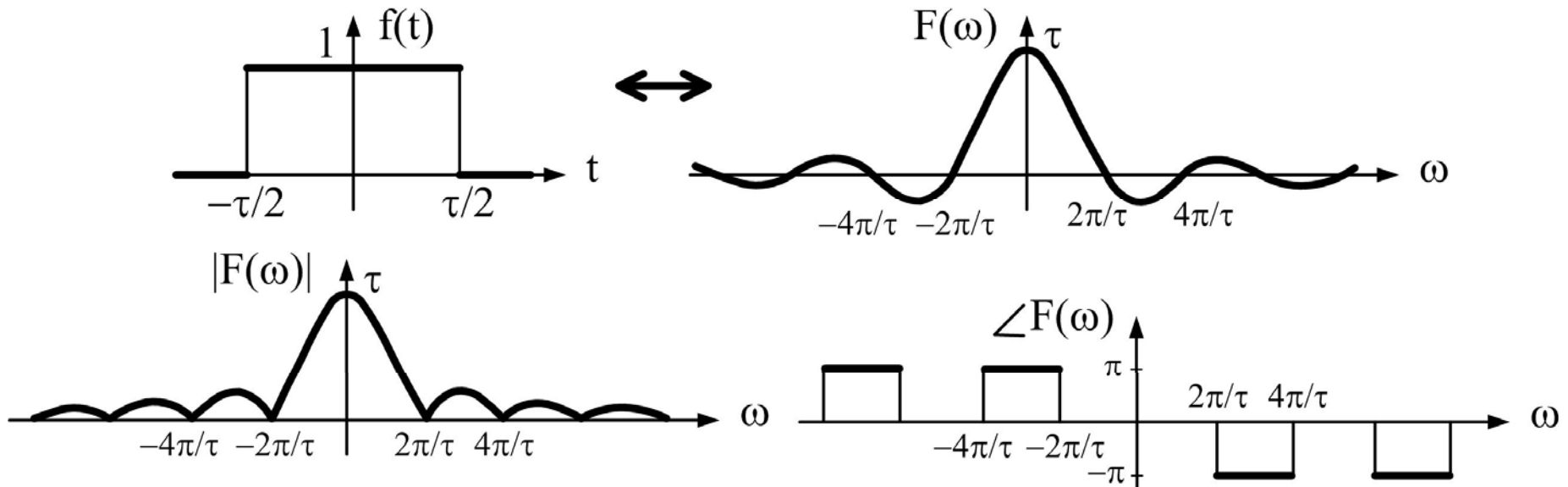
4.1.3. Biến đổi Fourier của một số tín hiệu cơ bản

□ **f(t) xung cổng đơn vị:**

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 0 & |t| > \tau/2 \\ 1 & |t| < \tau/2 \end{cases}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{j\omega}$$

$$\Leftrightarrow F(\omega) = \frac{j2 \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{j\omega} = \tau \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)} = \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}$$



4.2. Các tính chất của biến đổi Fourier

□ Tính chất tuyến tính:

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega); f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega) \Rightarrow a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$

□ Phép dịch thời gian:

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\Rightarrow f_1(t) = f(t - t_0) \leftrightarrow F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$$

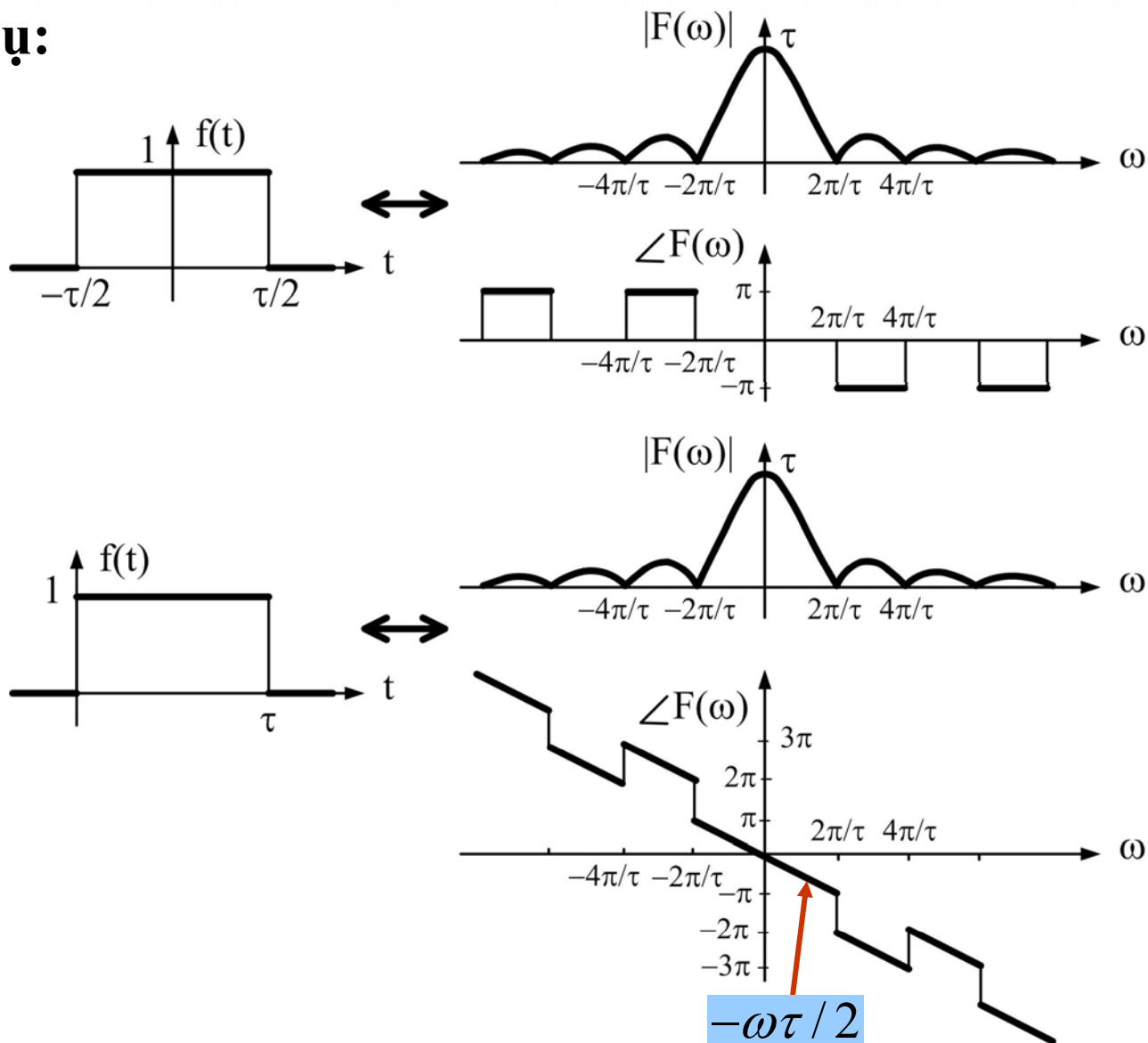
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega(\tau + t_0)} d\tau = F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

$$\Rightarrow f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

Linear phase shift

4.2. Các tính chất của biến đổi Fourier

Ví dụ:



4.2. Các tính chất của biến đổi Fourier

□ Phép dịch tần số (điều chế):

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$\Rightarrow f_1(t) = f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = F(\omega - \omega_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)}$$

$$\text{Ví dụ: } f(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0)$$

$$f(t)\sin\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{j2}F(\omega - \omega_0) - \frac{1}{j2}F(\omega + \omega_0)$$

4.2. Các tính chất của biến đổi Fourier

□ Tính đối ngẫu:

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad \Rightarrow \quad f(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-j\omega t} d\omega$$

$$\Rightarrow f(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-j\omega t} dt \quad \Rightarrow \quad 2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$\Rightarrow \boxed{F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)}$$

Ví dụ: $\delta(t) \leftrightarrow 1 \Rightarrow 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \Rightarrow \text{sinc}(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_0} \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$$

4.2. Các tính chất của biến đổi Fourier

□ Phép tỷ lệ thời gian:

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad \Rightarrow \quad f_1(t) = f(at) \leftrightarrow F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned} a > 0 : F_1(\omega) &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \\ a < 0 : F_1(\omega) &= \frac{1}{-a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{-a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

□ Phép đảo thời gian:

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad \Rightarrow \quad f(-t) \leftrightarrow F(-\omega)$$

Ví dụ: $e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega} + \frac{1}{a - j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$

4.2. Các tính chất của biến đổi Fourier

□ Tích chập trong miền thời gian:

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega); f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

$$\Rightarrow f(t) = f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) * f_2(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) F_2(\omega) e^{-j\omega \tau} d\tau \\ &= F_2(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = F_1(\omega) F_2(\omega) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega)}$$

Ví dụ: $\text{rect}\left(\frac{2t}{T}\right) \leftrightarrow \frac{T}{2} \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{4}\right)$

Có: $\text{rect}\left(\frac{2t}{T}\right) * \text{rect}\left(\frac{2t}{T}\right) = \frac{T}{2} \Delta\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow \frac{T}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{4}\right)$

$$\Rightarrow \Delta\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow \frac{T}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{4}\right)$$

4.2. Các tính chất của biến đổi Fourier

□ Tích chập trong miền tần số:

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega); f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [F_1(\omega) * F_2(\omega)] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\tau) F_2(\omega - \tau) d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\omega - \tau) e^{j\omega t} d\omega \right] d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\tau) e^{j\tau t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F_2(x) e^{jxt} dx \right] d\tau \\ &= f_2(t) \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\tau) e^{j\tau t} d\tau = 2\pi f_1(t) f_2(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{2\pi f_1(t) f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) * F_2(\omega)}$$

4.2. Các tính chất của biến đổi Fourier

□ Đạo hàm trong miền thời gian:

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\Rightarrow \frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow \frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(\omega)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)}$$

□ Đạo hàm trong miền tần số:

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \Rightarrow \frac{dF(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} -j t f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\Rightarrow t f(t) \leftrightarrow j \frac{dF(\omega)}{d\omega} \Rightarrow \boxed{t^n f(t) \leftrightarrow (j)^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}}$$

4.2. Các tính chất của biến đổi Fourier

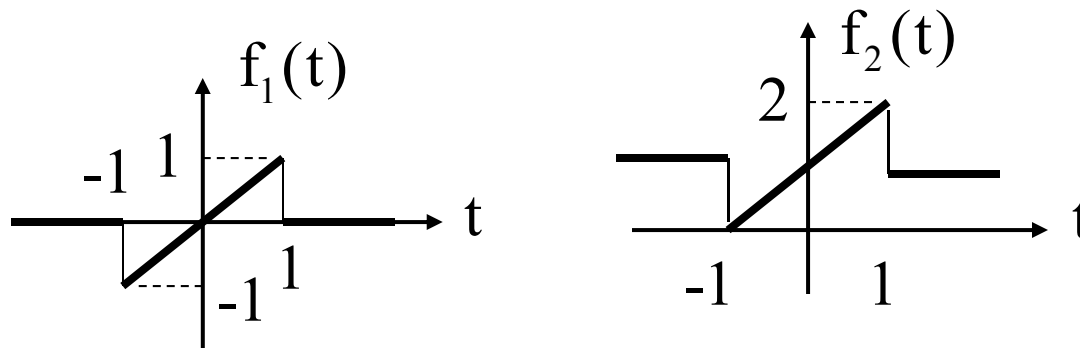
□ Tích phân trong miền thời gian:

$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow f(t) * u(t) \leftrightarrow F(\omega)[\pi\delta(\omega) + 1/j\omega] = \pi F(0)\delta(\omega) + F(\omega)/j\omega$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + F(\omega)/j\omega$$

Ví dụ: Xác định biến đổi Fourier của các tín hiệu sau:



4.2. Các tính chất của biến đổi Fourier

□ Liên hiệp phức và tính đối xứng liên hiệp phức:

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad \Rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

$$\Rightarrow f^*(t) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \right]^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega)e^{-j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(-\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

$$\Rightarrow f^*(t) \leftrightarrow F^*(-\omega) \quad \Rightarrow \quad F(-\omega) = F^*(\omega) \quad f(t): \text{Real}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |F(\omega)| : \text{even function of } \omega \\ \angle F(\omega) : \text{odd function of } \omega \end{cases}$$

4.2. Các tính chất của biến đổi Fourier

□ Định lý Parseval:

$$\begin{aligned} E_f &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right]^* dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega) F(\omega) d\omega \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad \boxed{\text{Định lý Parseval}}$$

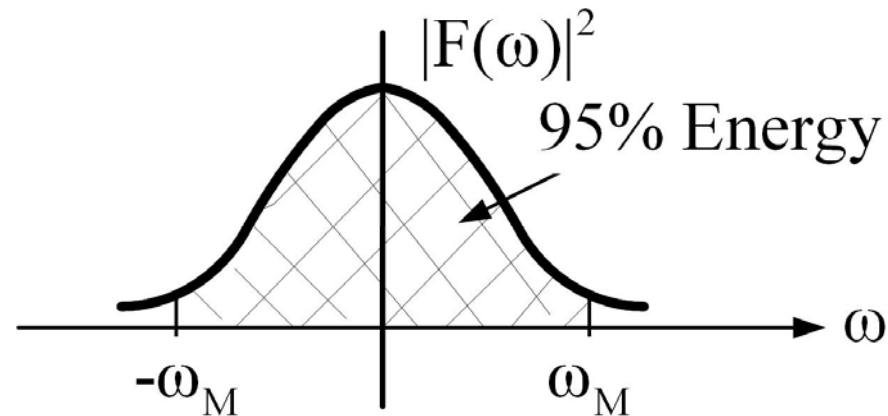
$$|F(\omega)|^2 \quad \boxed{\text{Mật độ phổ năng lượng}}$$

Ví dụ: $f(t) = \text{sinc}(t) \leftrightarrow F(\omega) = 2\pi \text{rect}(\frac{\omega}{2})$

$$\Rightarrow E_f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 4\pi^2 \text{rect}^2(\frac{\omega}{2}) d\omega = 2\pi \int_{-1}^1 d\omega = 4\pi$$

Tín hiệu vật lý là tín hiệu thực và có phổ trải dài vô hạn trên thang tần số tuy nhiên chỉ có một khoảng tần số là chứa phần năng lượng quan trọng của tín hiệu $\rightarrow$ khái niệm về băng thông tín hiệu.

4.2. Các tính chất của biến đổi Fourier



ω_M khi đó được gọi là băng thông tín hiệu

Ví dụ: Xác định băng thông của tín hiệu: $e^{-at}u(t)$; $a > 0$

$$f(t) = e^{-at}u(t) \leftrightarrow F(\omega) = 1/(a + j\omega) \quad \Rightarrow \quad E_f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{2a}$$

$$\Rightarrow 0.95E_f = \frac{0.95}{2a} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} \frac{1}{a^2 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{\pi a} \tan^{-1} \frac{\omega_M}{a}$$

$$\Rightarrow \omega_M = 12.706a \text{ (rad/s)}$$

4.3. Biến đổi Fourier của tín hiệu tuần hoàn

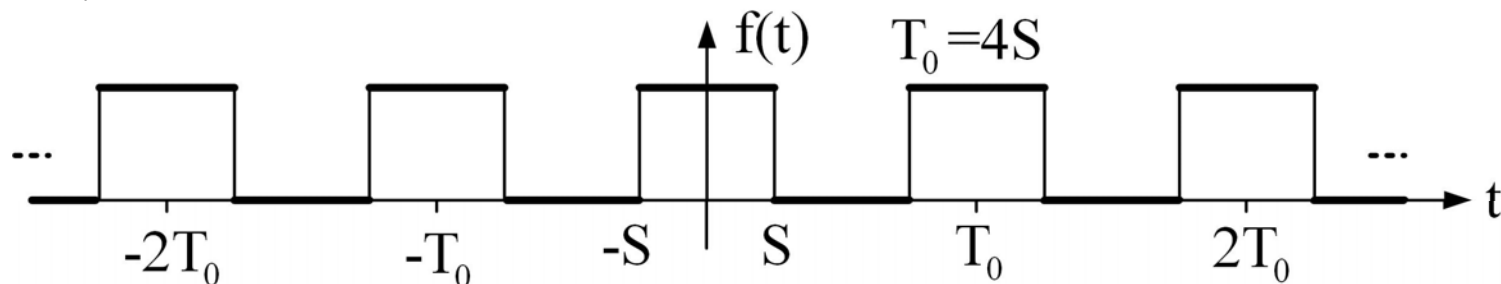
□ Biểu diễn tín hiệu tuần hoàn dùng chuỗi Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{với: } D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

□ Biến đổi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn:

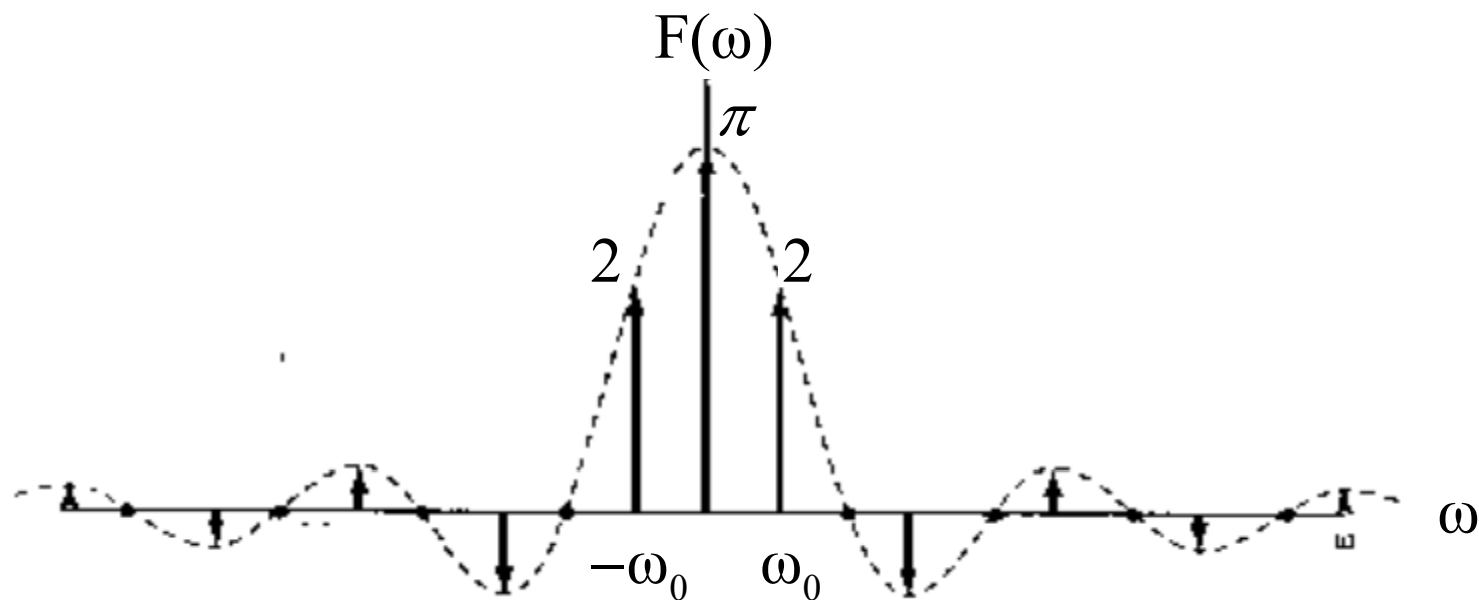
$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi D_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

□ Ví dụ 1:

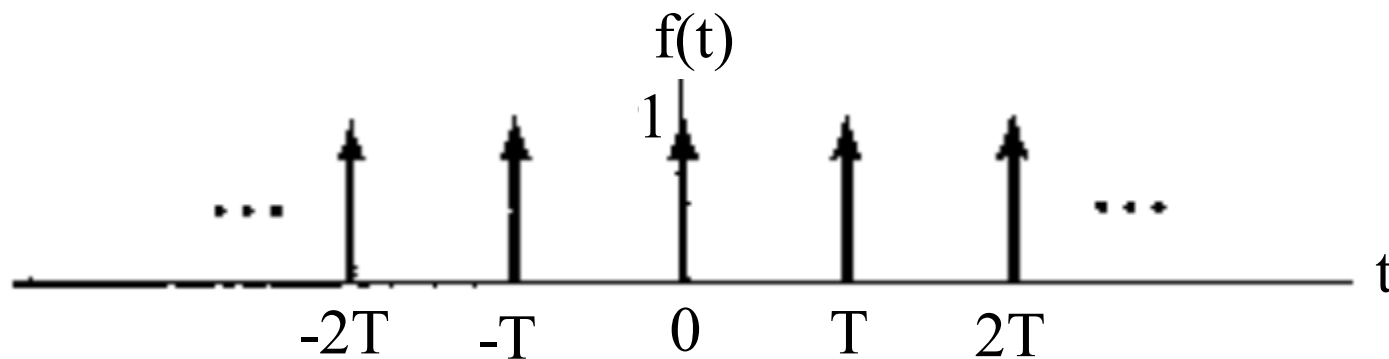


$$\Rightarrow D_n = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \pi \text{sinc}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_0)$$

4.3. Biến đổi Fourier của tín hiệu tuần hoàn



□ Ví dụ 2: xác định phổ của hàm phân bố lược $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$



4.3. Biến đổi Fourier của tín hiệu tuần hoàn

$$\Rightarrow D_n = \frac{1}{T} \Rightarrow F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T} \delta\left(\omega - \frac{2n\pi}{T}\right)$$

