

## Ch-5: Lấy mẫu (Sampling)

### Lecture-9

5.1. Lý thuyết lấy mẫu

5.2. Biến đổi Fourier rời rạc (DFT)

5.3. Biến đổi Fourier nhanh (FFT)

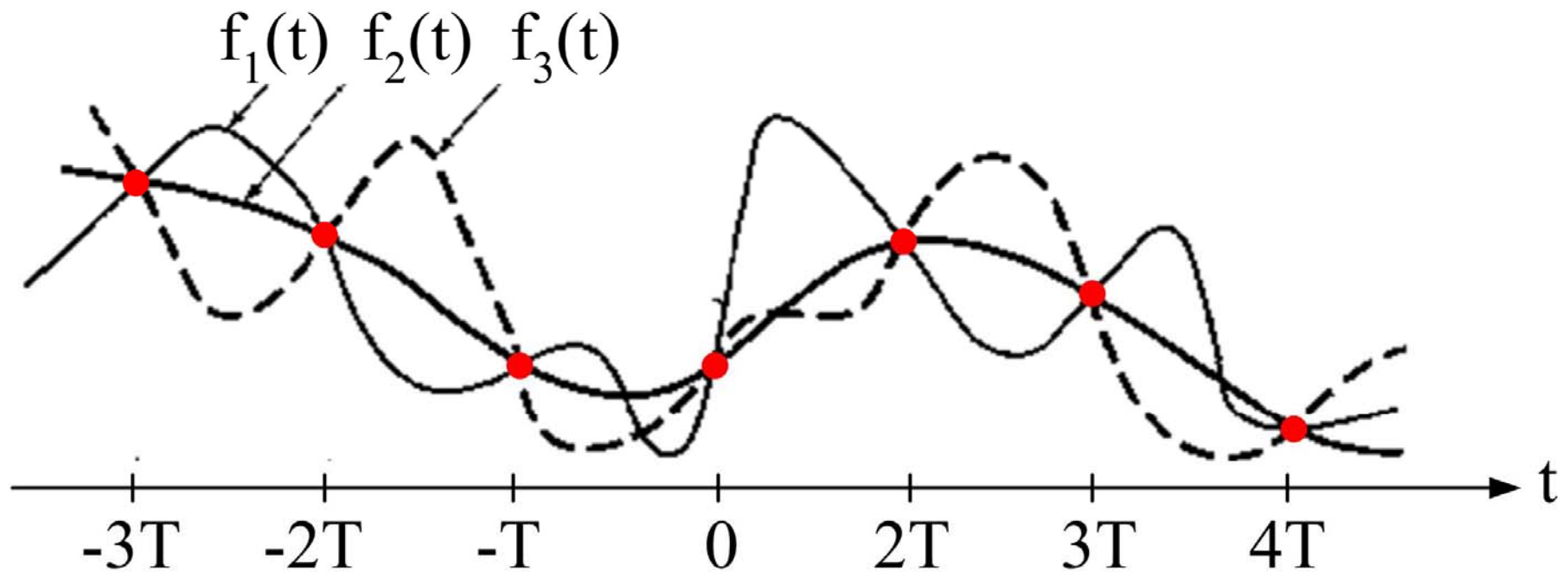
## 5.1. Lý thuyết lấy mẫu

5.1.1. Lấy mẫu trong miền thời gian

5.1.2. Lấy mẫu trong miền tần số

### 5.1.1. Lấy mẫu trong miền thời gian

- Có vô số tín hiệu có thể khôi phục từ các mẫu biết trước.



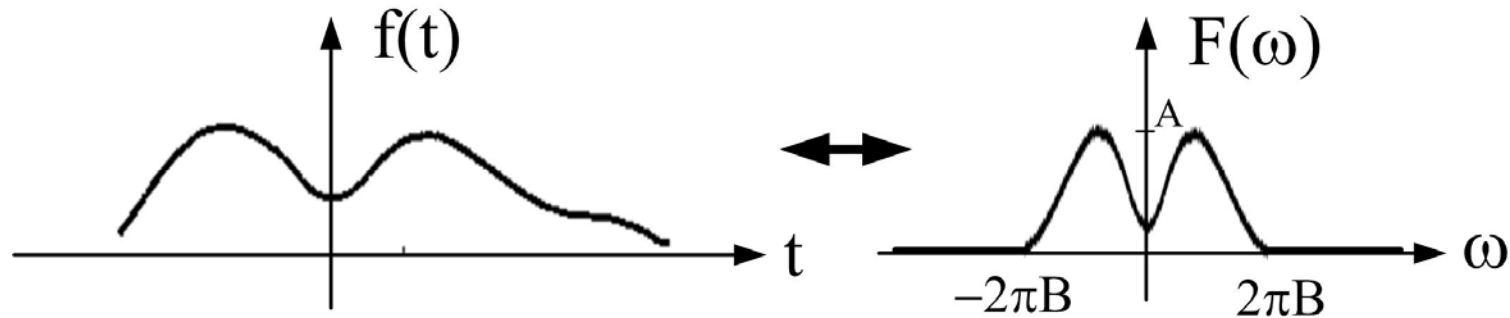
- Nếu tín hiệu có băng tần giới hạn thì có thể khôi phục lại duy nhất từ các mẫu biết trước nếu được lấy mẫu tuân theo ĐL lấy mẫu

### 5.1.1. Lấy mẫu trong miền thời gian

- a) Lấy mẫu bằng chuỗi xung đơn vị - định lý lấy mẫu
- b) Lấy mẫu bằng bộ giữ mẫu bậc không
- c) Khó khăn trong việc khôi phục tín hiệu thực tế

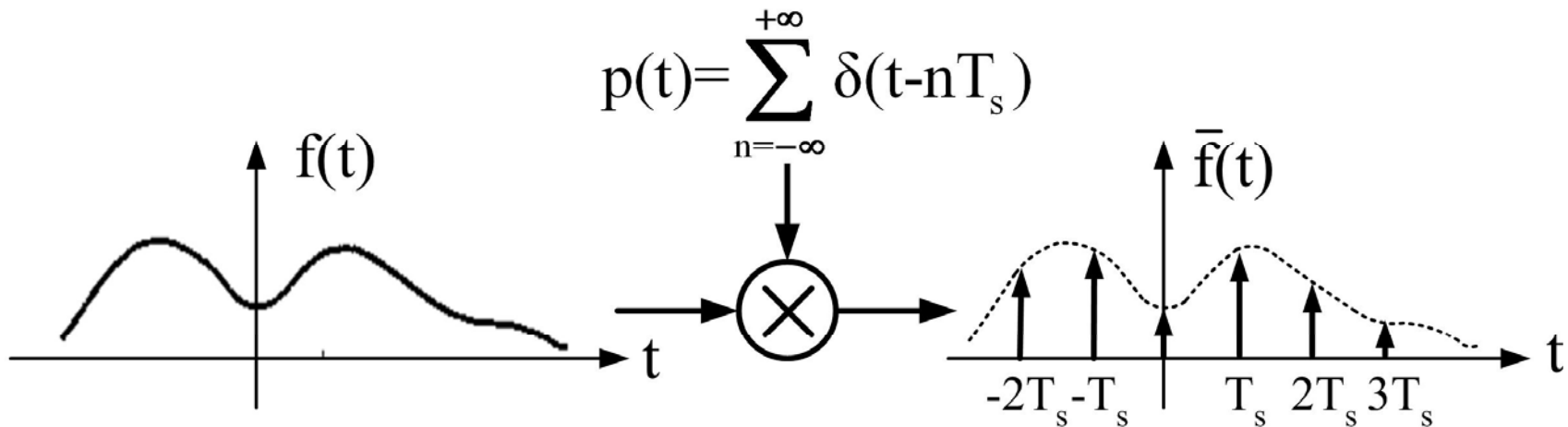
## a) Lấy mẫu bằng chuỗi xung đơn vị - định lý lấy mẫu

- ❑ Xét tín hiệu cần lấy mẫu  $f(t)$  với băng tần hữu hạn là  $B$  Hz



- ❑ Tín hiệu  $f(t)$  được lấy mẫu bằng cách nhân với chuỗi xung đơn vị

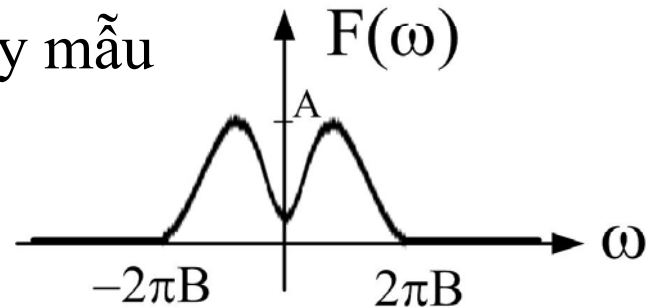
$$\bar{f}(t) = f(t)p(t) \implies \bar{f}(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \implies \bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \delta(t - nT_s)$$



## a) Lấy mẫu bằng chuỗi xung đơn vị - định lý lấy mẫu

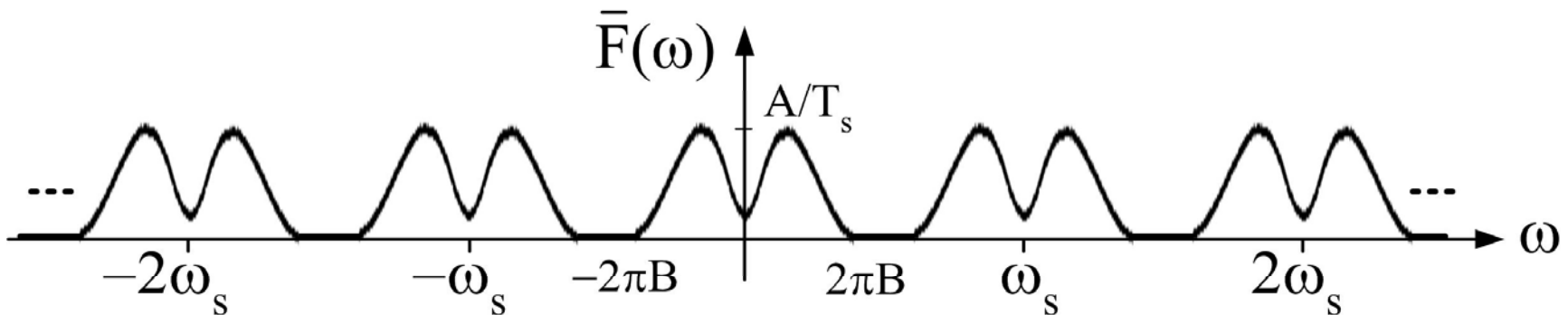
□ Phổ của tín hiệu đã được lấy mẫu

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$



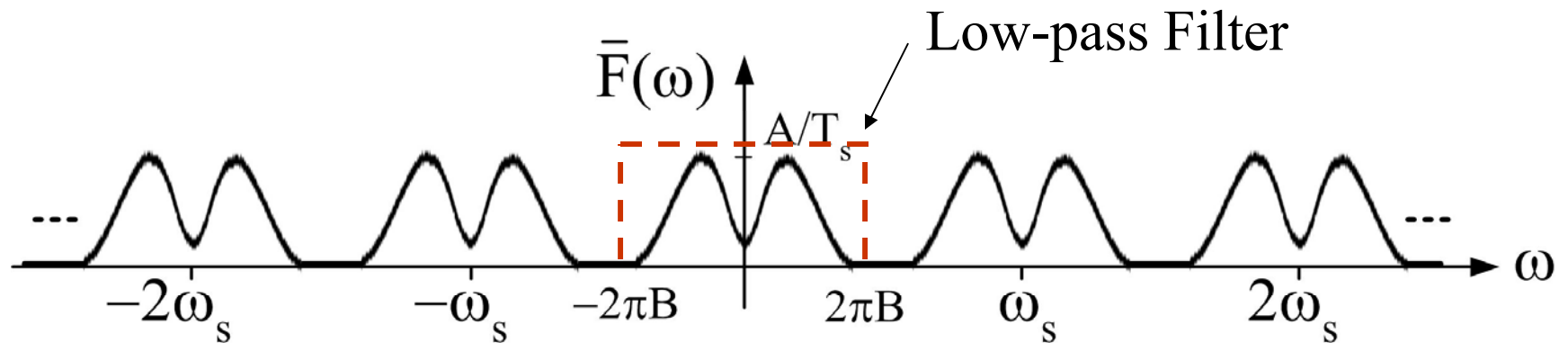
$$p(t) \leftrightarrow P(\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s); \quad F_s = 1/T_s, \quad \omega_s = 2\pi F_s$$

$$\Rightarrow \bar{f}(t) \leftrightarrow \bar{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi} [F(\omega) * P(\omega)] = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s)$$



## a) Lấy mẫu bằng chuỗi xung đơn vị - định lý lấy mẫu

□ Khôi phục tín hiệu - Định lý lấy mẫu: ĐL Nyquist, ĐL Shannon

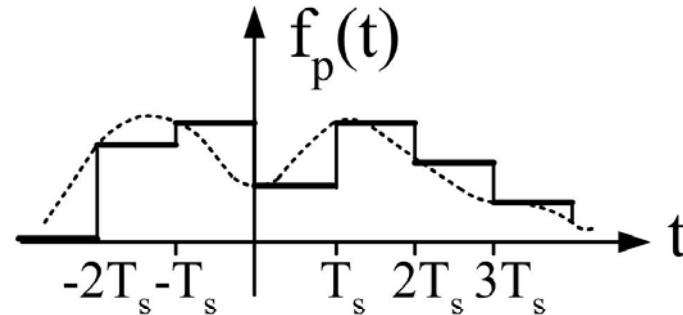
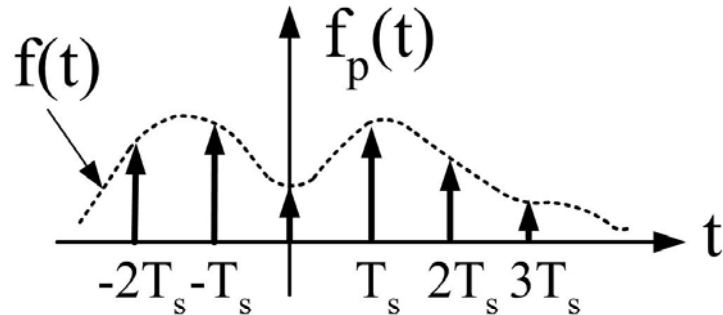
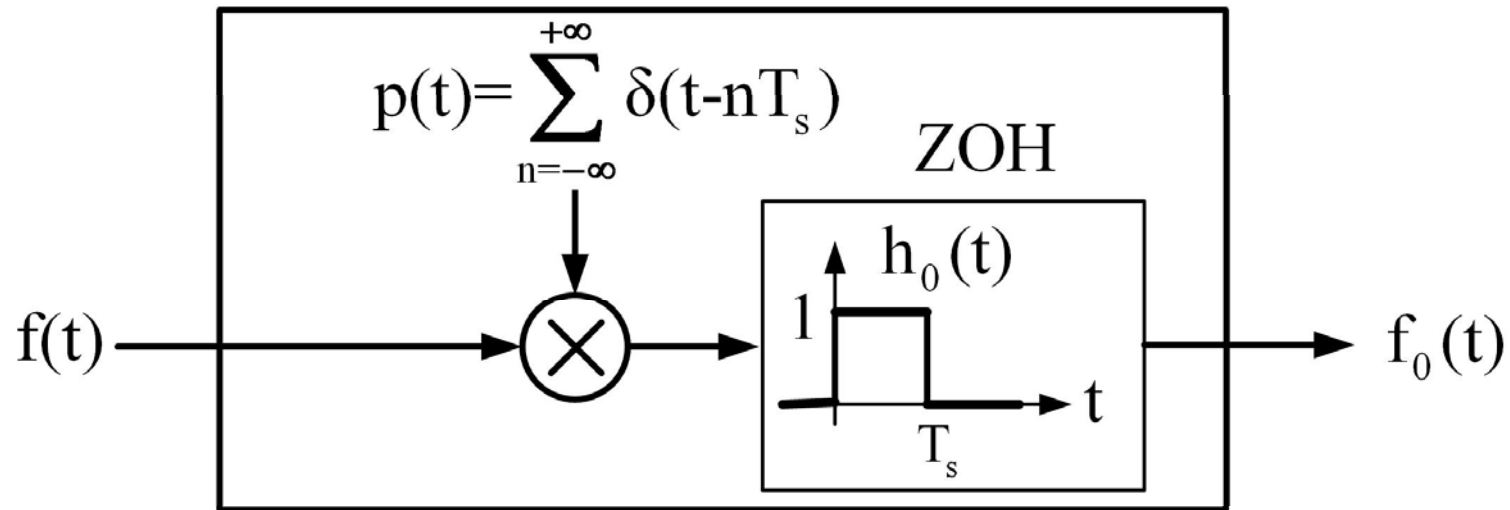


$$\Rightarrow \omega_s \geq 4\pi B \Rightarrow F_s \geq 2B; F_s = 2B \text{ Nyquist rate}$$

Tín hiệu có phổ giới hạn là  $B$  Hz có thể khôi phục chính xác từ các mẫu của nó có được khi lấy mẫu đều đặn với tốc độ  $F_s \geq 2B$  mẫu/s. Nói cách khác tần số lấy mẫu nhỏ nhất là  $F_s = 2B$  Hz

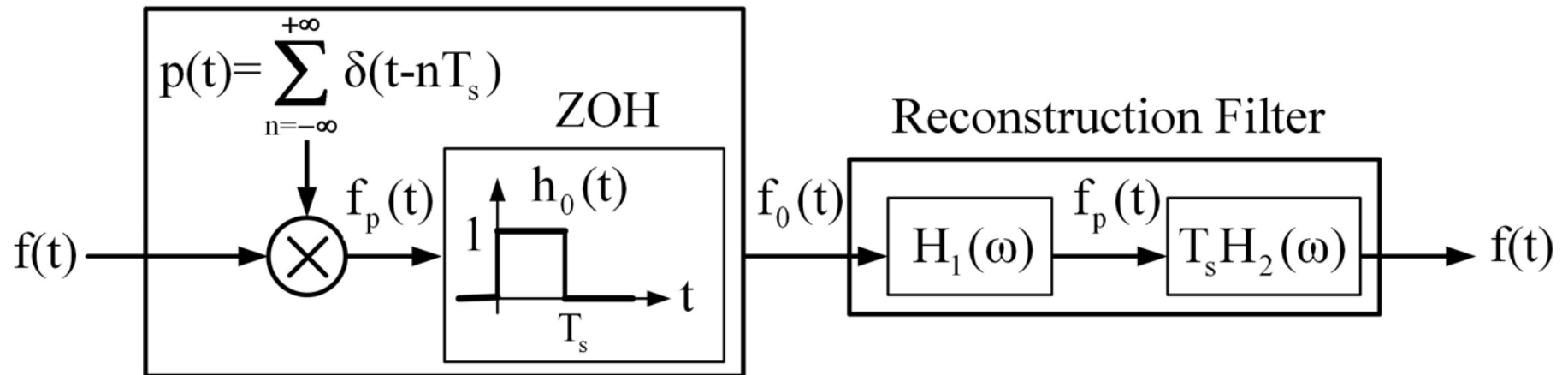
## b) Lấy mẫu với bộ giữ mẫu bậc không

- Lấy mẫu với bộ giữ mẫu bậc không

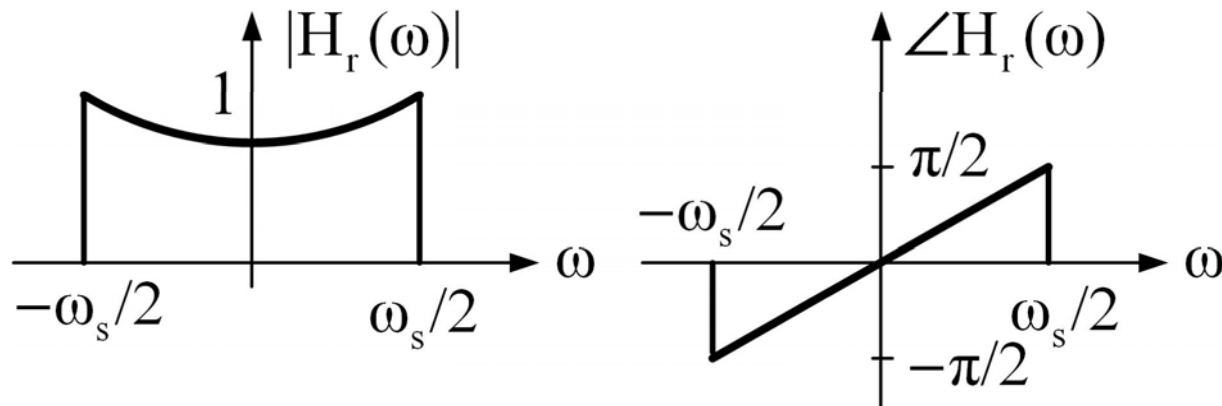


## b) Lấy mẫu với bộ giữ mẫu bậc không

- Bộ khôi phục tín hiệu cho bộ giữ mẫu bậc không

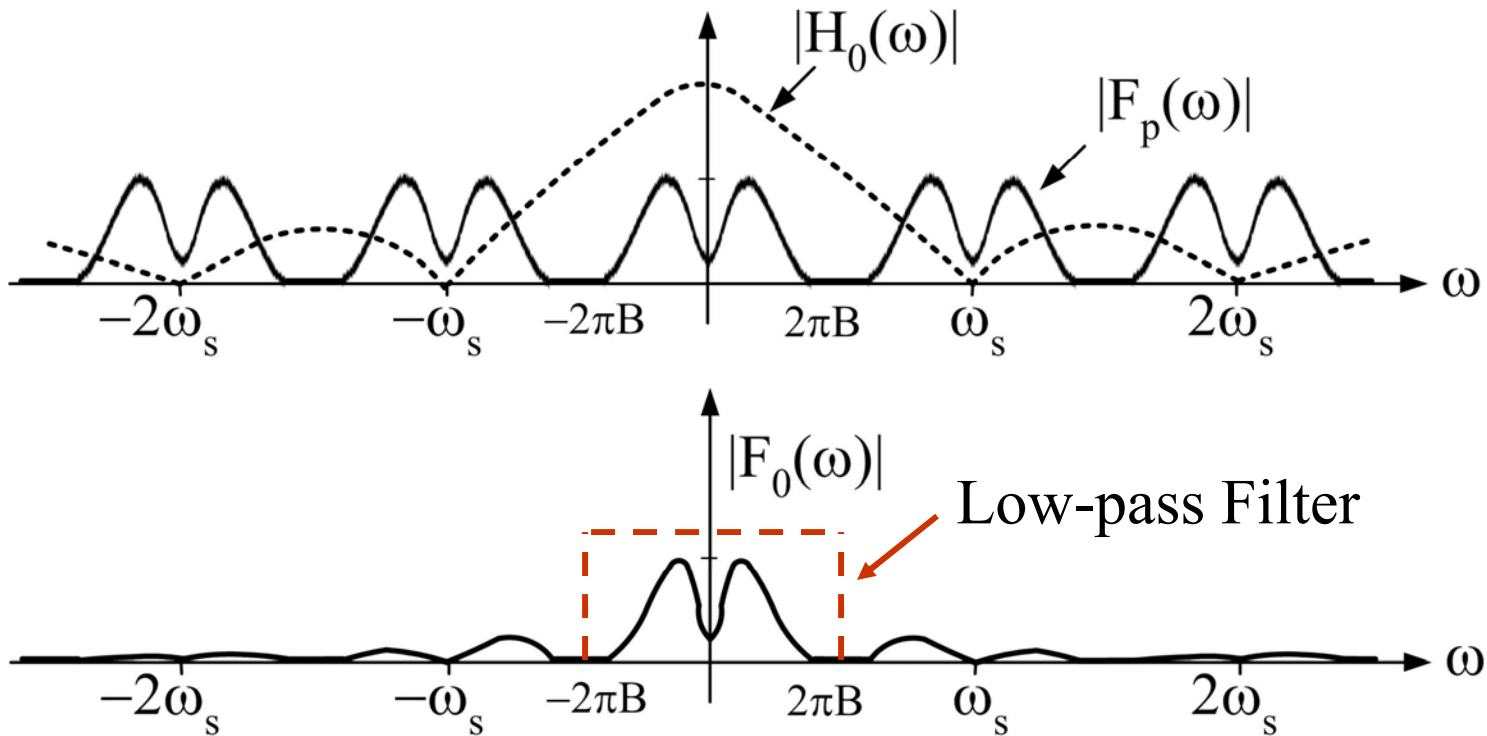


⇒  $H_r(\omega) = T_s H_1(\omega) H_2(\omega)$  ⇒ Không thực hiện được!!!



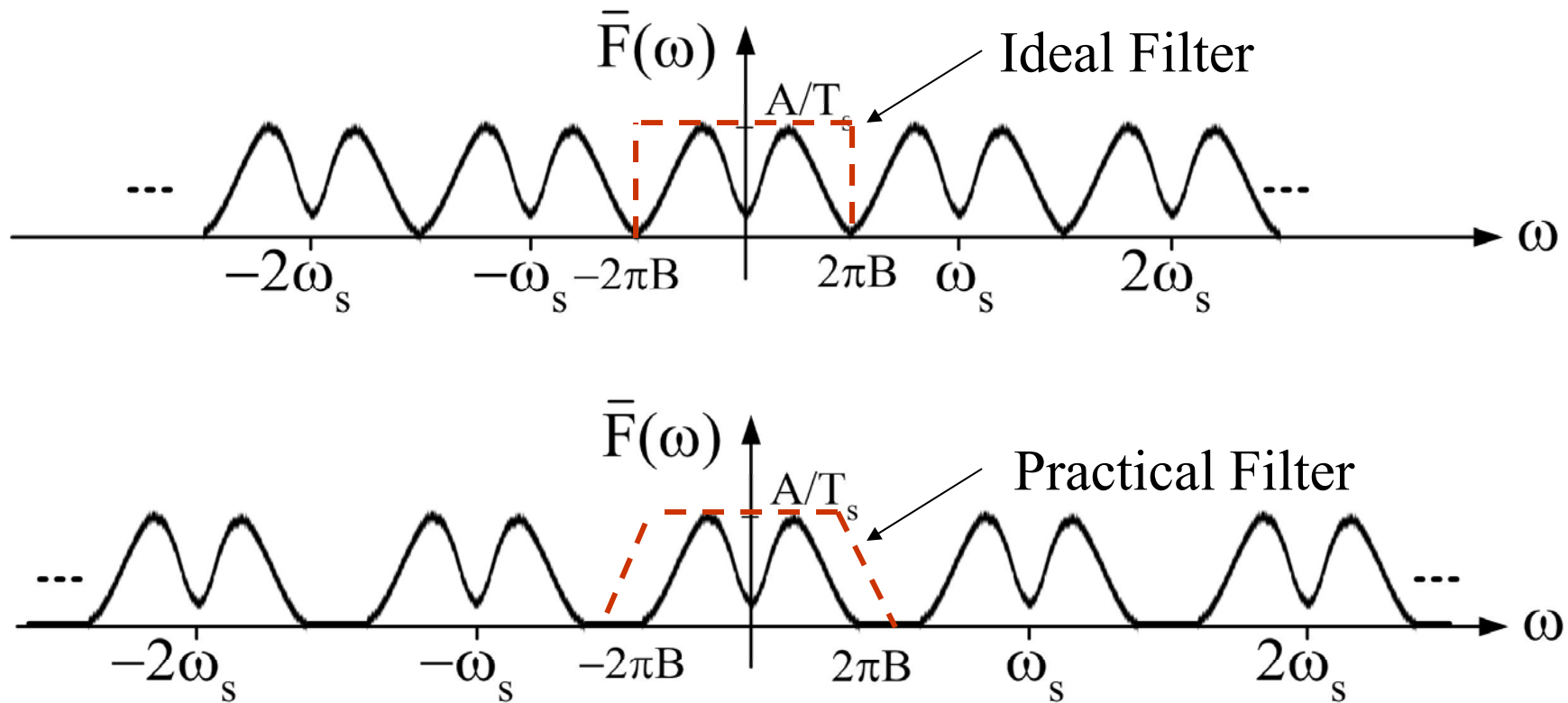
## b) Lấy mẫu với bộ giữ mẫu bậc không

- Khôi phục gần đúng cho bộ giữ mẫu bậc 0



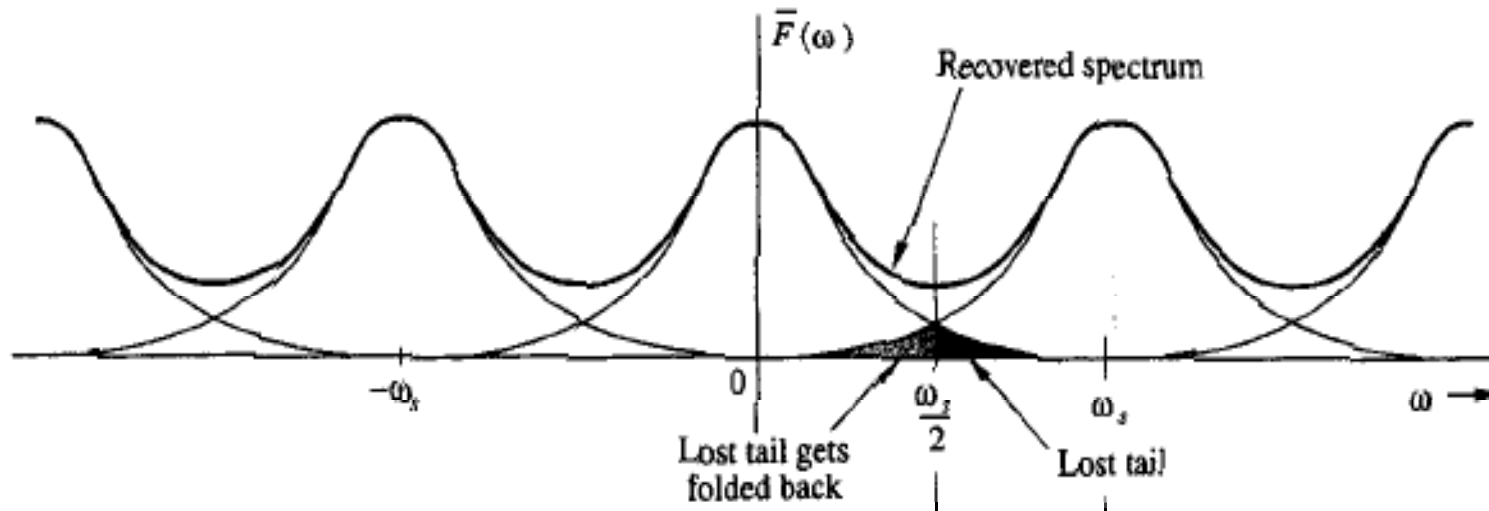
## d) Khó khăn trong việc khôi phục tín hiệu thực tế

- Giả sử tín hiệu có băng tần hữu hạn

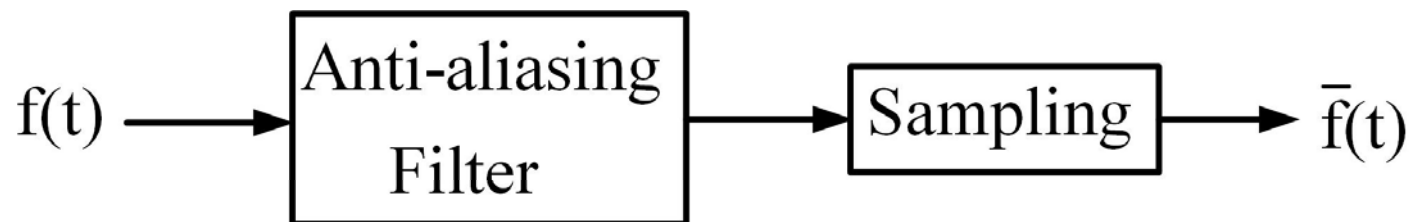


## d) Khó khăn trong việc khôi phục tín hiệu thực tế

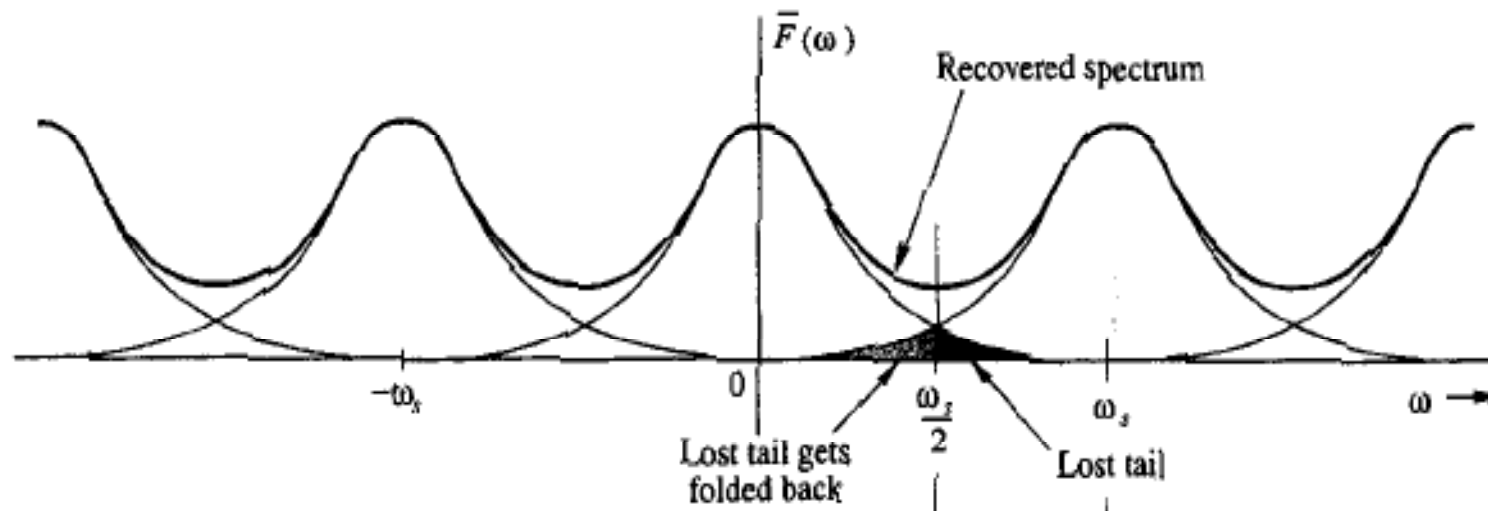
- Băng tần tín hiệu vô hạn – hiện tượng alias



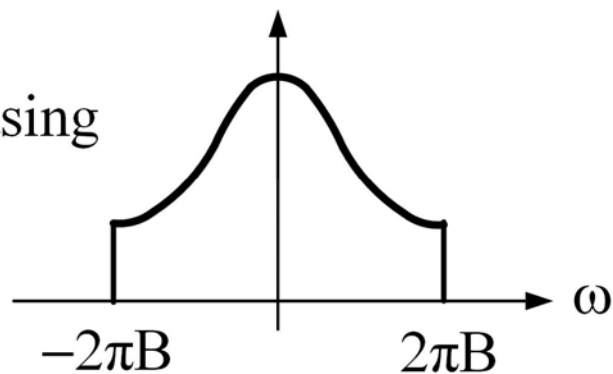
### Giải pháp: Anti-aliasing Filter



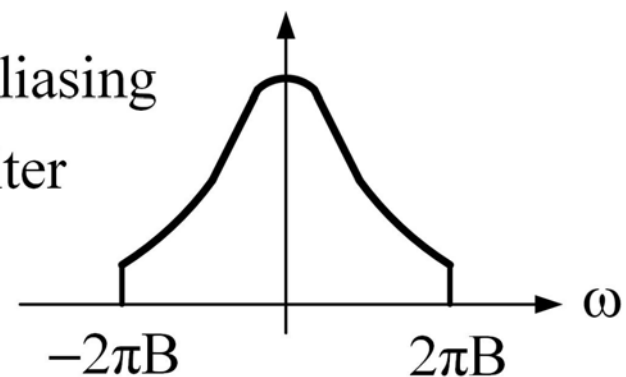
## d) Khó khăn trong việc khôi phục tín hiệu thực tế



Without  
Anti-aliasing  
Filter

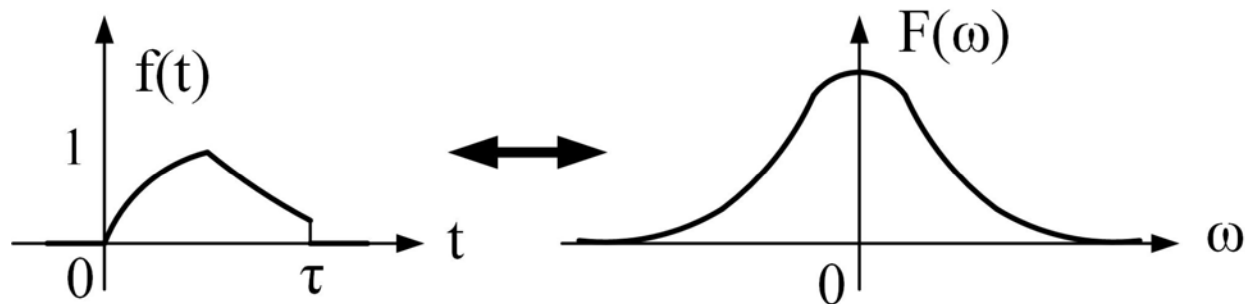


Anti-aliasing  
Filter



## 5.1.2. Lấy mẫu trong miền tần số

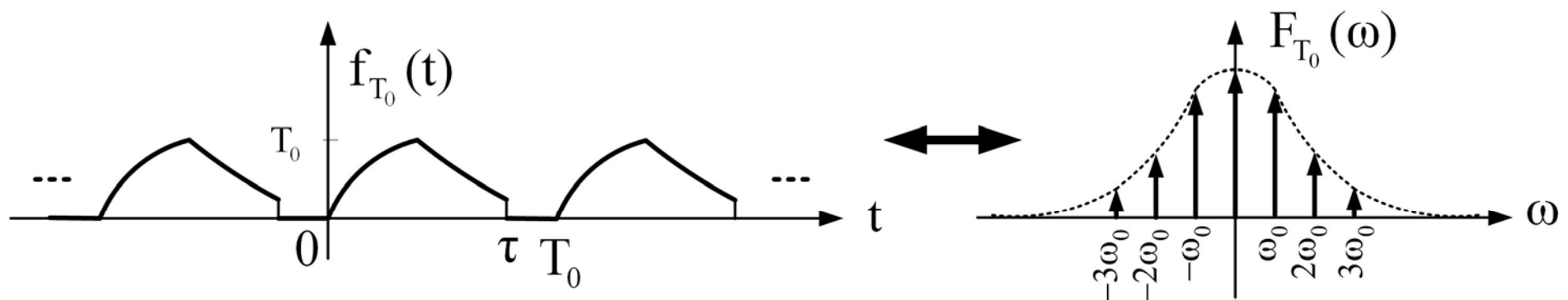
- Xét tín hiệu  $f(t)$  có thời gian hữu hạn và phổ như hình vẽ



- Lấy mẫu  $F(\omega)$  trên thang tần số với chu kỳ lấy mẫu là  $\omega_0$

$$F_{T_0}(\omega) = F(\omega) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$\Rightarrow f_{T_0}(t) = T_0 f(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0); T_0 = 2\pi/\omega_0 \Rightarrow f_{T_0}(t) = T_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - nT_0)$$

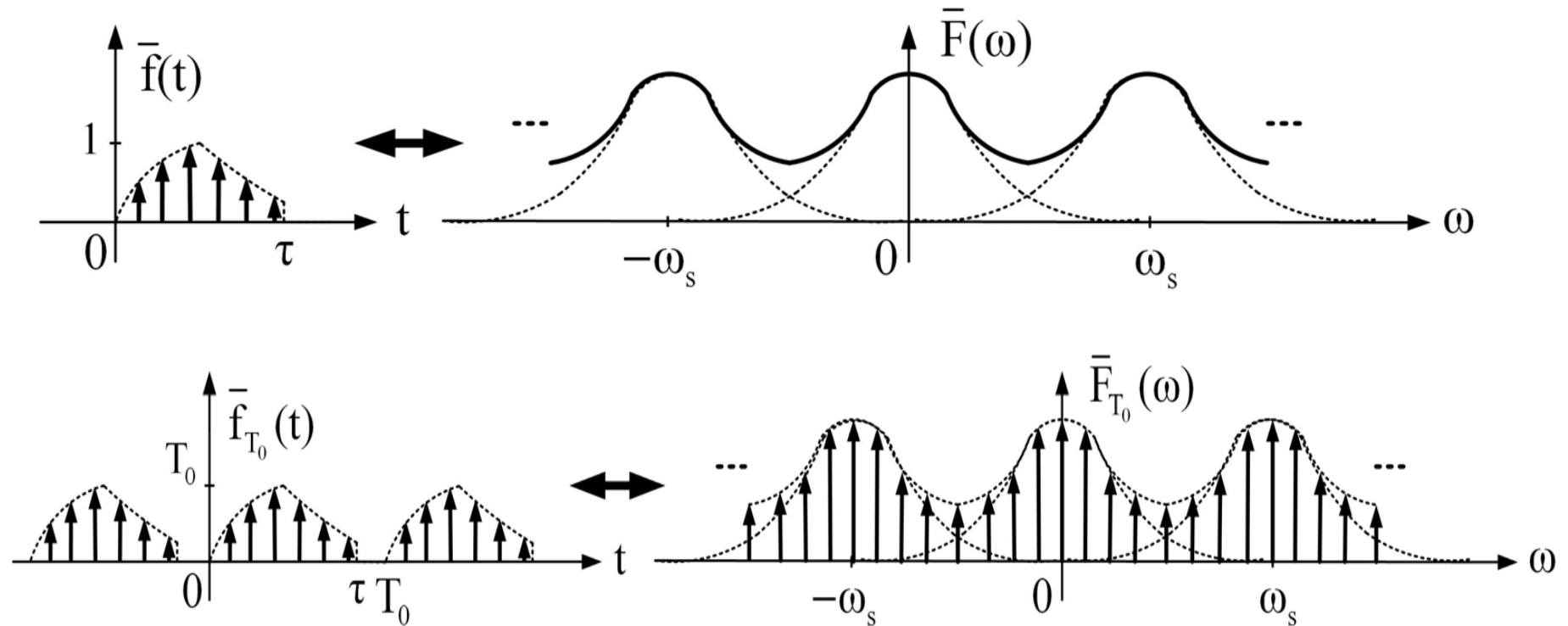


### 5.1.2. Lấy mẫu trong miền tần số

- Điều kiện khôi phục lại tín hiệu gốc khi lấy mẫu phổ của tín hiệu

$$T_0 \geq \tau \quad \Rightarrow \quad \omega_0 \leq 2\pi/\tau$$

- Lấy mẫu phổ tín hiệu đã được lấy mẫu

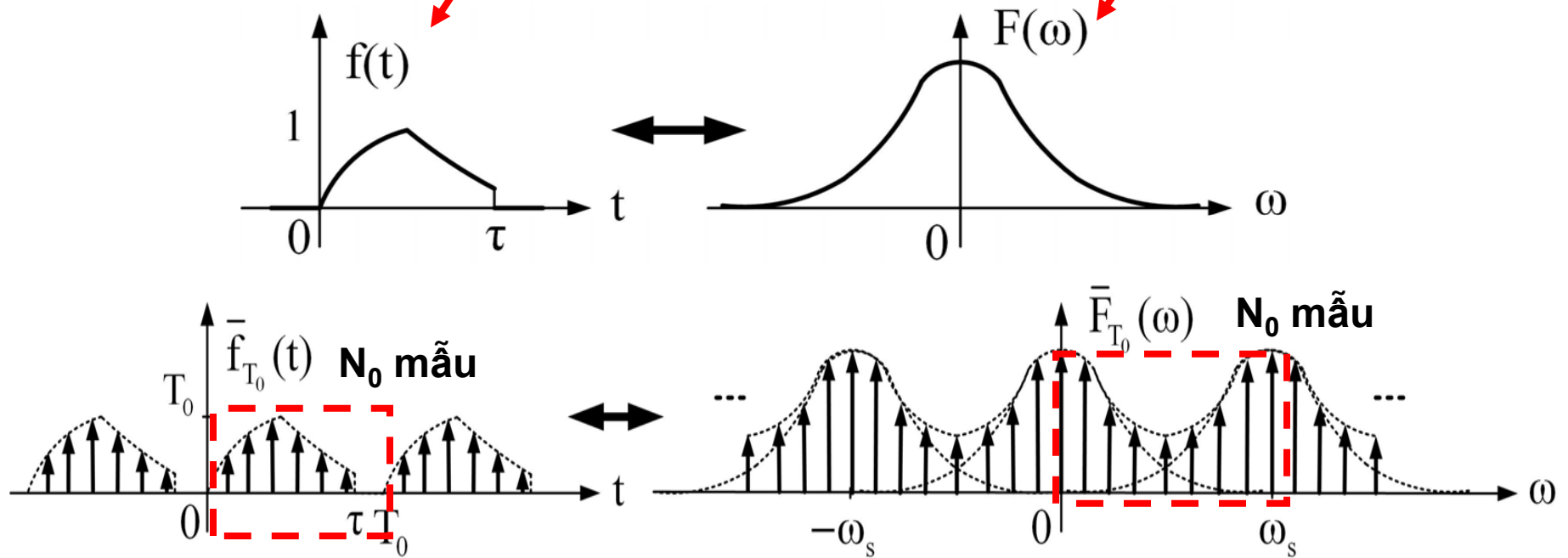


## 5.2. Biến đổi Fourier rời rạc DFT

- ❑ Mục đích: thiết lập mối quan hệ giữa các mẫu trong miền thời gian với các mẫu trong miền tần số

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$



$$N_0 = T_0 / T_s = \omega_s / \omega_0$$

## 5.2. Biến đổi Fourier rời rạc DFT

### □ Biến đổi DFT thuận:

- Do  $f(t)$  chỉ tồn tại từ 0 đến  $T_0$  (tương ứng với  $N_0$  mẫu):

$$\bar{f}(t) = \sum_{k=0}^{N_0-1} f(kT_s) \delta(t - kT_s) \Rightarrow \bar{F}(\omega) = \sum_{k=0}^{N_0-1} f(kT_s) e^{-j\omega kT_s}$$

- Mặt khác trong đoạn  $-\omega_s/2$  đến  $\omega_s/2$  (tương ứng với  $N_0$  mẫu):

$$\bar{F}(\omega) = \frac{F(\omega)}{T_s} \Rightarrow F(r\omega_0) = T_s \bar{F}(r\omega_0) = T_s \sum_{k=0}^{N_0-1} f(kT_s) e^{-jr\omega_0 kT_s}$$

- Đặt  $\Omega_0 = \omega_0 T_s = 2\pi/N_0$ ;  $F_r = F(r\omega_0)$ : mẫu thứ  $r$  của  $F(\omega)$ ;  $f_k = T_s f(kT_s)$ : mẫu thứ  $k$  của  $f(t)$ ; ta có:

$$F_r = \sum_{k=0}^{N_0-1} f_k e^{-jr\Omega_0 k} \quad (\text{Biến đổi DFT thuận})$$

## 5.2. Biến đổi Fourier rời rạc DFT

□ Biến đổi DFT ngược: nhân DFT thuận với  $e^{jm\Omega_0 r}$  sau đó lấy tổng:

$$\sum_{r=0}^{N_0-1} F_r e^{jm\Omega_0 r} = \sum_{r=0}^{N_0-1} \left[ \sum_{k=0}^{N_0-1} f_k e^{-jr\Omega_0 k} \right] e^{jm\Omega_0 r}$$

$$\Rightarrow \sum_{r=0}^{N_0-1} F_r e^{jm\Omega_0 r} = \sum_{k=0}^{N_0-1} f_k \left[ \sum_{r=0}^{N_0-1} e^{j(m-k)\Omega_0 r} \right]$$

$$\Rightarrow \sum_{r=0}^{N_0-1} F_r e^{jm\Omega_0 r} = \sum_{r=0}^{N_0-1} F_r e^{jm\Omega_0 r} = \begin{cases} 0; k \neq m \\ N_0 f_k = N_0 f_m; k = m \end{cases}$$

$$f_k = \frac{1}{N_0} \sum_{r=0}^{N_0-1} F_r e^{jr\Omega_0 k} \quad (\text{Biến đổi DFT ngược})$$

### 5.3. Biến đổi Fourier nhanh FFT

Đưa ra bởi Turkey and Cooley năm 1965,  $N_0$  phải là lũy thừa của 2

Giảm khối lượng tính toán:  $N_0^2 \rightarrow N_0 \log N_0$

$$f_k = \frac{1}{N_0} \sum_{r=0}^{N_0-1} F_r e^{jr\Omega_0 k} \quad F_r = \sum_{k=0}^{N_0-1} f_k e^{-jr\Omega_0 k}$$

Nhân:  $N_0$   
Cộng:  $N_0-1$

Tổng cộng cho các hệ số:  $N_0 N_0$  phép nhân và  $N_0(N_0-1)$  phép cộng

□ Đặt:  $W_{N_0} = e^{-j(2\pi/N_0)} = e^{-j\Omega_0}$

□ Các biểu thức DFT được viết lại:

$$F_r = \sum_{k=0}^{N_0-1} f_k W_{N_0}^{kr} \quad f_k = \frac{1}{N_0} \sum_{r=0}^{N_0-1} F_r W_{N_0}^{-kr}$$

## 5.3. Biến đổi Fourier nhanh FFT

□ Chia  $f_k$  thành 2 chuỗi: chẵn và lẻ theo số thứ tự:

$$\underbrace{f_0, f_4, f_8, \dots, f_{N_0-2}}_{\text{sequence } g_k} \quad \underbrace{f_1, f_3, f_5, \dots, f_{N_0-1}}_{\text{sequence } h_k}$$

Biểu thức DFT được viết lại:

$$F_r = \sum_{k=0}^{\frac{N_0}{2}-1} f_{2k} W_{N_0}^{2kr} + \sum_{k=0}^{\frac{N_0}{2}-1} f_{2k+1} W_{N_0}^{(2k+1)r}$$

Ta có:  $W_{\frac{N_0}{2}} = W_{N_0}^2$

$$\Rightarrow F_r = \sum_{k=0}^{\frac{N_0}{2}-1} f_{2k} W_{\frac{N_0}{2}}^{kr} + W_{N_0}^r \sum_{k=0}^{\frac{N_0}{2}-1} f_{2k+1} W_{\frac{N_0}{2}}^{kr} = G_r + W_{N_0}^r H_r$$

### 5.3. Biến đổi Fourier nhanh FFT

$$\Rightarrow F_r = \sum_{k=0}^{\frac{N_0}{2}-1} f_{2k} W_{\frac{N_0}{2}}^{kr} + W_{N_0}^r \sum_{k=0}^{\frac{N_0}{2}-1} f_{2k+1} W_{\frac{N_0}{2}}^{kr} \Rightarrow \boxed{F_r = G_r + W_{N_0}^r H_r}$$

$(0 \leq r \leq N_0 - 1)$

□ Do  $G_r$  và  $H_r$  là DFT  $N_0/2$  điểm nên nó có tính tuần hoàn:

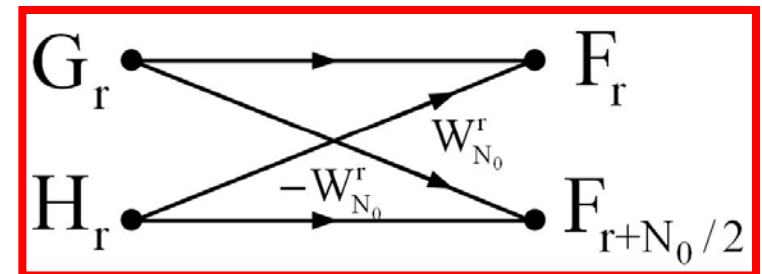
$$G_{r+\frac{N_0}{2}} = G_r \quad \& \quad H_{r+\frac{N_0}{2}} = H_r$$

Mặt khác:  $W_{N_0}^{r+\frac{N_0}{2}} = W_{\frac{N_0}{2}}^{\frac{N_0}{2}} W_{N_0}^r = e^{-j\pi} W_{N_0}^r = -W_{N_0}^r$

$$\Rightarrow F_{r+\frac{N_0}{2}} = G_{r+\frac{N_0}{2}} + W_{N_0}^{r+\frac{N_0}{2}} H_{r+\frac{N_0}{2}} \Rightarrow \boxed{F_{r+\frac{N_0}{2}} = G_r - W_{N_0}^r H_r}$$

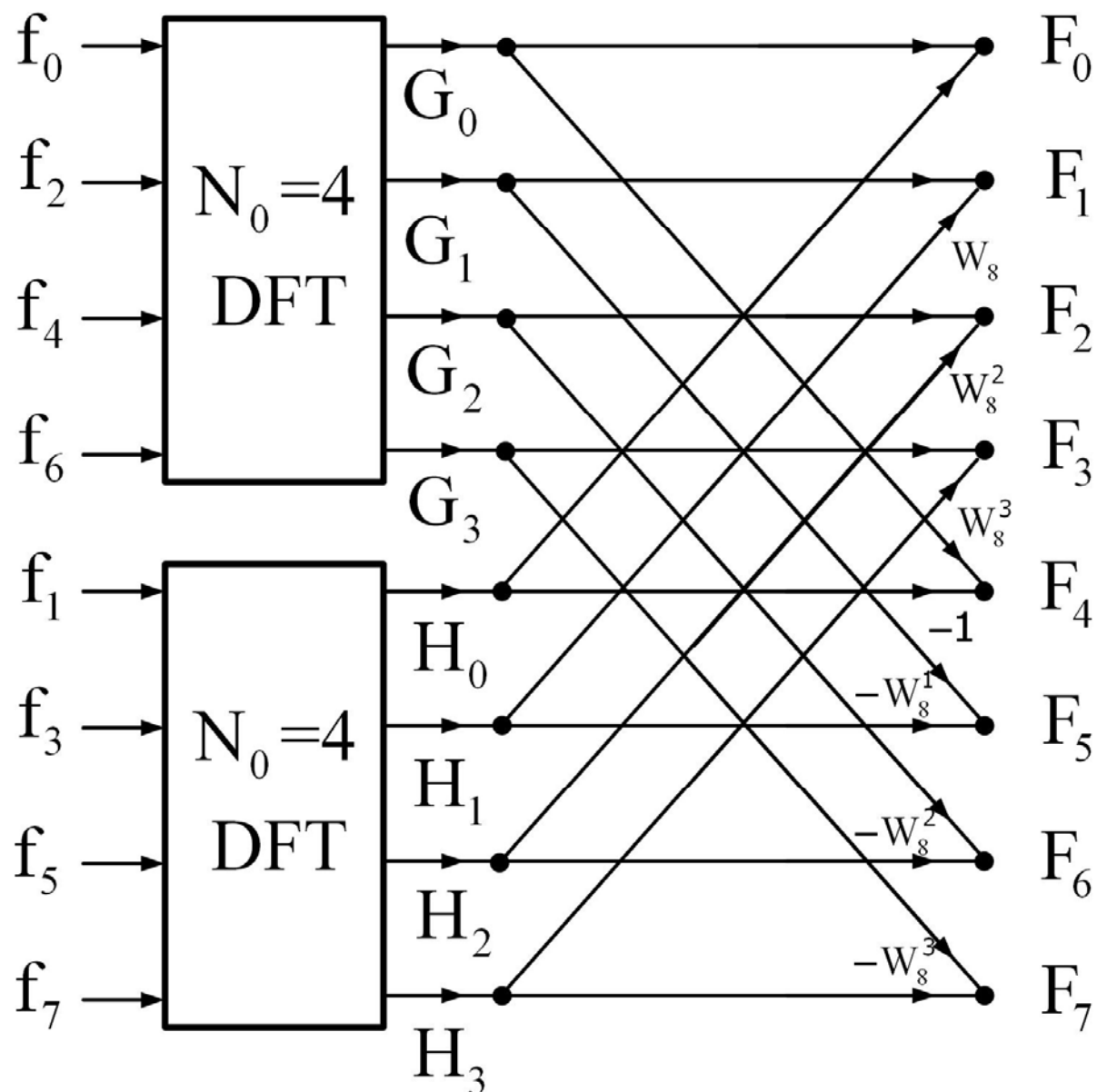
$$\boxed{\begin{aligned} F_r &= G_r + W_{N_0}^r H_r; \quad 0 \leq r \leq \frac{N_0}{2} - 1 \\ F_{r+\frac{N_0}{2}} &= G_r - W_{N_0}^r H_r; \quad 0 \leq r \leq \frac{N_0}{2} - 1 \end{aligned}}$$

$\Leftrightarrow$

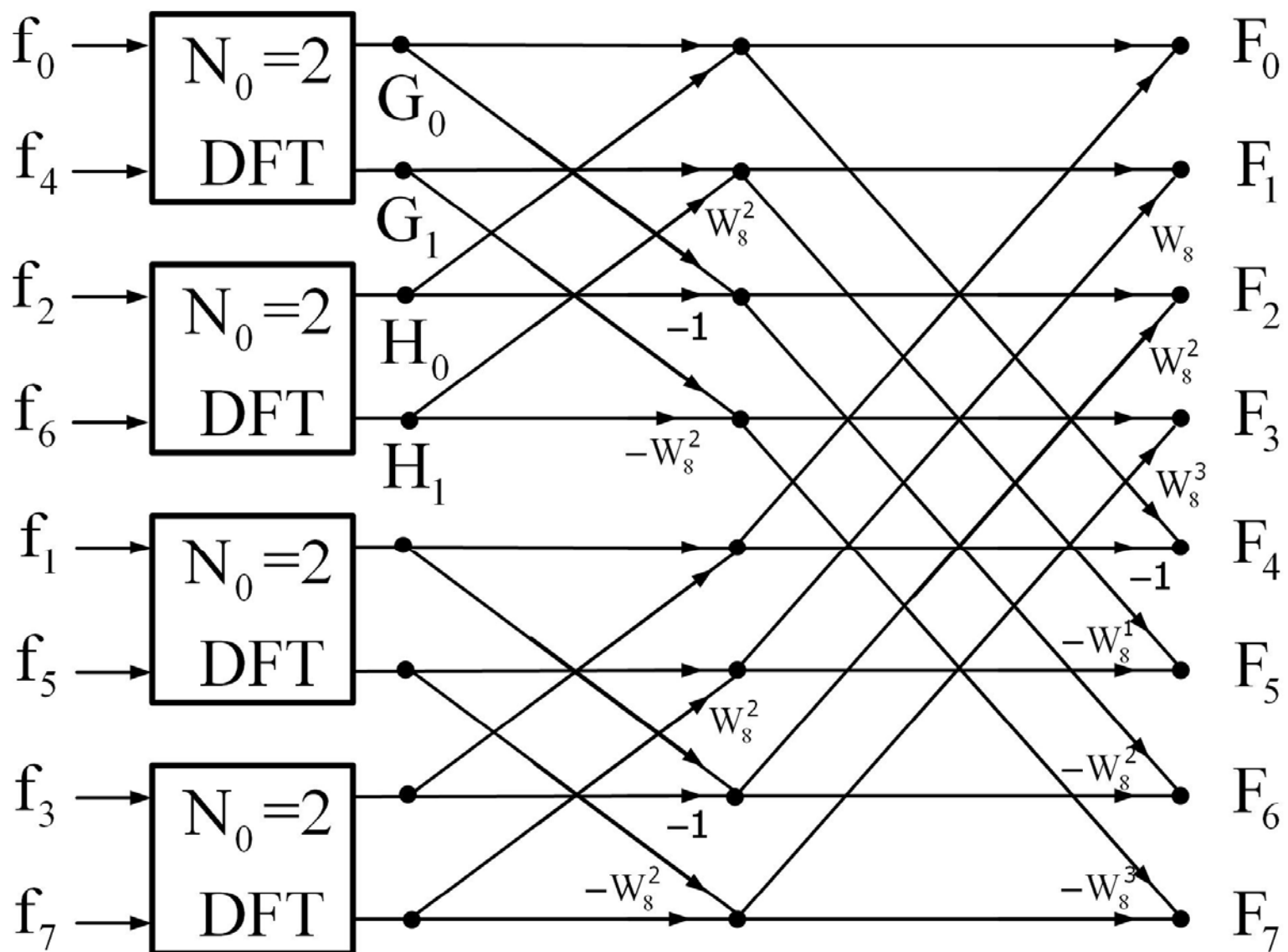


□ Áp dụng tính DFT  $N_0=8$  điểm:

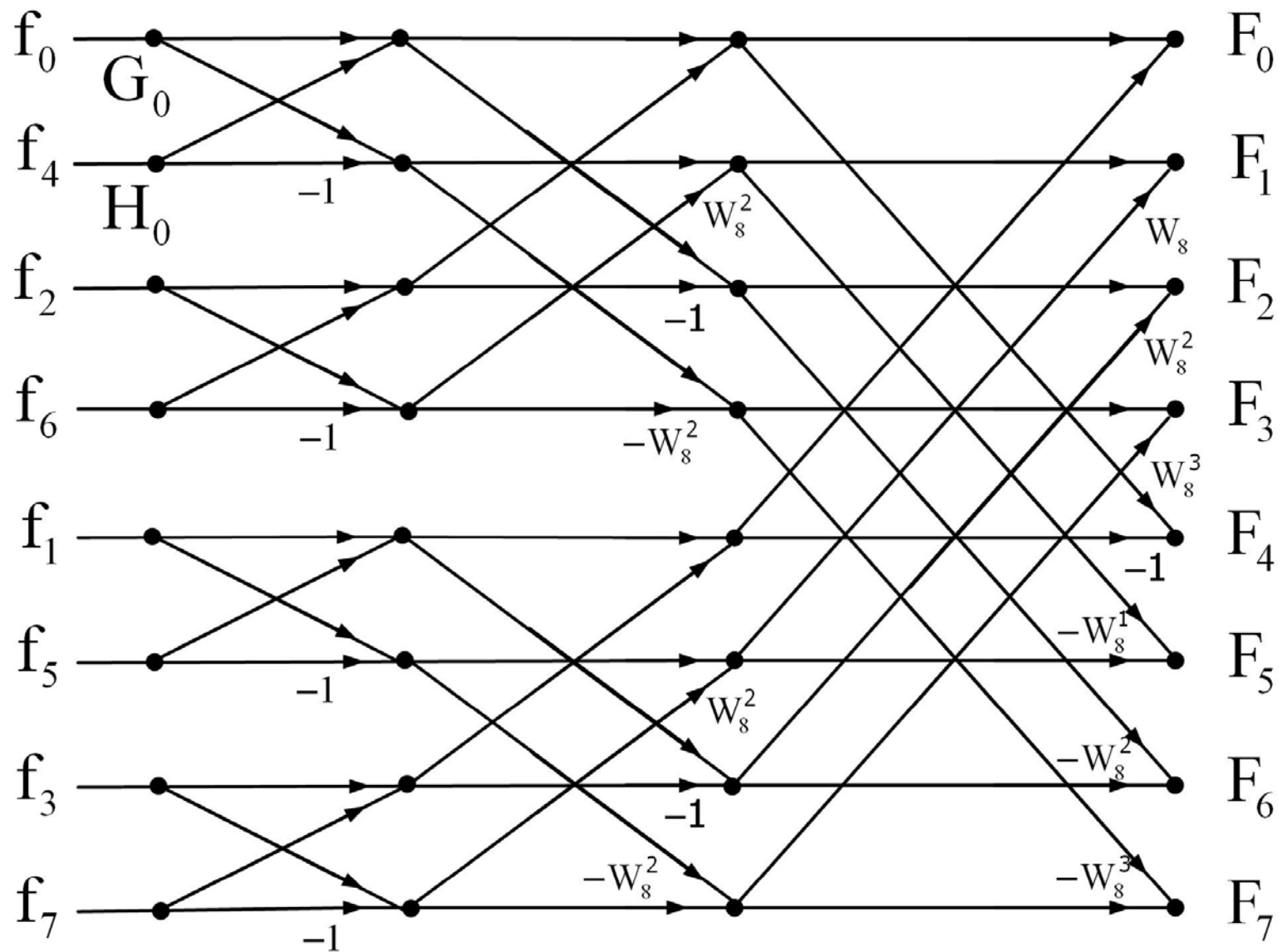
## 5.3. Biến đổi Fourier nhanh FFT



## 5.3. Biến đổi Fourier nhanh FFT



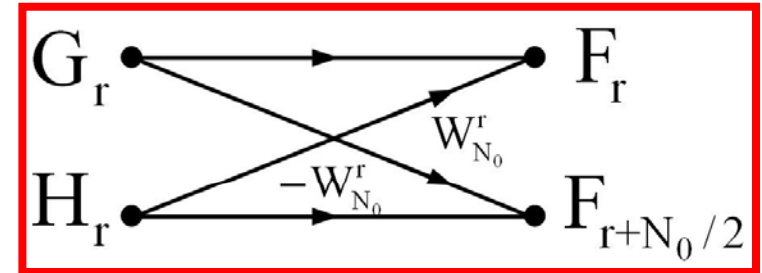
## 5.3. Biến đổi Fourier nhanh FFT



## 5.3. Biến đổi Fourier nhanh FFT

$$\begin{aligned} F_r &= G_r + W_{N_0}^r H_r; \quad 0 \leq r \leq \frac{N_0}{2} - 1 \\ F_{r+\frac{N_0}{2}} &= G_r - W_{N_0}^r H_r; \quad 0 \leq r \leq \frac{N_0}{2} - 1 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$



□ Số phép toán nhân và cộng dùng để tính DFT dùng giải thuật FFT:

- Số phép toán nhân:  $\frac{N_0}{2} \log_2 N_0$
- Số phép toán cộng:  $N_0 \log_2 N_0$