

Ch-7: Đáp ứng tần số của hệ thống LTI và thiết kế bộ lọc tương tự

Lecture-14

7.3. Bộ lọc Butterworth

7.4. Bộ lọc Chebyshev

7.5. Các phép biến đổi tần số

7.2. Bộ lọc Butterworth

Trên thực tế người ta tìm được các phép biến đổi để thiết kế bộ lọc thông cao, thông dải, chặn dải dựa vào bộ lọc thông thấp → Tập trung khảo sát thiết kế bộ lọc thông thấp (xem như bộ lọc mẫu – Prototype Filter)

7.3. Bộ lọc Butterworth

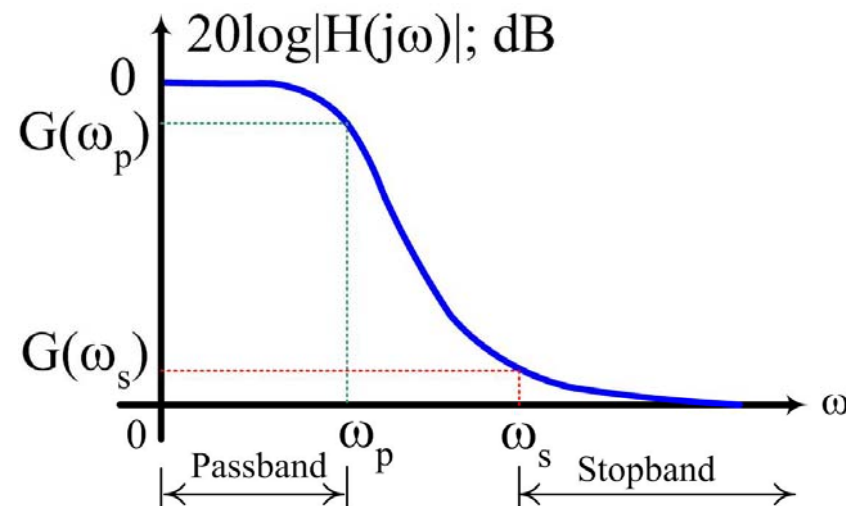
□ Đáp ứng biên độ của bộ lọc thông thấp Butterworth bậc n :

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}}$$

- Tại tần số ω_c , đáp ứng biên độ bằng $1/(2)^{1/2}$ hoặc -3dB $\rightarrow$ công suất suy giảm $1/2$: gọi là **tần số cắt**, **tần số 3dB** hoặc **tần số $1/2$ công suất**

□ Yêu cầu thiết kế:

- Chỉ rõ ω_p
- Chỉ rõ $G(\omega_p) \geq G_p$
- Chỉ rõ ω_s
- Chỉ rõ $G(\omega_s) \leq G_s$



7.3. Bộ lọc Butterworth

□ Xác định bậc n của bộ lọc và ω_c theo các yêu cầu thiết kế:

- Độ lợi (dB) tại tần số ω_x : $G(\omega_x) = -10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega_x}{\omega_c} \right)^{2n} \right]$
- Độ lợi (dB) tại tần số ω_p : $G(\omega_p) = -10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega_p}{\omega_c} \right)^{2n} \right] \geq G_p$
- Độ lợi (dB) tại tần số ω_s : $G(\omega_s) = -10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega_s}{\omega_c} \right)^{2n} \right] \leq G_s$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\omega_p}{\omega_c} \right)^{2n} \leq 10^{-G_p/10} - 1 \\ \left(\frac{\omega_s}{\omega_c} \right)^{2n} \geq 10^{-G_s/10} - 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{\omega_s}{\omega_p} \right)^{2n} \geq \frac{10^{-G_s/10} - 1}{10^{-G_p/10} - 1}$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\log \left[(10^{-G_s/10} - 1) / (10^{-G_p/10} - 1) \right]}{2 \log(\omega_s / \omega_p)}$$

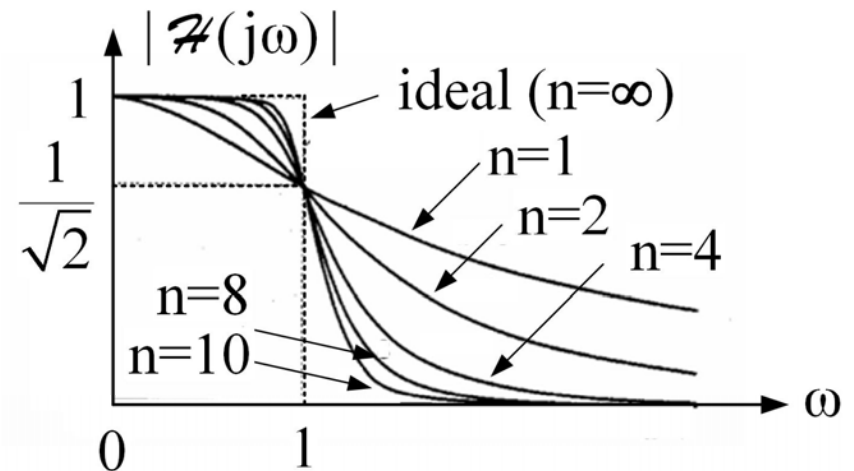
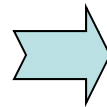
$$\Rightarrow \frac{\omega_p}{(10^{-G_p/10} - 1)^{1/2n}} \leq \omega_c \leq \frac{\omega_s}{(10^{-G_s/10} - 1)^{1/2n}}$$

7.3. Bộ lọc Butterworth

□ Xác định hàm truyền $H(s)$ bậc n :

- Trong thiết kế, ta dùng đáp ứng chuẩn hóa ($\omega_c=1$) như sau:

$$|\mathcal{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^{2n}}}$$



- Suy ra $H(s)$ khi biết hàm truyền của đáp ứng chuẩn hóa:

$$\boxed{\mathcal{H}(s) \xrightarrow{s \leftarrow s/\omega_c} H(s)}$$

7.3. Bộ lọc Butterworth

- Xác định hàm truyền bậc n của bộ lọc chuẩn hóa:
 - Xác định các poles của bộ lọc chuẩn hóa:

$$\mathcal{H}(j\omega)\mathcal{H}(-j\omega) = \frac{1}{1 + \omega^{2n}}$$

$$s = j\omega$$
$$\Rightarrow \mathcal{H}(s)\mathcal{H}(-s) = \frac{1}{1 + (s/j)^{2n}}$$

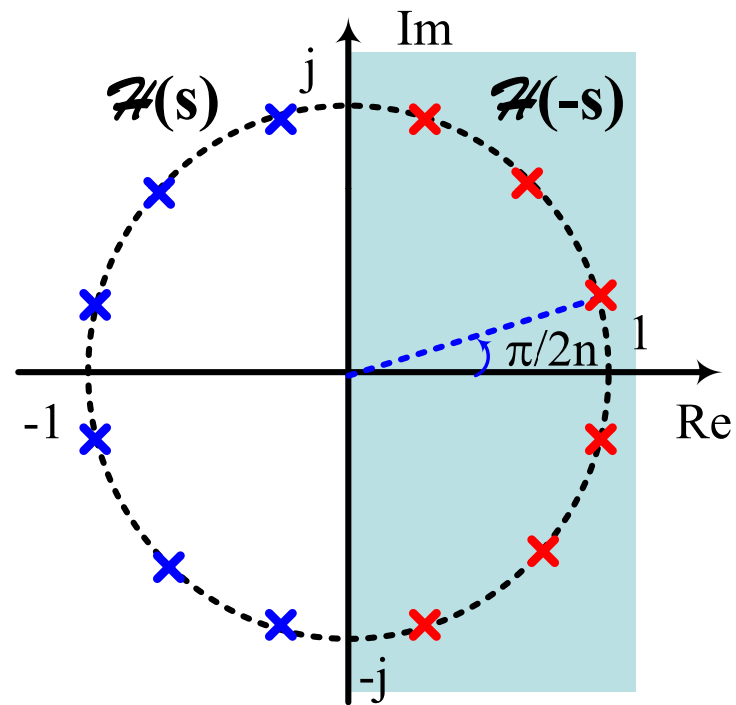
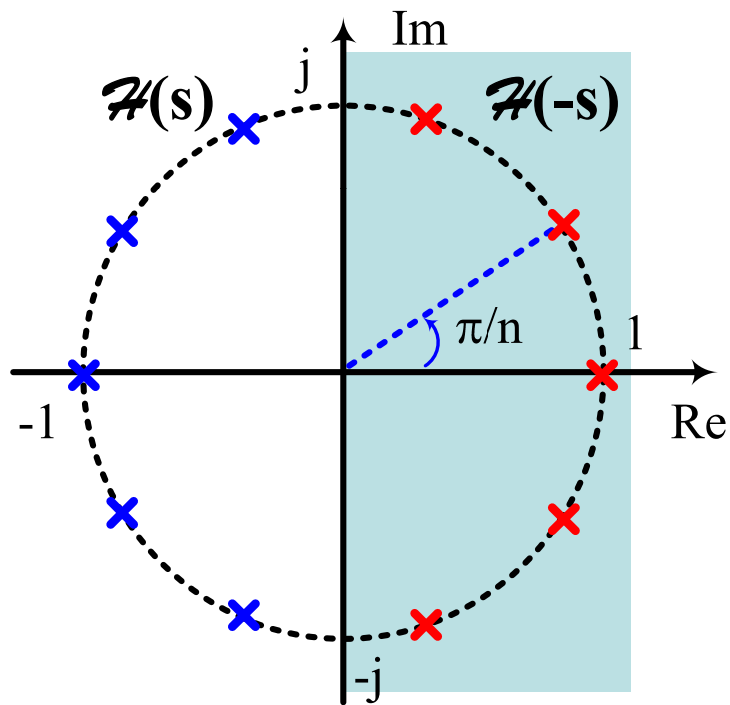
Các poles của $\mathcal{H}(s)\mathcal{H}(-s)$ phải thỏa: $s^{2n} = -(j)^{2n}$

$$\begin{cases} -1 = e^{j\pi(2k-1)} \\ j = e^{j\pi/2} \end{cases} \Rightarrow s^{2n} = e^{j\pi(2k+n-1)}$$

7.3. Bộ lọc Butterworth

Vậy các poles của $\mathcal{H}(s)\mathcal{H}(-s)$ là:

$$s_k = e^{\frac{j\pi}{2n}(2k+n-1)}; k = 1, 2, 3, \dots, 2n$$



Kết luận: n poles của $\mathcal{H}(s)$: $s_k = e^{\frac{j\pi}{2n}(2k+n-1)}; k = 1, 2, 3, \dots, n$

7.3. Bộ lọc Butterworth

- Hàm truyền $\mathcal{H}(s)$ có dạng:

$$\mathcal{H}(s) = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) \dots (s - s_n)}$$

$$s_k = e^{\frac{j\pi}{2n}(2k+n-1)}; k = 1, 2, 3, \dots, n$$

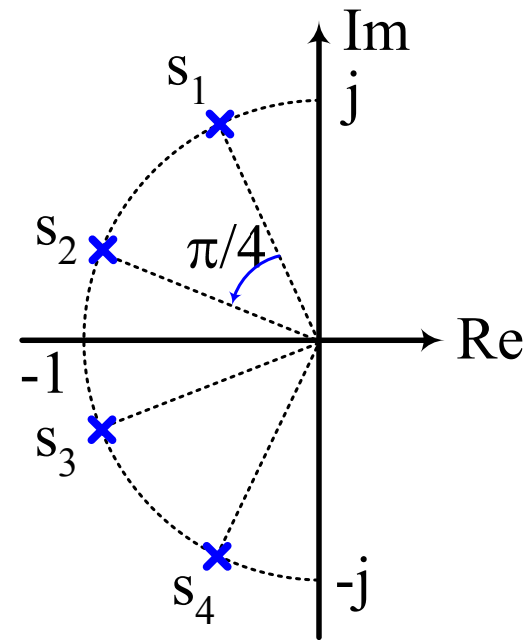
Ví dụ: xét trường hợp $n=4$

$$s_1 = e^{j5\pi/8} = -0.3827 + j0.9239$$

$$s_2 = e^{j7\pi/8} = -0.9239 + j0.3827$$

$$s_3 = e^{j9\pi/8} = -0.9239 - j0.3827$$

$$s_4 = e^{j11\pi/8} = -0.3827 - j0.9239$$



7.3. Bộ lọc Butterworth

$$H(s) = \frac{1}{(s+0.3827-j0.9239)(s+0.3827+j0.9239)(s+0.9239-j0.3827)(s+0.9239+j0.3827)}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{1}{(s^2 + 0.7654s + 1)(s^2 + 1.8478s + 1)}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{1}{s^4 + 2.6131s^3 + 3.4142s^2 + 2.6131s + 1}$$

Làm tương tự ta có thể tính được cho trường hợp bậc n bất kỳ:

$$H(s) = \frac{1}{B_n(s)} = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + 1}$$

$B_n(s)$: Gọi là đa thức Butterworth!!!

7.3. Bộ lọc Butterworth

Coefficients of Butterworth Polynominal $B_n(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1s+1$

n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
2	1.41421356								
3	2.00000000	2.00000000							
4	2.61312593	3.41421356	2.61312593						
5	3.23606798	5.23606798	5.23606798	3.23606798					
6	3.86370331	7.46410162	9.14162017	7.46410162	3.86370331				
7	4.49395921	10.09783468	14.59179389	14.59179389	10.09783468	4.49395921			
8	5.12583090	13.13707118	21.84615097	25.68835593	21.84615097	13.13707118	5.12583090		
9	5.75877048	16.58171874	31.16343748	41.98638573	41.98638573	31.16343748	16.58171874	5.75877048	
10	6.39245322	20.43172909	42.80206107	64.88239627	74.23342926	64.88239627	42.80206107	20.43172909	6.39245322

7.3. Bộ lọc Butterworth

Butterworth Polynomial in Factorized Form

n	$B_n(s)$
1	$s + 1$
2	$s^2 + 1.41421356s + 1$
3	$(s + 1)(s^2 + s + 1)$
4	$(s^2 + 0.76536686s + 1)(s^2 + 1.84775907s + 1)$
5	$(s + 1)(s^2 + 0.61803399s + 1)(s^2 + 1.931803399s + 1)$
6	$(s^2 + 0.51763809s + 1)(s^2 + 1.41421356s + 1)(s^2 + 1.93185165s + 1)$
7	$(s + 1)(s^2 + 0.44504187s + 1)(s^2 + 1.24697960s + 1)(s^2 + 1.80193774s + 1)$
8	$(s^2 + 0.39018064s + 1)(s^2 + 1.11114047s + 1)(s^2 + 1.66293922s + 1)(s^2 + 1.96157056s + 1)$
9	$(s + 1)(s^2 + 0.34729636s + 1)(s^2 + s + 1)(s^2 + 1.53208889s + 1)(s^2 + 1.87938524s + 1)$
10	$(s^2 + 0.31286893s + 1)(s^2 + 0.90798100s + 1)(s^2 + 1.41421356s + 1)(s^2 + 1.78201305s + 1)(s^2 + 1.97537668s + 1)$

7.3. Bộ lọc Butterworth

□ Các bước thiết kế bộ lọc thông thấp Butterworth:

Ví dụ: Thiết kế bộ lọc thông thấp Butterworth thỏa mãn các yêu cầu sau: Độ lợi dải thông ($0 \leq \omega < 10$) không nhỏ hơn -2dB ; độ lợi dải chặn ($\omega \geq 20$) không vượt quá -20dB

■ Bước 1: Xác định $n \geq \frac{\log \left[(10^{-G_s/10} - 1) / (10^{-G_p/10} - 1) \right]}{2 \log(\omega_s / \omega_p)}$

■ Bước 2: Xác định ω_c :

$$\frac{\omega_p}{(10^{-G_p/10} - 1)^{1/2n}} \leq \omega_c \leq \frac{\omega_s}{(10^{-G_s/10} - 1)^{1/2n}}$$

■ Bước 3: Xác định $\mathcal{H}(s)$: dùng n (bước 1) tra bảng (hoặc tính)

■ Bước 4: Xác định $H(s)$: $\mathcal{H}(s) \xrightarrow{s \leftarrow s/\omega_c} H(s)$

7.3. Bộ lọc Butterworth

■ Bước 1: $n \geq \frac{\log \left[(10^2 - 1) / (10^{0.2} - 1) \right]}{2 \log 2} = 3.701 \rightarrow \text{chọn } n=4$

■ Bước 2: $\begin{cases} \omega_c \geq \frac{10}{(10^{0.2} - 1)^{1/8}} = 10.694 \\ \omega_c \leq \frac{20}{(10^2 - 1)^{1/8}} = 11.26 \end{cases} \rightarrow \text{chọn } \omega_c=11$

$$G(\omega_p) = -10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{10}{11} \right)^8 \right] = -1.66 \text{ dB} > -2 \text{ dB}$$

$$G(\omega_s) = -10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{20}{11} \right)^8 \right] = -20.8 \text{ dB} < -20 \text{ dB}$$

■ Bước 3: $\mathcal{H}(s) = \frac{1}{(s^2 + 0.76536686s + 1)(s^2 + 1.84775907s + 1)}$

■ Bước 4: $H(s) = \frac{1}{\left[\left(\frac{s}{11} \right)^2 + 0.76536686 \left(\frac{s}{11} \right) + 1 \right] \left[\left(\frac{s}{11} \right)^2 + 1.84775907 \left(\frac{s}{11} \right) + 1 \right]}$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{14641}{(s^2 + 8.41903546s + 121)(s^2 + 20.32534977s + 121)}$$

7.4. Bộ lọc Chebyshev

- Đáp ứng biên độ của bộ lọc thông thấp Chebyshev:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}}$$

- Trong thiết kế, ta dùng đáp ứng chuẩn hóa ($\omega_c=1$):

$$|\mathcal{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\omega)}}$$

- Vậy khi có $\mathcal{H}(s) \rightarrow H(s)$ bằng cách:

$$\mathcal{H}(s) \xrightarrow{s \leftarrow s/\omega_c} H(s)$$

7.4. Bộ lọc Chebyshev

□ Xét đáp ứng biên độ của bộ lọc thông thấp chuẩn hóa Chebyshev :

$$| \mathcal{H}(j\omega) | = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\omega)}}$$

$$C_n(\omega) = \cos(n \cos^{-1} \omega); |\omega| < 1$$

$$C_n(\omega) = \cosh(n \cosh^{-1} \omega); |\omega| > 1$$

$C_n(\omega)$ là một đa thức thỏa tính chất sau:

$$C_n(\omega) = 2\omega C_{n-1}(\omega) - C_{n-2}(\omega); n \geq 2$$

$$\text{Có: } C_0(\omega) = 1 \quad \text{và} \quad C_1(\omega) = \omega \Rightarrow C_2(\omega) = 2\omega^2 - 1$$

Một cách tương tự ta có thể tính được bảng $C_n(\omega)$!!!

7.4. Bộ lọc Chebyshev

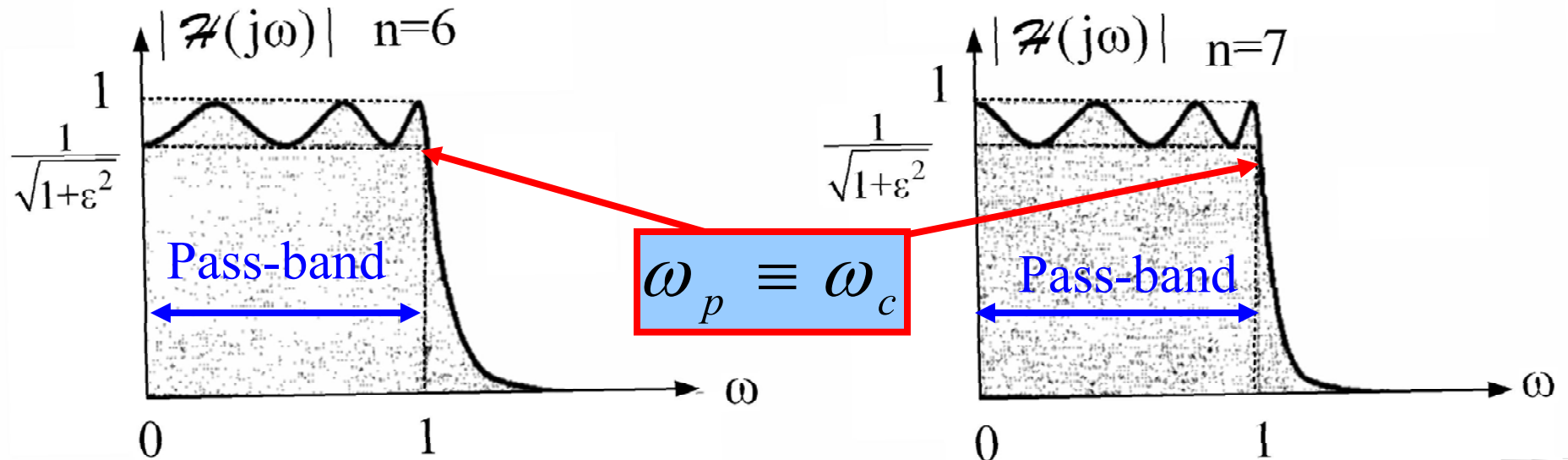
Chebyshev Polynomials

n	$C_n(\omega)$
0	1
1	ω
2	$2\omega^2 - 1$
3	$4\omega^3 - 3\omega$
4	$8\omega^4 - 8\omega^2 + 1$
5	$16\omega^5 - 20\omega^3 + 5\omega$
6	$32\omega^6 - 48\omega^4 + 18\omega^2 - 1$
7	$64\omega^7 - 112\omega^5 + 56\omega^3 - 7\omega$
8	$128\omega^8 - 256\omega^6 + 160\omega^4 - 32\omega^2 + 1$
9	$256\omega^9 - 576\omega^7 + 432\omega^5 - 120\omega^3 + 9\omega$
10	$512\omega^{10} - 1280\omega^8 + 1120\omega^6 - 400\omega^4 + 50\omega^2 - 1$

7.4. Bộ lọc Chebyshev

□ Đáp ứng biên độ bộ lọc Chebyshev:

$$|\mathcal{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\omega)}}$$



Độ gợn r (Độ lồi max/Độ lồi min) trong dải thông:

$$r = 10 \log_{10} (1 + \varepsilon^2) \text{ (dB)}$$

$$-r \leftrightarrow G_p \text{ (Butterworth)} \text{ (dB)}$$

7.4. Bộ lọc Chebyshev

□ Xác định ε và bậc(n) của bộ lọc Chebyshev thỏa yêu cầu thiết kế:

■ Xác định ε : $(r)_{design} = 10 \log_{10}(1 + \varepsilon^2) \leq r \Rightarrow \boxed{\varepsilon \leq \sqrt{10^{r/10} - 1}}$

■ Độ lợi tại tần số ω : $G = -10 \log_{10}[1 + \varepsilon^2 C_n^2(\frac{\omega}{\omega_p})]$

■ Độ lợi tại tần số ω_s : $-10 \log_{10}[1 + \varepsilon^2 C_n^2(\frac{\omega_s}{\omega_p})] \leq G_s$

$$\Rightarrow \cosh \left[n \cosh^{-1} \left(\frac{\omega_s}{\omega_p} \right) \right] \geq \left(\frac{10^{-G_s/10} - 1}{10^{r/10} - 1} \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{n \geq \frac{1}{\cosh^{-1}(\omega_s / \omega_p)} \cosh^{-1} \left(\frac{10^{-G_s/10} - 1}{10^{r/10} - 1} \right)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon \geq \frac{\sqrt{10^{-G_s/10} - 1}}{\cosh[n \cosh^{-1}(\omega_s / \omega_p)]}}$$

7.4. Bộ lọc Chebyshev

□ Xác định hàm truyền $\mathcal{H}(s)$ của bộ lọc:

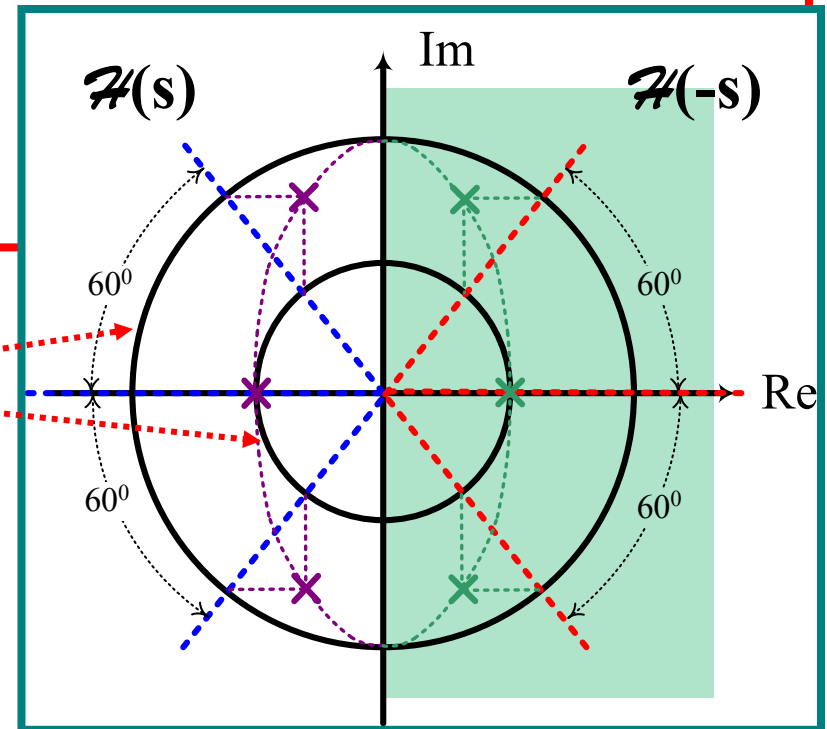
Người ta tính được các poles của $\mathcal{H}(s)$ như sau:

$$s_k = -\sin \frac{(2k-1)\pi}{2n} \sinh x + j \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \cosh x$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$x = \frac{1}{n} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)$$

$$a = \sinh x; b = \cosh x$$



7.4. Bộ lọc Chebyshev

$$\Rightarrow \mathcal{H}(s) = \frac{K_n}{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}(s) = \frac{K_n}{C'_n(s)} = \frac{K_n}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

K_n được lựa chọn để bảo đảm độ lợi DC:

$$K_n = \begin{cases} a_0 & n \text{ odd} \\ \frac{a_0}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} & n \text{ even} \end{cases}$$

Để việc thiết kế được đơn giản, người ta thành lập bảng $C'_n(s)$ hoặc giá trị của các poles với một số độ gợn r thường gặp $\rightarrow$ Tra bảng!!!

7.4. Bộ lọc Chebyshev

Chebyshev Filter Coefficients of the Denominator Polynomial

$$C'_n = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0$$

n	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	2.8627752						
2	1.5162026	1.4256245					
3	0.7156938	1.5348954	1.2529130				
4	0.3790506	1.0254553	1.7168662	1.1973856			
5	0.1789234	0.7525181	1.3095747	1.9373675	1.1724909		
6	0.0947626	0.4323669	1.1718613	1.5897635	2.1718446	1.1591761	
7	0.0447309	0.2820722	0.7556511	1.6479029	1.8694079	2.4126510	1.1512176
<i>0.5 dB ripple</i> $r = 0.5dB$							
1	1.9652267						
2	1.1025103	1.0977343					
3	0.4913067	1.2384092	0.9883412				
4	0.2756276	0.7426194	1.4539248	0.9528114			
5	0.1228267	0.5805342	0.9743961	1.6888160	0.9368201		
6	0.0689069	0.3070808	0.9393461	1.2021409	1.9308256	0.9282510	
7	0.0307066	0.2136712	0.5486192	1.3575440	1.4287930	2.1760778	0.9231228
<i>1 dB ripple</i> $r = 1dB$							

7.4. Bộ lọc Chebyshev

Chebyshev Filter Coefficients of the Denominator Polynomial

$$C'_n = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0$$

n	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	1.3075603						
2	0.8230604	0.8038164					
3	0.3268901	1.0221903	0.7378216				
4	0.2057651	0.5167981	1.2564819	0.7162150			
5	0.0817225	0.4593491	0.6934770	1.4995433	0.7064606		
6	0.0514413	0.2102706	0.7714618	0.8670149	1.7458587	0.7012257	
7	0.0204228	0.1660920	0.3825056	1.1444390	1.0392203	1.9935272	0.6978929
1	1.0023773						
2	0.7079478	0.6448996					
3	0.2505943	0.9283480	0.5972404				
4	0.1769869	0.4047679	1.1691176	0.5815799			
5	0.0626391	0.4079421	0.5488626	1.4149874	0.5744296		
6	0.0442467	0.1634299	0.6990977	0.6906098	1.6628481	0.5706979	
7	0.0156621	0.1461530	0.3000167	1.0518448	0.8314411	1.9115507	0.5684201

2 dB ripple
 $r = 2dB$

3 dB ripple
 $r = 3dB$

7.4. Bộ lọc Chebyshev

Chebyshev Filter Poles Locations

n	$r = 0.5 dB$	$r = 1 dB$	$r = 2 dB$	$r = 3 dB$
1	-2.8628	-1.9652	-1.3076	-1.0024
2	$-0.7128 \pm j1.0040$	$-0.5489 \pm j0.8951$	$-0.4019 \pm j0.8133$	$-0.3224 \pm j0.7772$
3	-0.6265 $-0.3132 \pm j1.0219$	-0.4942 $-0.2471 \pm j0.9660$	-0.3689 $-0.1845 \pm j0.9231$	-0.2986 $-0.1493 \pm j0.9038$
4	$-0.1754 \pm j1.0163$ $-0.4233 \pm j0.4209$	$-0.1395 \pm j0.9834$ $-0.3369 \pm j0.4073$	$-0.1049 \pm j0.9580$ $-0.2532 \pm j0.3968$	$-0.0852 \pm j0.9465$ $-0.2056 \pm j0.3920$
5	-0.3623 $-0.1120 \pm j1.0116$ $-0.2931 \pm j0.6252$	-0.2895 $-0.0895 \pm j0.9901$ $-0.2342 \pm j0.6119$	-0.2183 $-0.0675 \pm j0.9735$ $-0.1766 \pm j0.6016$	-0.1775 $-0.0549 \pm j0.9659$ $-0.1436 \pm j0.5970$
6	$-0.0777 \pm j1.0085$ $-0.2121 \pm j0.7382$ $-0.2898 \pm j0.2702$	$-0.0622 \pm j0.9934$ $-0.1699 \pm j0.7272$ $-0.2321 \pm j0.2662$	$-0.0470 \pm j0.9817$ $-0.1283 \pm j0.7187$ $-0.1753 \pm j0.2630$	$-0.0382 \pm j0.9764$ $-0.1044 \pm j0.7148$ $-0.1427 \pm j0.2616$

7.4. Bộ lọc Chebyshev

Chebyshev Filter Poles Locations

n	$r = 0.5 dB$	$r = 1 dB$	$r = 2 dB$	$r = 3 dB$
7	-0.2562	-0.2054	-0.1553	-0.1265
	$-0.0570 \pm j1.0064$	$-0.0457 \pm j0.9953$	$-0.0346 \pm j0.9866$	$-0.0281 \pm j0.9827$
	$-0.1597 \pm j0.8071$	$-0.1281 \pm j0.7982$	$-0.0969 \pm j0.7912$	$-0.0789 \pm j0.7881$
	$-0.2308 \pm j0.4479$	$-0.1851 \pm j0.4429$	$-0.1400 \pm j0.4391$	$-0.1140 \pm j0.4373$
8	$-0.0436 \pm j1.0050$	$-0.0350 \pm j0.9965$	$-0.0265 \pm j0.9898$	$-0.0216 \pm j0.9868$
	$-0.1242 \pm j0.8520$	$-0.0997 \pm j0.8447$	$-0.0754 \pm j0.8391$	$-0.0614 \pm j0.8365$
	$-0.1859 \pm j0.5693$	$-0.1492 \pm j0.5644$	$-0.1129 \pm j0.5607$	$-0.0920 \pm j0.5590$
	$-0.2193 \pm j0.1999$	$-0.1760 \pm j0.1982$	$-0.1332 \pm j0.1969$	$-0.1085 \pm j0.1962$
9	-0.1984	-0.1593	-0.1206	-0.0983
	$-0.0345 \pm j1.0040$	$-0.0277 \pm j0.9972$	$-0.0209 \pm j0.9919$	$-0.0171 \pm j0.9896$
	$-0.0992 \pm j0.8829$	$-0.0797 \pm j0.8769$	$-0.0603 \pm j0.8723$	$-0.0491 \pm j0.8702$
	$-0.1520 \pm j0.6553$	$-0.1221 \pm j0.6509$	$-0.0924 \pm j0.6474$	$-0.0753 \pm j0.6459$
10	$-0.1864 \pm j0.3487$	$-0.1497 \pm j0.3463$	$-0.1134 \pm j0.3445$	$-0.0923 \pm j0.3437$
	$-0.0279 \pm j1.0033$	$-0.0224 \pm j0.9978$	$-0.0170 \pm j0.9935$	$-0.0138 \pm j0.9915$
	$-0.0810 \pm j0.9051$	$-0.1013 \pm j0.7143$	$-0.0767 \pm j0.7113$	$-0.0401 \pm j0.8945$
	$-0.1261 \pm j0.7183$	$-0.0650 \pm j0.9001$	$-0.0493 \pm j0.8962$	$-0.0625 \pm j0.7099$
	$-0.1589 \pm j0.4612$	$-0.1277 \pm j0.4586$	$-0.0967 \pm j0.4567$	$-0.0788 \pm j0.4558$
	$-0.1761 \pm j0.1589$	$-0.1415 \pm j0.1580$	$-0.1072 \pm j0.1574$	$-0.0873 \pm j0.1570$

7.4. Bộ lọc Chebyshev

□ Các bước thiết kế bộ lọc thông thấp Chebyshev:

Ví dụ: Thiết kế bộ lọc thông thấp Chebyshev thỏa mãn các yêu cầu sau: r trong dải thông ($0 \leq \omega \leq 10$) $\leq 2\text{dB}$; độ lợi dải chặn ($\omega \geq 20$) $G_s \leq -20\text{dB}$

- Bước 1: Xác định:
$$n \geq \frac{1}{\cosh^{-1}(\omega_s / \omega_p)} \cosh^{-1} \left(\frac{10^{-G_s/10} - 1}{10^{r/10} - 1} \right)^{1/2}$$
- Bước 2: Chọn ε :
$$\frac{\sqrt{10^{-G_s/10} - 1}}{\cosh[n \cosh^{-1}(\omega_s / \omega_p)]} \leq \varepsilon \leq \sqrt{10^{r/10} - 1}$$

7.4. Bộ lọc Chebyshev

Nếu ε sao cho $r=0.5\text{dB}$, 1dB , 2dB hoặc $3\text{dB} \rightarrow$ tra bảng $C'_n(s)$; nếu không thỏa $\rightarrow$ tính $C'_n(s)$:

$$s_k = -\sin \frac{(2k-1)\pi}{2n} \sinh x + j \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \cosh x$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, n; \quad x = \frac{1}{n} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)$$

$$C'_n(s) = (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)$$

■ Bước 3: Xác định $\mathcal{H}(s)$: $\mathcal{H}(s) = \frac{K_n}{C'_n(s)}$

$$K_n = \begin{cases} a_0 & n \text{ odd} \\ \frac{a_0}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} & n \text{ even} \end{cases}$$

■ Bước 4: Xác định $\mathbf{H}(s)$: $\mathcal{H}(s) \xrightarrow{s \leftarrow s/\omega_p} H(s)$

7.4. Bộ lọc Chebyshev

■ Bước 1: $n \geq \frac{1}{\cosh^{-1}(2)} \cosh^{-1} \left(\frac{10^2 - 1}{10^{0.2} - 1} \right)^{1/2} = 2.473 \rightarrow \text{chọn } n=3$

■ Bước 2: $\frac{\sqrt{10^2 - 1}}{\cosh[3 \cosh^{-1}(2)]} \leq \varepsilon \leq \sqrt{10^{0.2} - 1}$

$$\Leftrightarrow 0.382 \leq \varepsilon \leq 0.764 \rightarrow \text{chọn } \varepsilon=0.764 \rightarrow (r)_{\text{design}}=2\text{dB}$$

Tra bảng: $C'_n(s) = s^3 + 0.7378s^2 + 1.0222s + 0.3269$

■ Bước 3: $n \text{ odd} \Rightarrow K_n = a_0 = 0.3269$

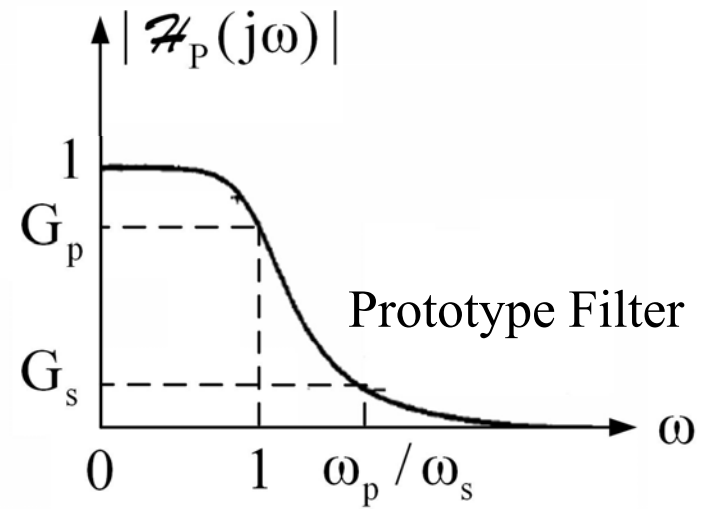
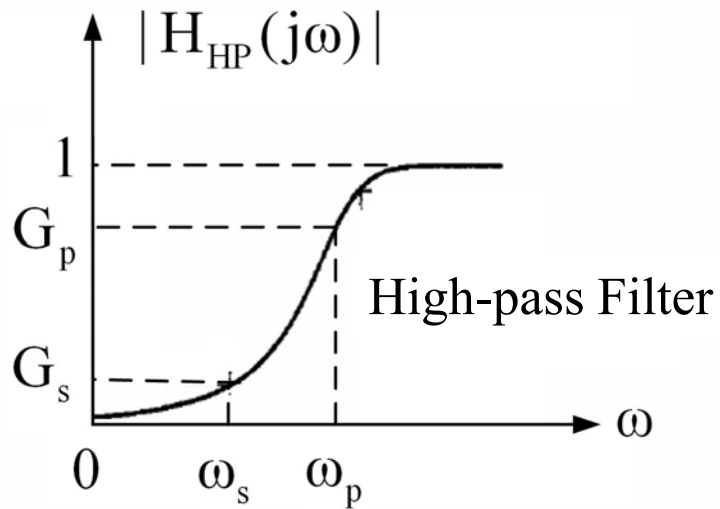
$$\Rightarrow \mathcal{H}(s) = \frac{0.3269}{s^3 + 0.7378s^2 + 1.0222s + 0.3269}$$

■ Bước 4: $H(s) = \frac{0.3269}{\left(\frac{s}{10}\right)^3 + 0.7378\left(\frac{s}{10}\right)^2 + 1.0222\frac{s}{10} + 0.3269}$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{326.9}{s^3 + 7.378s^2 + 102.22s + 326.9}$$

7.5. Các phép biến đổi tần số

□ Bộ lọc thông cao (High-pass Filter):



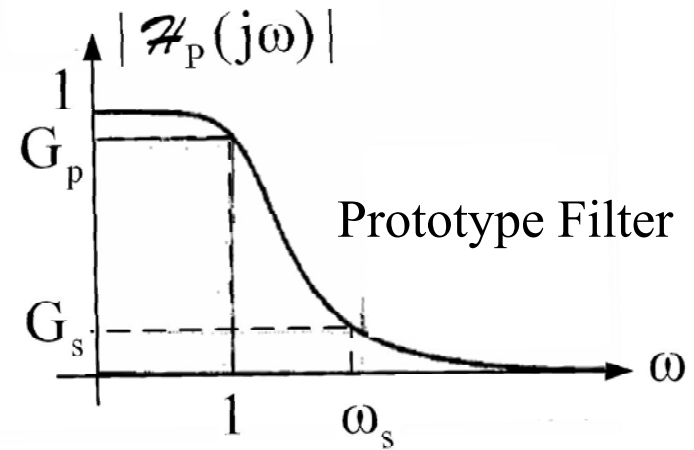
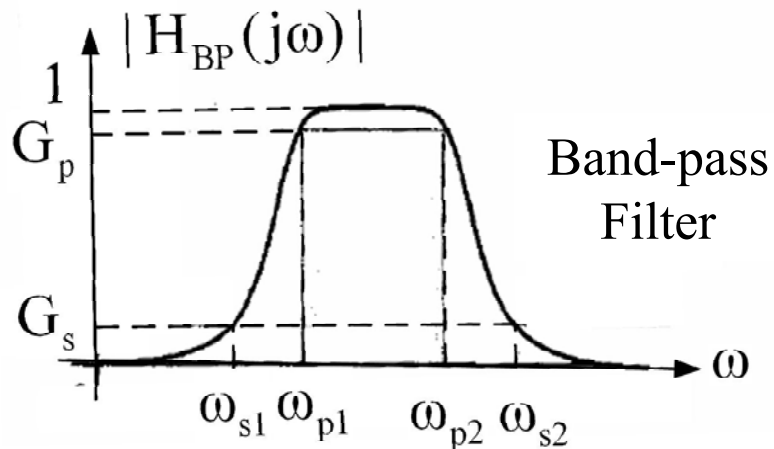
$$\mathcal{H}_p(s) \xrightarrow{s \leftarrow T(s)} H(s)$$

$$T(s) = \frac{\omega_p}{s}$$

Ví dụ 1: Thiết kế bộ lọc thông cao Chebyshev thỏa mãn các yêu cầu sau: r trong dải thông ($\omega \geq 200$) $\leq 2\text{dB}$; độ lợi dải chặn ($\omega \leq 100$) $G_s \leq -20\text{dB}$?

7.5. Các phép biến đổi tần số

□ Bộ lọc thông dải (Band-pass Filter):



$$\omega_s = \min \left\{ \frac{\omega_{p1}\omega_{p2} - \omega_{s1}^2}{\omega_{s1}(\omega_{p2} - \omega_{p1})}; \frac{\omega_{s2}^2 - \omega_{p1}\omega_{p2}}{\omega_{s2}(\omega_{p2} - \omega_{p1})} \right\}$$

$$\mathcal{H}_p(s) \xrightarrow{s \leftarrow T(s)} H(s)$$

$$T(s) = \frac{s^2 + \omega_{p1}\omega_{p2}}{(\omega_{p2} - \omega_{p1})s}$$

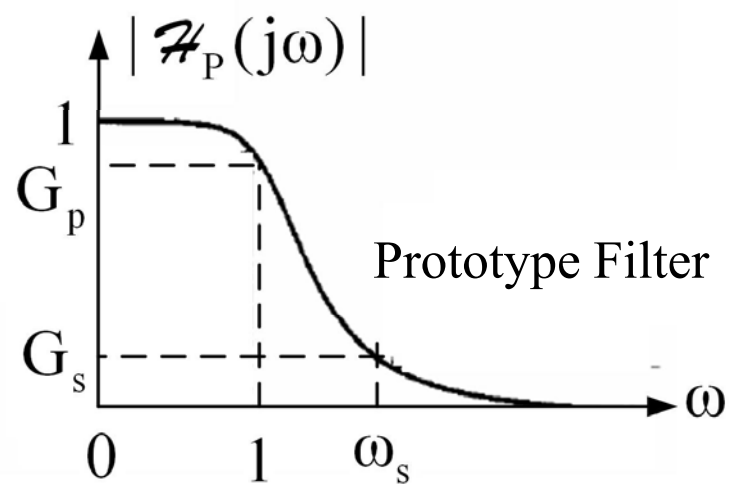
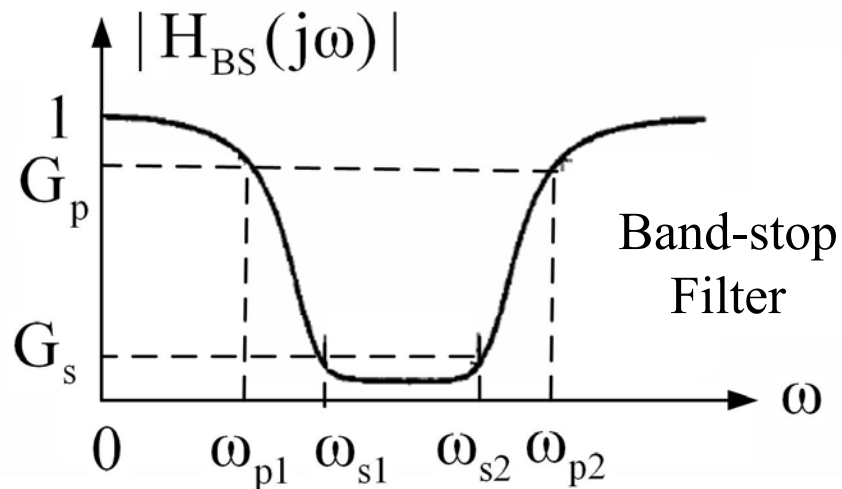
7.5. Các phép biến đổi tần số

Ví dụ 2: Thiết kế bộ lọc thông dải Chebyshev thỏa mãn các yêu cầu sau: r trong dải thông $(1000 \leq \omega \leq 2000) \leq 1\text{dB}$; độ lợi dải chặn $(\omega \leq 450 \text{ hoặc } \omega \geq 4000) G_s \leq -20\text{dB}$?

Ví dụ 3: Thiết kế bộ lọc thông dải Butterworth thỏa mãn các yêu cầu sau: Độ lợi trong dải thông $(1000 \leq \omega \leq 2000) \geq -1\text{dB}$; độ lợi dải chặn $(\omega \leq 450 \text{ hoặc } \omega \geq 4000) G_s \leq -20\text{dB}$?

7.5. Các phép biến đổi tần số

□ Bộ lọc chắn dải (Band-stop Filter):



$$\omega_s = \min \left\{ \frac{\omega_{s1} (\omega_{p2} - \omega_{p1})}{\omega_{p1} \omega_{p2} - \omega_{s1}^2}, \frac{\omega_{s2} (\omega_{p2} - \omega_{p1})}{\omega_{s2}^2 - \omega_{p1} \omega_{p2}} \right\}$$

$$\mathcal{H}_p(s) \xrightarrow{s \leftarrow T(s)} H(s)$$

$$T(s) = \frac{(\omega_{p2} - \omega_{p1})s}{s^2 + \omega_{p1}\omega_{p2}}$$

7.5. Các phép biến đổi tần số

Ví dụ 4: Thiết kế bộ lọc chắn dải Butterworth thỏa mãn các yêu cầu sau: Độ lợi trong dải chắn ($100 \leq \omega \leq 150$) $\leq -20\text{dB}$; độ lợi dải thông ($\omega \leq 60$ hoặc $\omega \geq 260$) $\geq -2.2\text{dB}$?