CHƯƠNG 3
TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH VÀ ĐẠO HÀM

TS. Lê Thanh Long
ltlong@hcmut.edu.vn

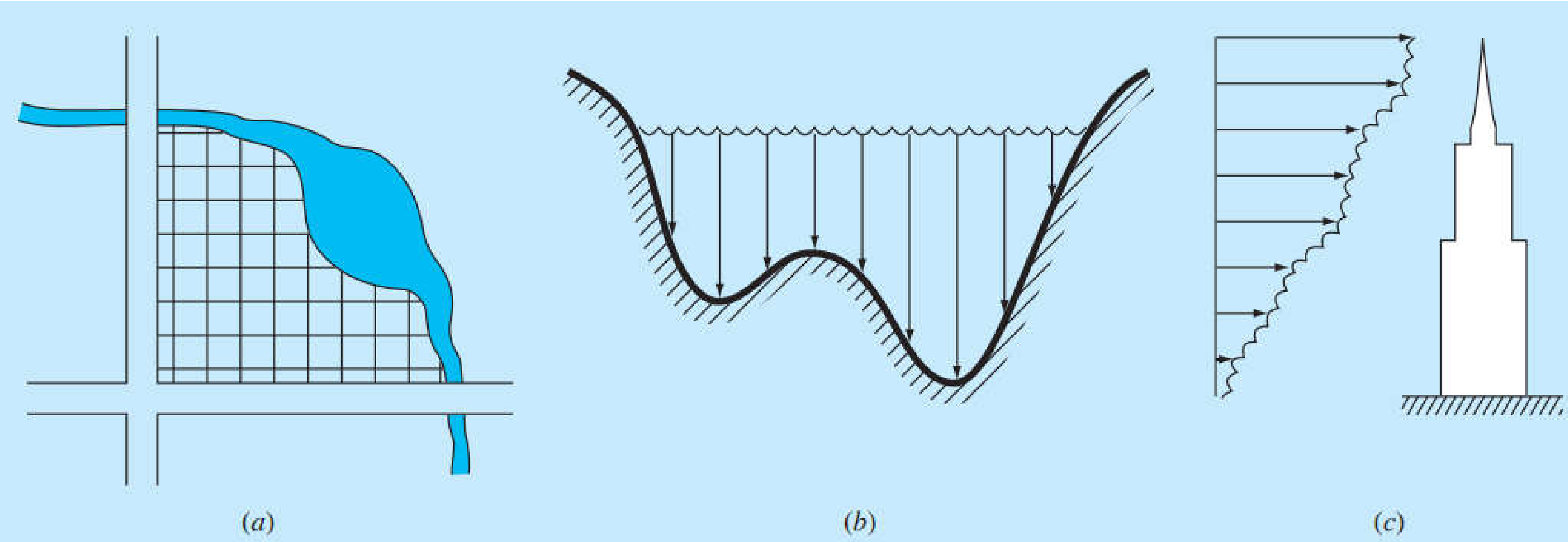
Nội dung

3.1 Tính gần đúng tích phân xác định.

3.2 Tính gần đúng đạo hàm.

3.3 Đa thức nội suy Lagrange.

3.1 Tính gần đúng tích phân xác định



Hình 3.1: *Các ví dụ về ứng dụng tính tích phân trong thực tế*

(a)Tính diện tích một cánh đồng bao quanh bởi 1 con suối uốn lượn và đường đi.

(b)Tính diện tích mặt cắt ngang của sông.

(c)Tính lực tác dụng của cơn gió thổi không đều vào mặt bên tòa nhà.

3.1 Tính gần đúng tích phân xác định

Công thức tích phân Newton-Leibnitz

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

F'(x)=f(x), F là nguyên hàm của f.

Nhưng thường ta phải tính tích phân của hàm số y=f(x) được xác định bằng bảng số. Khi đó khái niệm nguyên hàm không còn ý nghĩa.

3.1 Tính gần đúng tích phân xác định

Công thức tích phân Newton-Cotes

Để tính gần đúng tích phân xác định trên [a,b], ta thay hàm số f(x) bằng đa thức nội suy $f_n(x)$:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx$$

Với

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

3.1 Tính gần đúng tích phân xác định

3.1.1 Công thức hình thang

Dùng chuỗi Taylor bậc nhất để tính gần đúng $f(x)$,

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_1(x)dx$$

Với

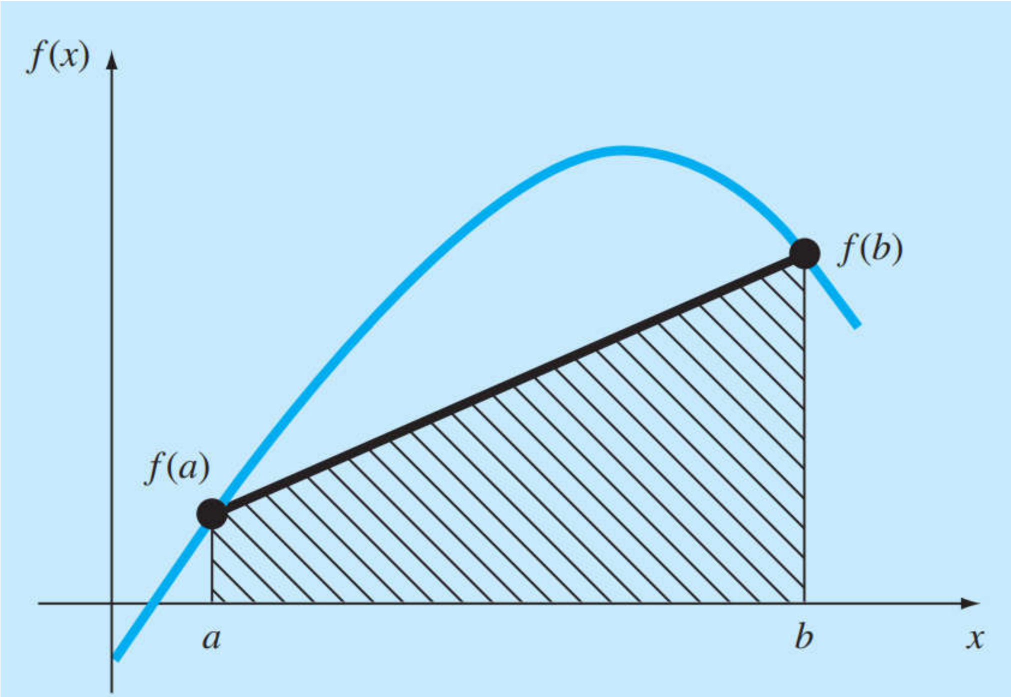
$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Ta được:

$$I \approx \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] = (b - a)\frac{f(b) + f(a)}{2}$$

3.1 Tính gần đúng tích phân xác định

3.1.1 Công thức hình thang



Hình 3.2: *Đồ thị mô tả công thức hình thang*

Công thức hình thang tương đương tính gần đúng diện tích hình thang dưới đường thẳng nối f(a) và f(b).

Sai số khi áp dụng công thức hình thang để tính tích phân xác định:

$$\boxed{-\frac{(b-a)^3}{12}\overline{f}''(x)}$$

3.1 Tính gần đúng tích phân xác định

3.1.1 Công thức hình thang

Ví dụ 3.1: Dùng CT hình thang để tính tích phân của hàm 0,2+25x từ a=0 đến b=2

Giải:

$$f(a) = f(0) = 0,2$$
$$f(b) = f(2) = 50,2$$

$$I = (b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2} = (2-0)\frac{0,2+50,2}{2} = 50,4$$

Tính chính xác tích phân $\int_0^2 f(x)dx = (0,2x+12,5x^2)\Big|_0^2 = 50,4$

Vì f(x) là hàm tuyến tính bậc nhất, khi áp dụng CT hình thang cho kết quả chính xác.

3.1 Tính gần đúng tích phân xác định

3.1.1 Công thức hình thang

Ví dụ 3.2: Dùng CT hình thang tính tích phân của $0{,}2 + 25x + 3x^2$ từ a=0 đến b=2

Giải:

$$f(0) = 0,2; f(2) = 62,2$$

$$I = (b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2} = 62,4$$

Tính chính xác tích phân:

$$\int_0^2 f(x)dx = (0,2x + 12,5x^2 + x^3)\Big|_0^2 = 58,4$$

Sai số tương đối giữa 2 kết quả:

$$\delta_T = \left|\frac{58,4 - 62,4}{58,4}\right| 100\% = 6,85\%$$

3.1 Tính gần đúng tích phân xác định

3.1.1 Công thức hình thang

Để giảm thiểu sai số khi dùng CT hình thang, ta áp dụng phương pháp:

- Chia đoạn [a,b] thành n phần bằng nhau bởi các điểm: $x_0, x_1, x_2 \ldots,$ x_n với bước chia đều $h = \frac{b-a}{n}$

Công thức:

$$I \approx (b-a)\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}$$

Sai số:

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\overline{f}''(x)$$

3.1 Tính gần đúng tích phân xác định

3.1.1 Công thức hình thang

Ví dụ 3.3: Dùng CT hình thang tính tích phân và sai số của $f(x) = 0{,}2 + 25x + 3x^2$ từ a=0 đến b=2, với số khoảng chia n=2

Giải:

$$n = 2; h = \frac{(b-a)}{n} = 1$$

$$f(0) = 0,2; f(1) = 28,2; f(2) = 62,2$$

$$I = (b-a)\frac{f(0) + 2f(1) + f(2)}{2n} = 59,4$$

3.1 Tính gần đúng tích phân xác định

3.1.1 Công thức hình thang

Ví dụ 3.3

Tính sai số:

$$f''(x) = 6$$

$$\overline{f}''(x) = \frac{\int_0^2 6dx}{2-0} = 6$$

$$E_a = -\frac{(2-0)^3}{12\text{x}2^2}6 = -1$$

Kết quả chính xác là $59{,}4 - 1 = 58{,}4$

Sai số tương đối: 1,71%

3.1 Tính gần đúng tích phân xác định

3.1.1 Công thức hình thang

Ví dụ 3.4: Chia đoạn [1,5] làm 4 đoạn. Tính gần đúng tích phân dùng công thức hình thang. Sau đó tính sai số.

$$\int_1^5 \frac{dx}{1+x^2}$$

Giải

x	y
1	$f(1) = 0{,}5000$
2	$f(2) = 0{,}2000$
3	$f(3) = 0{,}1000$
4	$f(4) = 0{,}0588$
5	$f(5) = 0{,}0385$

$$h = \frac{5-1}{4} = 1$$

$$I = \frac{(5-1)}{4}\,\frac{f(1) + 2[f(2) + f(3) + f(4)] + f(5)}{2}$$

$$= 0{,}6281$$

3.1 Tính gần đúng tích phân xác định

3.1.1 Công thức hình thang

Ví dụ 3.4

Tính sai số:

Tìm f''(x)

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{8x^2 - 2(1+x^2)}{(1+x^2)^3}$$

$$\overline{f}''(x) = \frac{\int_1^5 \left(\frac{8x^2 - 2(1+x^2)}{(1+x^2)^3} \right) dx}{5-1} = 0{,}1213$$

Sai số: $$E_a = -\frac{(5-1)^3}{12 \times 4^2} 0{,}1213 = -0{,}0404$$

3.1 Tính gần đúng tích phân xác định

3.1.2 Công thức Simpson

Ngoài việc áp dụng phương pháp chia đoạn cho CT hình thang. Công thức Simpson cũng có thể dùng để tăng độ chính xác của phép tính gần đúng tích phân.

Chia đoạn [a;b] thành n phần đều nhau (với n chẵn: n = 2m)

Công thức: $$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2m} + 4\sum_{k=1}^{m} y_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{m-1} y_{2k} \right]$$

Sai số: $$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\overline{f}^{(4)}$$

3.1 Tính gần đúng tích phân xác định

3.1.2 Công thức Simpson

Ví dụ 3.5: Với n=4, tính tích phân và sai số của hàm:

$$f(x) = 0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

Từ a=0 đến b=0,8. Cho biết kết quả tích phân chính xác là 1,640533.

Giải: h=0,2

f(0)	0,2
f(0,2)	1,288
f(0,4)	2,456
f(0,6)	3,464
f(0,8)	0,232

$$I \approx \frac{0,2}{3}\left[0,2 + 4(1,288 + 3,464) + 2(2,456) + 0,232\right] = 1,623467$$

$$E_T = 1,640533 - 1,623467 = 0,017067$$

$$\varepsilon_T = 1,04\%$$

Sai số kết quả: $E_a = \dfrac{-0.8^5}{180(4)^4}(-2400) = 0,017067$

3.1 Tính gần đúng tích phân xác định

3.1.2 Công thức Simpson

Ví dụ 3.6: Tính gần đúng $\int_0^{0,6} \frac{1}{1+x} dx$ với số khoảng chia n = 6.

Giải

x	y
0	$f(0) = 1$
0,1	$f(0,1) = 0,909$
0,2	$f(0,2) = 0,833$
0,3	$f(0,3) = 0,769$
0,4	$f(0,4) = 0,714$
0,5	$f(0,5) = 0,667$
0,6	$f(0,6) = 0,625$

$$h = \frac{0,6-0}{6} = 0,1$$

$$I = \frac{0,1}{3}\{f(0)+f(0,6)+4[f(0,1)+f(0,3)+f(0,5)]+2[f(0,2)+f(0,4)]\}$$

$$= 0,470$$

3.1 Tính gần đúng tích phân xác định

3.1.2 Công thức Simpson

Ví dụ 3.6

Sai số:

$$f''''(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

$$\overline{f''''}(x) = \frac{\int_0^{0.6} \frac{24}{(1+x)^5} dx}{0,6-0} = 8,47$$

$$E_a = -\frac{0,6^5}{180 \times 6^4} 8,47 = -0,000003$$

=> Kết quả chính xác ≈ 0,469997

EXERCISE

Bài tập 1. Tính gần đúng tích phân:

$$\int_{0}^{\pi/2} (6+3\cos x)dx$$

a) Áp dụng CT hình thang với n=4.
b) Áp dụng công thức Simpson với n=4.
c) Đánh giá sai số tương đối của 2 phương pháp.

Bài tập 1.

Giải

a) Áp dụng công thức hình thang

$$h = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{4} = \pi/8$$

$$x_0 = 0; x_1 = \pi/8; x_2 = \pi/4; x_3 = 3\pi/8; x_4 = \pi/2$$

$$I = \frac{\pi}{8}\frac{f(0) + f(\pi/2) + 2[f(\pi/8) + f(\pi/4) + f(3\pi/8)]}{2}$$

$$= \frac{\pi}{16}[9 + 6 + 2[18 + 3\cos\frac{\pi}{8} + 3\cos\frac{\pi}{4} + 3\cos\frac{3\pi}{8}]$$

$$\approx 12,386$$

Bài tập 1.

Giải

b) Áp dụng công thức Simpson

$$h = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{4} = \pi/8$$

$$x_0 = 0;\ x_1 = \pi/8;\ x_2 = \pi/4;\ x_3 = 3\pi/8;\ x_4 = \pi/2$$

$$I = \frac{\pi}{8}\frac{f(0) + 4[f(\pi/8) + f(3\pi/8)] + 2f(\pi/4) + f(\pi/2)}{3}$$

$$= \frac{\pi}{24}[9 + 4(12 + 3\cos(\pi/8) + 3\cos(3\pi/8)) + 2(6 + 3\cos(\pi/4)) + 6]$$

$$\approx 12,4252$$

Bài tập 1.

Giải

c) Xác định sai số:

KQ:
$$\int_0^{\pi/2}(6+3\cos x)dx = 6\int_0^{\pi/2}dx + 3\int_0^{\pi/2}\cos x dx$$
$$= 3\pi + 3 \approx 12,42478$$

Sai số của CT hình thang:

$$\varepsilon_T = \frac{|12,386 - 12,42478|}{12,42478}100\% = 0,312\%$$

Sai số của CT Simpson:

$$\varepsilon_T = \frac{|12,4252 - 12,42478|}{12,42478}100\% = 0,003\%$$

3.2 Tính gần đúng đạo hàm

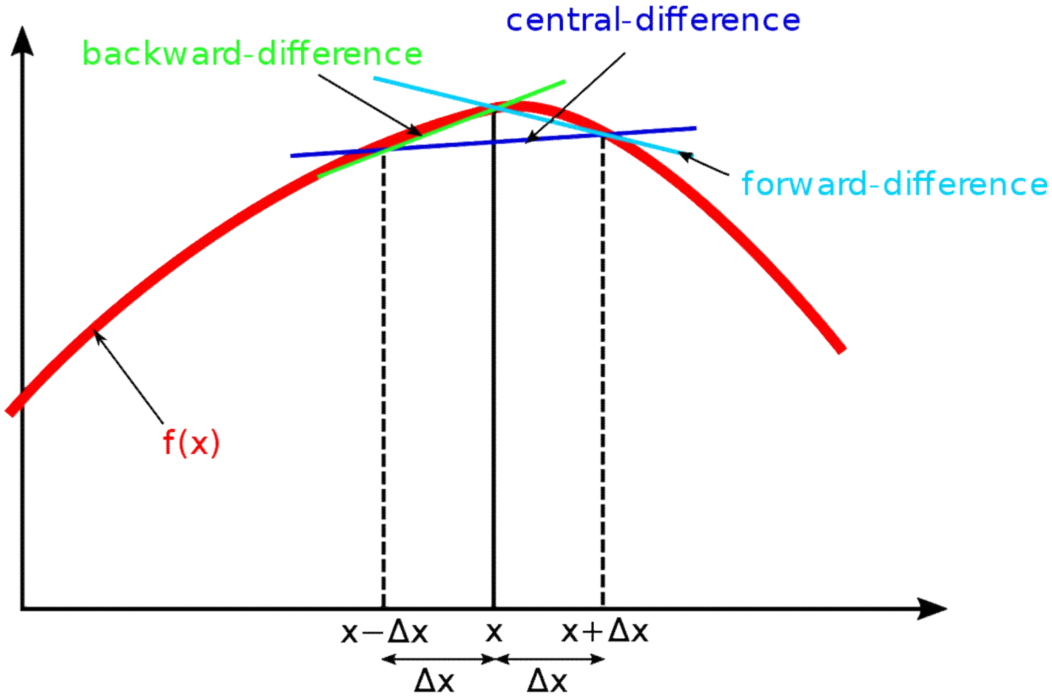
Cho bảng số liệu với các mốc cách đều (h):

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_{n-1}	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n	y_{n-1}

Tính gần đúng giá trị $y'(x_i), y"(x_i)$

3.2 Tính gần đúng đạo hàm

3.2.1 Tính gần đúng đạo hàm cấp 1



Hình 3.3: *Đồ thị mô tả công thức tính đạo hàm cấp 1 sai phân tiến, sai phân lùi và sai phân hướng tâm.*

3.2 Tính gần đúng đạo hàm

3.2.1 Tính gần đúng đạo hàm cấp 1

Công thức sai phân tiến:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

Công thức sai phân lùi:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$$

Công thức sai phân hướng tâm:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$

3.2 Tính gần đúng đạo hàm

3.2.1 Tính gần đúng đạo hàm cấp 1

Ví dụ 3.7: Tính đạo hàm cấp 1 của hàm f(x) tại x=0,5 và h=0,5

$$f(x) = -0,1x^4 - 0,15x^3 - 0,5x^2 - 0,25x + 1,2$$

Giải

$$\begin{cases} x_i = 0,5 \\ x_{i-1} = x_i - h = 0 \\ x_{i+1} = x_i + h = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x_i) = 0,925 \\ f(x_{i-1}) = 1,2 \\ f(x_{i+1}) = 0,2 \end{cases}$$

Công thức sai phân tiến:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} = -1,45$$

Công thức sai phân lùi:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} = -0,55$$

3.2 Tính gần đúng đạo hàm

3.2.1 Tính gần đúng đạo hàm cấp 1

Ví dụ 3.7:

Giải

Công thức sai phân hướng tâm:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} = -1,0$$

Tính chính xác đạo hàm = -0,9125

=> Dùng công thức sai phân hướng tâm và khoảng chia nhỏ để đạt kết quả có sai số bé.

3.2 Tính gần đúng đạo hàm

3.2.2 Tính gần đúng đạo hàm cấp 2

Công thức sai phân tiến:

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$$

Công thức sai phân lùi:

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$$

Công thức sai phân hướng tâm:

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$$

3.2 Tính gần đúng đạo hàm

3.2.2 Tính gần đúng đạo hàm cấp 2

Ví dụ 3.8: Tính đạo hàm cấp 2 của hàm f(x) tại x=0,5 và h=0,25

$$f(x) = -0,1x^4 - 0,15x^3 - 0,5x^2 - 0,25x + 1,2$$

Giải

$$\begin{cases} x_i = 0,5 \\ x_{i-1} = 0,25 \\ x_{i-2} = 0 \\ x_{i+1} = 0,75 \\ x_{i+2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x_i) = 0,925 \\ f(x_{i-1}) = 1,1035 \\ f(x_{i-2}) = 1,2 \\ f(x_{i+1}) = 0,6363 \\ f(x_{i+2}) = 0,2 \end{cases}$$

Dùng CT s.p tiến: $f''(x_i) = -2,362$

Dùng CT s.p lùi: $f''(x_i) = -1,312$

Dùng CT s.p hướng tâm: $f''(x_i) = -1,7632$

So sánh:

Kết quả đạo hàm chính xác = -1,75

EXERCISE

Bài tập 2. Dùng dữ liệu dưới đây để tính vận tốc và gia tốc tại t=10 giây. Dùng công thức sai phân hướng tâm:

t, s	0	2	4	6	8	10	12	14	16
x, m	0	0,7	1,8	3,4	5,1	6,3	7,3	8,0	8,4

Bài tập 2. Giải

- *Vận tốc:*

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$

$$f'(x_5) = \frac{f(x_6) - f(x_4)}{2h}$$

$$f'(10) = \frac{f(12) - f(8)}{2\times 2} = \frac{7,3 - 5,1}{2\times 2} = 0,55(m/s)$$

- *Gia tốc:*

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$$

$$f''(x_5) = \frac{f(x_6) - 2f(x_5) + f(x_4)}{h^2}$$

$$f''(10) = \frac{f(12) - 2f(10) + f(8)}{2^2} = \frac{7,3 - 2\times 6,3 + 5,1}{2^2} = -0,05(m/s^2)$$

EXERCISE

Bài tập 3. Tính gần đúng giá trị y'(1) và y''(1) hàm

$y(x) = cos^4(\sqrt[3]{x})$, với h=0,1.

Kết quả:

$$y'(1) = -0{,}17824017$$
$$y''(1) = 0{,}3573462$$

3.3 Đa thức nội suy Lagrange

Đa thức nội suy Lagrange là một định dạng khác của đa thức Newton để giảm sai số trong quá trình tính toán. Một cách tổng quát, đa thức nội suy Lagrange được viết ngắn gọn như sau:

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

Trong đó:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

3.3 Đa thức nội suy Lagrange

Ví dụ 3.9: Sử dụng đa thức nội suy Lagrange bậc 1 và bậc 2 để tính hàm *f(x)* = *ln(x)* tại *x* = 2 dựa trên dữ liệu cho sẵn như sau:

$$x_0 = 1 \qquad f(x_0) = 0$$
$$x_1 = 4 \qquad f(x_1) = 1,386294$$
$$x_2 = 6 \qquad f(x_2) = 1,791760$$

Giải:

Giá trị của đa thức nội suy Lagrange bậc 1 tại x = 2:

$$f_1(2) = \frac{2-4}{1-4}0 + \frac{2-1}{4-1}1,386294 = 0,4620981$$

Tương tự, giá trị của đa thức nội suy Lagrange bậc 2 tại x = 2:

$$f_2(2) = \frac{(2-4)(2-6)}{(1-4)(1-6)}0 + \frac{(2-1)(2-6)}{(4-1)(4-6)}1,386294 + \frac{(2-1)(2-4)}{(6-1)(6-4)}1,791760 = 0,5658444$$


Thanks
for your attention!
Have a nice day ☺