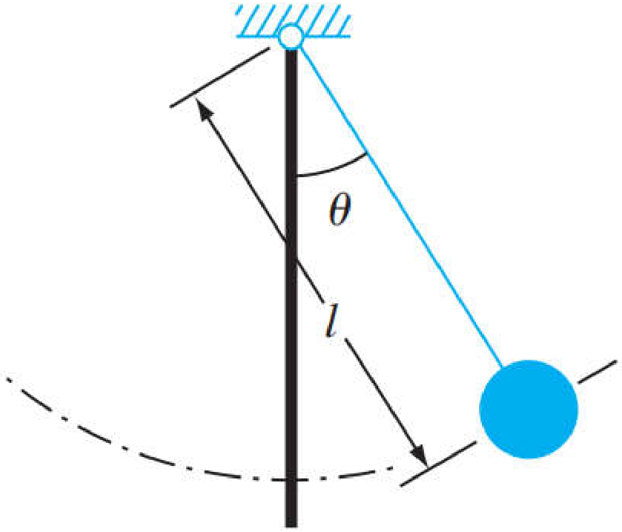
CHƯƠNG 4
GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

TS. Lê Thanh Long
ltlong@hcmut.edu.vn

Nội dung

4.1 Đại cương



Hình 4.1: *Dao động con lắc đơn*

Xét bài toán cơ bản về dao động của con lắc đơn xác định bởi phương trình vi phân bậc 2

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

θ: Góc tạo bởi con lắc và trục thẳng đứng.
g: Hằng số hấp dẫn.
l: Chiều dài con lắc.

4.1 Đại cương

Với giá trị θ, ta xấp xỉ $sin\theta \approx \theta$, khi đó bài toán trở thành tuyến tính:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Với bài toán này ta có thể giải bằng các phương pháp quen thuộc. Tuy nhiên khi giá trị θ lớn, ta không thể xem $sin\theta \approx \theta$. Để tìm nghiệm cho bài toán này, ta cần sử dụng các phương pháp xấp xỉ nghiệm.

4.1 Đại cương

Bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(a) = \alpha \end{cases} \quad a \le t \le b \qquad (1)$$

Với y=y(t) là hàm cần tìm, khả vi trên đoạn [a,b], y_0 là giá trị ban đầu cho trước của y(t) tại t=a.

Với bài toán Cauchy (1) ta chỉ có thể tìm được nghiệm đúng của một số phương trình đơn giản. Đối với trường hợp f(x,y) có dạng bất kỳ thì không có phương pháp giải. Trường hợp có thể tìm ra nghiệm đúng của bài toán Cauchy (1) quá phức tạp nên ít dùng.
Việc tìm ra phương pháp giải đúng bài toán Cauchy có vai trò quan trọng trong thực tế.

4.2 Phương pháp Euler

Để tìm nghiệm gần đúng của bài toán (1), ta chia đoạn [a,b] thành n đoạn bằng nhau

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Khi đó các điểm nút là $t_0 = a, t_k = t_0 + kh, k = 0,1,2,\dots,n, t_n = b$

Giả sử y(t) là nghiệm duy nhất của bài toán (1) có đạo hàm đến cấp 2 liên tục trên đoạn [a,b].

Khi đó với mỗi k=1,2,…,n-1 theo công thức khai triển Taylor trên đoạn $[t_k, t_{k+1}]$:

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + y'(t_k)(t_{k+1} - t_k) + y''(\xi_k)\frac{(t_{k+1} - t_k)^2}{2}$$

Với: $\xi_k \in (t_k, t_{k+1})$

4.2 Phương pháp Euler

Vì y=y(t) là nghiệm của phương trình (1) và $h = t_{k+1} - t_k$ nên ta có:

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + h.f(t_k, y_k) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_k)$$

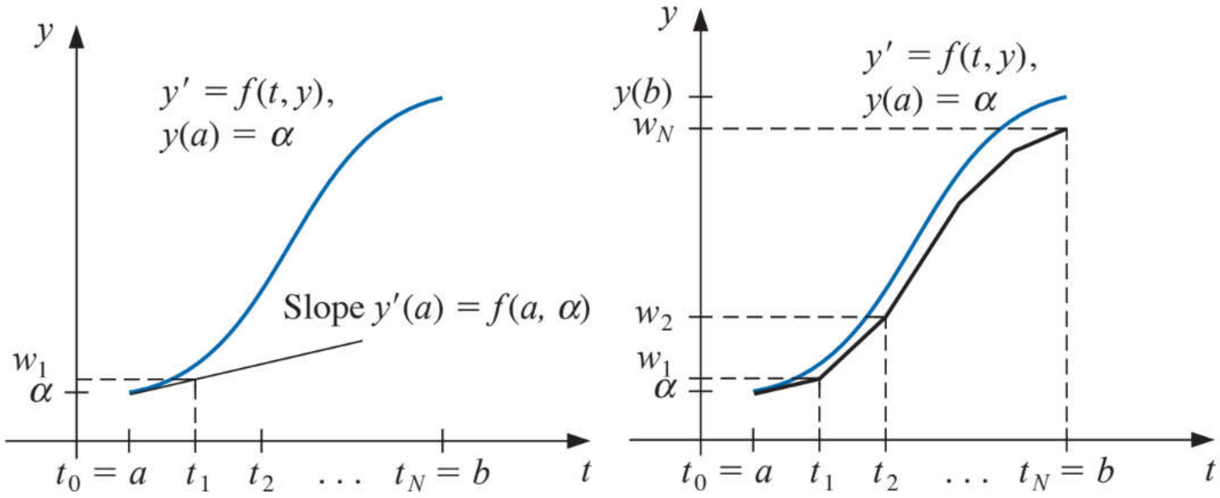
Bằng cách bỏ đi phần dư, ta xấp xỉ $y_k \approx y(t_k)$ với k=1,2,…n, ta có công thức Euler

$$y_0 = \alpha$$

$$y_{k+1} \approx y_k + hf(t_k, y_k),$$

Với k=0,1,2,…,n-1.

4.2 Phương pháp Euler



Hình 4.2: *Ý nghĩa hình học của phương pháp Euler.*

Từ $(t_0,\ y_0) = (a, \alpha)$ thuộc đường cong y=y(t), kẻ tiếp tuyến với đường thẳng cong (có hệ số góc là y'(a)=f(a, α)). Đường tiếp tuyến sẽ cắt t = t_1 tại y_1 chính là giá trị gần đúng của y(t_1).
Tại (t_1, y_1), ta kẻ đường thẳng với hệ số góc f(t_1, y_1) cắt t= t_2 tại y_2 là giá trị gần đúng của y(t_2)

4.2 Phương pháp Euler

Ví dụ 4.1: Sử dụng phương pháp Euler để xấp xỉ nghiệm của bài toán Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = y - t^2 + 1; \quad 0 \le t \le 2 \\ y(0) = 0,5 \end{cases}$$

Với h=0,2. Tại những điểm nút chia so sánh giá trị gần đúng với giá trị chính xác, biết nghiệm chính xác của bài toán là $y(t) = (t+1)^2 - 0{,}5e^t$

4.2 Phương pháp Euler

Ví dụ 4.1

Giải

$$t_k = 0{,}2k, y_0 = 0{,}5$$

Công thức tính nghiệm gần đúng là

$$y_{k+1} = y_k + h(y_k - t_k^2 + 1)$$

Với k=0,1,…,9

Bấm máy: $Y = Y + 0.2(Y - X^2 + 1)$: $X = X + 0.2$

1. CALC Y=0.5=,X=0=
2. Y=,X=0.2=

4.2 Phương pháp Euler

Ví dụ 4.1: Kết quả

k	t_k	y_k	$y(t_k)$	$\|y(t_k) - y_k\|$
0	0.0	0.5000000	0.5000000	0.0000000
1	0.2	0.8000000	0.8292986	0.0292986
2	0.4	1.1520000	1.2140877	0.0620877
3	0.6	1.5504000	1.6489406	0.0985406
4	0.8	1.9884800	2.1272295	0.1387495
5	1.0	2.4581760	2.6408591	0.1826831
6	1.2	2.9498112	3.1799415	0.2301303
7	1.4	3.4517734	3.7324000	0.2806266
8	1.6	3.9501281	4.2834838	0.3333557
9	1.8	4.4281538	4.8151763	0.3870225
10	2.0	4.8657845	5.3054720	0.4396874

Bảng 4.1: *Kết quả Ví dụ 4.1.*

4.2 Phương pháp Euler

Sai số của công thức Euler

Giả sử f là hàm liên tục và thỏa điều kiện

$$\left|f(t,y_1)-f(t,y_2)\right|\le L\left|y_1-y_2\right|$$

Với hằng số L>0 và tồn tại M thỏa

$$y''(t)\le M \qquad \text{Với } t\in[a,b]$$

Khi đó với y(t) là nghiệm chính xác của bài toán giá trị đầu $y'(t)=f(t,y),\quad a\le t\le b,\quad y(a)=\alpha$ và y_0, $y_1,\dots,y_n$ là nghiệm xấp xỉ của bài toán cho bởi công thức Euler, khi đó với mỗi k=0,1,…,n

$$\left|y(t_k)-y_k\right|\le\frac{hM}{2L}\left[e^{L(t_k-a)}-1\right]$$

4.3 Phương pháp Euler cải tiến

Công thức Heun

Trong công thức Euler, thay $f(t_k, y_k)$ bởi $\frac{f(t_k,y_k)+f(t_{k+1},y_{k+1})}{2}$
ta được công thức Heun

$$y(t_{k+1}) \approx y_{k+1} = y_k + h\frac{f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})}{2}$$

Với k=0,1,2,…,n-1

Việc tính toán theo công thức Euler cải tiến rất phức tạp vì cả 2 vế đều chứa y_{k+1} là ẩn cần tìm. Để đơn giản ta thay y_{k+1} ở vế phải bởi

$$y_k + hf(t_k, y_k)$$

4.3 Phương pháp Euler cải tiến

Công thức Heun

Lúc này ta có công thức:

$$y(t_{k+1}) \approx y_{k+1} = y_k + h\frac{f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))}{2}$$

$k = 0,1,2, \dots, n-1$

4.3 Phương pháp Euler cải tiến

Công thức Heun

Ví dụ 4.2

Sử dụng phương pháp Euler cải tiến để xấp xỉ nghiệm của bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = y - t^2 + 1, 0 \le t \le 2 \\ y(0) = 0,5 \end{cases}$$

Với h=0,2. Tại những điểm nút so sánh giá trị gần đúng với giá trị chính xác được cho bởi $y(t) = (t+1)^2 - 0{,}5e^t$

4.3 Phương pháp Euler cải tiến

Công thức Heun

Ví dụ 4.2

Giải: $h = 0{,}2, y_0 = 0{,}5$. Công thức tính nghiệm gần đúng là:

$$y(x_{k+1}) \approx y_{k+1} = y_k + h\frac{f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))}{2}$$

Với k=0,1,…,9

Bấm máy: $Y = Y + 0.1(Y - X^2 + 1 + Y + 0.2(Y - X^2 + 1) - (X + 0.2)^2 + 1);$

$X = X + 0.2$

1. CALC Y=0.5=X=0=
2. Y=,X=0.2

4.3 Phương pháp Euler cải tiến

Ví dụ 4.2: Kết quả

k	t_k	y_k	$y(t_k)$	$\lvert y(t_k) - y_k \rvert$
0	0.0	0.5	0.5000000	0.0000000
1	0.2	0.826	0.8292986	0.0032986
2	0.4	1.20692	1.2140877	0.0071677
3	0.6	1.6372424	1.6489406	0.0116982
4	0.8	2.110235728	2.1272295	0.0169938
5	1.0	2.617687588	2.6408591	0.0231715
6	1.2	3.149578858	3.1799415	0.0303627
7	1.4	3.693686206	3.7324000	0.0387138
8	1.6	4.235097172	4.2834838	0.0483866
9	1.8	4.755618549	4.8151763	0.0595577
10	2.0	5.23305463	5.3054720	0.0724173

4.4 Phương pháp Runge - Kutta

Công thức Runge – Kutta bậc 2

Hai nhà toán học người Đức Runge và Kutta đã đề xuất một phương pháp để nâng cao độ chính xác nghiệm của bài toán phương trình vi phân.

Ý tưởng của phương pháp này là tăng độ chính xác của giá trị y_{tk+1} tại điểm $t_k + h$, ta dựa vào một vài điểm trung gian trong đoạn $[t_k, t_k + h]$ như điểm $t_k + h/2$.

Công thức:

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + hf(t_k + \frac{h}{2}, y(t_k) + \frac{h}{2} f(t_k, y(t_k))$$

4.4 Phương pháp Runge - Kutta

Công thức Runge – Kutta bậc 4

Ta có thể xây dựng phương pháp Runge – Kutta với các bậc cao, phổ biến nhất là bậc 4.

$$\begin{cases} y_{k+1} = y(t_k + h) \approx y_k + \dfrac{1}{6}(K_1^k + 2K_2^k + 2K_3^k + K_4^k) \\ K_1^k = hf(t_k, y_k) \\ K_2^k = hf(t_k + \dfrac{h}{2}, y_k + \dfrac{K_1^k}{2}) \\ K_3^k = hf(t_k + \dfrac{h}{2}, y_k + \dfrac{K_2^k}{2}) \\ K_4^k = hf(t_k + h, y_k + K_3^k) \end{cases}$$

4.4 Phương pháp Runge - Kutta

Công thức Runge – Kutta bậc 4

Ví dụ 4.3: Sử dụng phương pháp Runge – Kutta bậc 4 để xấp xỉ nghiệm của bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y - x^2 + 1, & 0 \le x \le 2 \\ y(0) = 0,5 \end{cases}$$

Với n=10. Tại những điểm nút chia so sánh giá trị gần đúng với giá trị chính xác, biết nghiệm chính xác của bài toán là $y(x) = (x+1)^2 - 0{,}5e^x$

4.4 Phương pháp Runge - Kutta

Công thức Runge – Kutta bậc 4

Ví dụ 4.3: Giải

Với n=10 thì h=0.2,$t_k = 0.2k, y_0 = 0.5$. Ta có:

$$K_1^k = hf(t_k, y_k) = 0.2(y_k - 0.04k^2 + 1),$$

$$K_2^k = hf\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_1^k}{2}\right) = h\left[y_k + \frac{K_1^k}{2} - \left(t_k + \frac{h}{2}\right)^2 + 1\right],$$

$$K_3^k = hf\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_2^k}{2}\right) = h\left[y_k + \frac{K_2^k}{2} - \left(t_k + \frac{h}{2}\right)^2 + 1\right],$$

$$K_4^k = hf(t_k + h, y_k + K_3^k) = h[y_k + K_3^k - (x_k + h)^2 + 1].$$

Công thức tính: $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(K_1^k + 2K_2^k + 2K_3^k + K_4^k)$

Với k=0,1,…,9

4.4 Phương pháp Runge - Kutta

Công thức Runge – Kutta bậc 4

Ví dụ 4.3: Bấm máy $0.2(Y - X^2 + 1)$

Tính K_1^0: $\mathrm{CALC\ X} = 0, \mathrm{Y} = 0.5 \Rightarrow K_1^0\ Shift - STO - A$

Tính K_2^0: $\mathrm{CALC\ X} = 0 + 0.2 \div 2, \mathrm{Y} = 0.5 + \mathrm{A} \div 2 \Rightarrow K_2^0\ Shift - STO - B$

Tính K_3^0: $\mathrm{CALC\ X} = 0 + 0.2 \div 2, \mathrm{Y} = 0.5 + \mathrm{B} \div 2 \Rightarrow K_3^0\ Shift - STO - C$

Tính K_4^0: $\mathrm{CALC\ X} = 0 + 0.2, \mathrm{Y} = 0.5 + \mathrm{C} \Rightarrow K_4^0\ Shift - STO - D$

4.4 Phương pháp Runge - Kutta

Công thức Runge – Kutta bậc 4

Ví dụ 4.3: Bấm máy

$$y(0.2) \approx y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(K_1^0 + 2K_2^0 + 2K_3^0 + K_4^0)$$

$$= 0,5 + \frac{1}{6}(A + 2B + 2C + D) \approx 0,8292933$$

Shift – STO - F

4.4 Phương pháp Runge - Kutta

Công thức Runge – Kutta bậc 4

Ví dụ 4.3: Kết quả

k	x_k	y_k	$y(x_k)$	$\|y(x_k) - y_k\|$
0	0.0	0.5000000	0.5000000	0.0000000
1	0.2	0.8292933	0.8292986	0.0000053
2	0.4	1.2114362	1.2140877	0.0000114
3	0.6	1.6404175	1.6489406	0.0026515
4	0.8	2.1088953	2.1272295	0.0183342
5	1.0	2.6079021	2.6408591	0.032957
6	1.2	3.1264849	3.1799415	0.0000474
7	1.4	3.6512660	3.7324000	0.0000599
8	1.6	4.1659056	4.2834838	0.0000743
9	1.8	4.6504464	4.8151763	0.0000906
10	2.0	5.0805126	5.3054720	0.0001089

EXERCISE

Bài tập 1: Cho bài toán Cauchy như dưới đây. Sử dụng công thức Runge-Kutta cấp 4 hãy xấp xỉ y(1,2) với bước h=0.2

$$\begin{cases} y' = 2x + x\sin(x+2y), x \geq 1 \\ y(1) = 2,4 \end{cases}$$

Bài tập 1: Giải

Đặt f(X,Y)=2X+Xsin(X+2Y)

$x_0 = 1; y_0 = 2,4$

Nhập vào máy tính hàm h.f(X,Y)

"0.2(2X+Xsin(X+2Y))"

"CALC"

X	Y	STO
x_0	y_0	A
$x_0+h\div2$	$y_0+A\div2$	B
$x_0+h\div2$	$y_0+B\div2$	C
x_0+h	y_0+C	D

Ta có:

$$y_1 = y_0 + (A + 2B + 2C + D) \div 6$$

Đáp số: y(1,2)=2,8449


Thanks
for your attention!
Have a nice day ☺