CHƯƠNG 2
CÁC PHƯƠNG PHÁP SỐ TRONG ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

TS. Lê Thanh Long
ltlong@hcmut.edu.vn

Nội dung

2.1. Ma trận và định thức.

2.2. Hệ phương trình đại số tuyến tính.

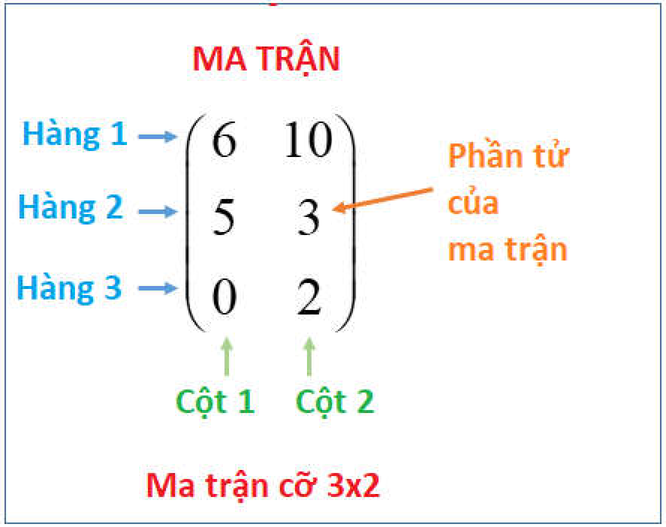
2.3. Giá trị riêng và vector riêng của ma trận.

2.1. MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

- MA TRẬN
- ĐỊNH THỨC CỦA MA TRẬN
- TÍNH CHẤT CỦA ĐỊNH THỨC
- CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH ĐỊNH THỨC
- MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

MA TRẬN

Ma trận A cỡ *m x n* trên trường K (thực hoặc phức) là một bảng hình chữ nhật gồm m hàng và n cột. Ký hiệu: $A = (a_{ij})_{m \times n}$



Phần tử a_{ij} (i=1…m;j=1…n) là *phần tử hàng thứ i, cột thứ j* của ma trận A

MA TRẬN ĐƯỜNG CHÉO

Là ma trận vuông mà các phần tử ngoại trừ đường chéo chính đều bằng 0

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

MA TRẬN ĐƠN VỊ

Là mà trận đường chéo mà các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MA TRẬN HÀNG

Ma trận chỉ có 1 hàng

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

MA TRẬN CỘT

Ma trận chỉ có 1 cột

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

MA TRẬN BẬC THANG

Là mà trận có đường chéo chia ma trận làm 2 phần, tất cả các phần tử của 1 trong 2 phần đó đều bằng 0

MA TRẬN TAM GIÁC TRÊN

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

MA TRẬN TAM GIÁC DƯỚI

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

MA TRẬN ĐỐI

Ma trận - A= $(-a_{ij})_{m \times n}$ được gọi là *ma trận đối* của ma trận A

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ là ma trận đối của } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

TÍNH CHẤT

Cho A, B, C là những ma trận cùng cỡ:

1) $A + B = B + A$

2) $A + (B + C) = (A + B) + C$

3) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, \forall \alpha \in K$

4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A, \forall \alpha, \beta \in K$

5) $A + 0 = 0 + A = A$

ĐỊNH THỨC

Định thức ma trận vuông $A = (a_{ij})_n$ là một số, kí hiệu bởi
$\det(A) = |a_{ij}|_n = |A|$

Bù đại số của phần tử a_{ij} là

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} \text{định thức thu được từ A} \\ \text{bỏ đi hàng i, cột j} \end{vmatrix}_{n-1}$$

TÍNH CHẤT ĐỊNH THỨC

1) $\det(A^T) = \det(A)$

2) det(AB) = det(A).det(B)

3) $|\alpha A| = \alpha^n |A|$

4) $|A^m| = |A|^m$

5) A có 1 hàng (hoặc cột) bằng 0 thì |A| = 0

6) A có 2 hàng (hoặc cột) tỷ lệ thì |A| = 0

7) det(A+B) ≠ det(A) + det(B)

TÍNH ĐỊNH THỨC

a) Tính định thức bằng quy nạp

$A = (a_{11}) \Rightarrow |A| = a_{11}$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

...

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}_n \Rightarrow |A| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{1n} A_{1n}$

VÍ DỤ:

Tính định thức của: $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Giải:

$$\det(A) = a_{11}\,A_{11} + a_{12}\,A_{12} + a_{13}\,A_{13}$$

$$= 1\,A_{11} + 2\,A_{12} - 3\,A_{13}$$

$$= 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 12 - 16 + 15 = 11$$

b) Tính định thức bằng khai triển 1 hàng hoặc 1 cột bất kỳ

Tính định thức của:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Khai triển theo hàng 3:

$$\det(A) = -3(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3(-3) = 9$$

Tính định thức của: $B = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}$

Khai triển theo cột 2:

$$\det(B) = -3(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{khai\ triển\ theo\ hàng\ 1}$$

$$=3(3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 1\,(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$4(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix})$$

$$= 3(51+18\text{-}40) = 87$$

Tính định thức của ma trận tam giác = tích các phần tử trên đường chéo chính.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1.2.3 = 6$$

c) Tính định thức bằng biến đổi sơ cấp

Nguyên tắc:

1. Chọn 1 hàng (hoặc 1 cột tùy ý).

2. Chọn 1 phần tử khác 0 của hàng (cột) đó. Dùng biến đổi sơ cấp khử tất cả các phần tử khác.

3. Khai triển theo hàng (cột) đã chọn.

Ví dụ:

$$I=\begin{vmatrix}3&2&-1&1\\2&3&-2&0\\-3&1&4&-2\\4&1&3&1\end{vmatrix}\xrightarrow[h_4-h_1]{h_3+2h_1}\begin{vmatrix}3&2&-1&1\\2&3&-2&0\\3&5&2&0\\1&-1&4&0\end{vmatrix}\xrightarrow{khai\ triển\ theo\ cột\ 4}$$

$$-1\begin{vmatrix}2&3&-2\\3&5&2\\1&-1&4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&3&-2\\5&8&0\\5&5&0\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}5&8\\5&5\end{vmatrix}=-30$$

TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỊNH THỨC

Công thức tính ma trận nghịch đảo : $A^{-1} = \frac{1}{|A|}.P_A$

Với:

P_A: ma trận phụ hợp của ma trận vuông A

TÍNH CHẤT

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$P_A = |A|^{n-1}$$

$$r(P_A) = \begin{cases} n, \text{nếu } r(A) = n \\ 1. \text{nếu } r(A) = n-1 \\ 0, \text{nếu } r(A) < n-1 \end{cases}$$

Tìm ma trận nghịch đảo của:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Giải

det(A) = -2 $\neq$ 0 => A khả nghịch

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

Tương tự:

$A_{21} = 4$; $A_{22} = -3$; A_{32} = -1; $A_{13} = -2$; A_{23} = 1; $A_{33} = 1$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}P_A = \frac{1}{-2}\begin{vmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

2.2 HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

a) Phương pháp trực tiếp

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + 3 \\ 3(x_2 + 3) - 4x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + 3 \\ x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7 \\ -x_1 + 4x_2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 7 - 2x_1 \\ -x_1 + 4(7 - 2x_1) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 7 - 2x_1 \\ x_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

b) Phương pháp khử Gauss- Jordan

$$\boxed{\overline{A} = [A \mid B]}$$

Bước 1: Lập ma trận $\overline{\mathrm{A}}$
Bước 2: Dùng biến đổi sơ cấp chuyển về ma trận bậc thang
Bước 3: Giải và biện luận:

r(A) = r($\overline{\mathrm{A}}$) = n: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất.
r(A) = r($\overline{\mathrm{A}}$) < n: Hệ phương trình có vô số nghiệm.
r(A) ≠ r($\overline{\mathrm{A}}$): Hệ phương trình vô nghiệm

Giải HPT theo phương pháp Gauss

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -7 \\ 2x_1 - 9x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 11x_2 - 7x_3 = 17 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 4 & -7 \\ 2 & -9 & -1 & 4 \\ 3 & -11 & -7 & 17 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -9 & 18 \\ 0 & 4 & -19 & 38 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -9 & 18 \\ 0 & 0 & 17 & -34 \end{array}\right]$$

$$=> \begin{cases} x_1 = 5x_2 - 4x_3 - 7 = 1 \\ x_2 = 9x_3 + 18 = 0 \\ x_3 = -34/17 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + mx_2x_3 = m \\ x_1 + x_2 + mx_3 = m^2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m \\ m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m^2 & m^2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m \\ 0 & 1-m^2 & 1-m & 1-m^2 \\ 0 & 1-m^2 & m-1 & m^2-m \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m \\ 0 & 1-m & m-1 & m^2-m \\ 0 & 1-m^2 & 1-m & 1-m^2 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m \\ 0 & 1-m & m-1 & m^2-m \\ 0 & 0 & (1-m)(m+2) & (1-m)(1+m)^2 \end{array}\right]$$

=>

*m=1 => $r(A) = r(\bar{A}) = 1 < 3$: VSN

*m=-2 => $r(A) \neq r(\bar{A}) = 2$: VN

*$m \neq 1;-2$ => $r(A) = r(\bar{A}) = 3 = n$: nghiệm duy nhất

Tiếp tục giải nghiệm tại các trường hợp m=1,m=-2

c) Phương pháp Cramer (chỉ dùng khi số ẩn bằng số phương trình)

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}; i = \overline{1 \ldots n}$$

Ví dụ: $x_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|}; x_2 = \dfrac{|A_2|}{|A|}; x_3 = \dfrac{|A_3|}{|A|}$

det(A) $\neq$ 0: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

det(A) = 0:

+ det(A_i) $\neq$ 0: Hệ phương trình vô nghiệm.

+ det(A_i) = 0: Hệ phương trình không có nghiệm duy nhất (dùng Gauss)

Giải HPT theo phương pháp Cramer:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} => |A| = 30; A_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} => |A_1| = 30$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} => |A_2| = 30; A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} => |A_3| = 30$$

$$=> \begin{cases} x_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|} = \dfrac{30}{30} = 1 \\ x_2 = \dfrac{|A_2|}{|A|} = \dfrac{30}{30} = 1 \\ x_3 = \dfrac{|A_3|}{|A|} = \dfrac{30}{30} = 1 \end{cases}$$

Giải HPT theo phương pháp Cramer:

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = m \\ x_1 + x_2 + mx_3 = m^2 \end{cases}$$

$$A = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} \Rightarrow \det(A) = (m-1)^2(m+2)$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{vmatrix}; A_2 = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m^2 & m \end{vmatrix}; A_3 = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & m^2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A_1) = -(m-1)^2(m+1); \det(A_2) = (m-1)^2; \det(A_3) = (m-1)^2(m+1)^2$$

det(A) ≠ 0 => m ≠ 1; m ≠ -2: Hệ có nghiệm duy nhất

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-(m-1)^2(m+1)}{(m-1)^2(m+2)} = -\frac{m+1}{m+2}$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{(m-1)^2}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{1}{m+2}$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{(m-1)^2(m+1)^2}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{(m+1)^2}{m+2}$$

det(A) = 0 => m = 1; m = -2:

m = -2: $\det(A_1)$; $\det(A_2)$; $\det(A_3) \neq 0$: Hệ vô nghiệm

m = 1: $\det(A_1) = \det(A_2) = \det(A_3) = 0$: Giải theo Gauss

HPT trở thành:

r(A) = r($\overline{\text{A}}$) < n: Hệ có VSN

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \alpha - \beta \\ x_2 = \alpha \qquad ;\alpha, \beta \in R \\ x_3 = \beta \end{cases}$$

d) Phương pháp Cholesky

AX=B

Ma trận vuông A, đối xứng và xác định dương $A = C.C^T$

Các phần tử của C được xác định:

$$c_{11} = \sqrt{a_{11}}; c_{i1} = \frac{a_{i1}}{c_{11}} (2 \le i \le n)$$

$$c_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik}^2}; (1 < i \le n)$$

$$c_{ij} = \frac{1}{c_{jj}} (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{ik} c_{jk}); (1 < j < n)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &CY = B \Rightarrow Y = C^{-1}B \\ &C^T X = Y \Rightarrow X = (C^T)^{-1} Y \end{aligned}}$$

Giải HPT theo phương pháp Cholesky:

$$AX = B; A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -2 & 5 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix}; X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}; B = \begin{vmatrix} 7 \\ -12 \\ -12 \end{vmatrix}$$

Giải

A là ma trận đối xứng

$\Delta_1 = 2 > 0; \Delta_2 = 6 > 0; \Delta_3 = 1 > 0$ => A là ma trận xác định dương

$$A = C.C^T = \begin{vmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ 0 & c_{22} & c_{32} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -2 & 5 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$c_{11}.c_{11} = 2 \Rightarrow c_{11} = \sqrt{2}; c_{11}.c_{21} = -2 \Rightarrow c_{21} = \frac{-2}{c_{11}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}; c_{11}.c_{31} = -3 \Rightarrow c_{31} = \frac{-3}{c_{11}} = \frac{-3}{\sqrt{2}}$$

$$c_{21}^2 + c_{22}^2 = 5 \Rightarrow c_{22} = \sqrt{5 - c_{21}^2} = \sqrt{5-2} = \sqrt{3}$$

$$c_{21}.c_{31} + c_{22}.c_{32} = 4 \Rightarrow c_{32} = \frac{1}{c_{22}}(4 - c_{21}c_{31}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(4-3) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{33}^2 \Rightarrow c_{33} = \sqrt{5 - c_{31}^2 - c_{32}^2} = \sqrt{5 - 9/2 - 1/3} = 1/\sqrt{6}$$

$$C = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 \\ -3/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{vmatrix}; C^T = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -3/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{6} \end{vmatrix}$$

$$CY = B => Y = C^{-1}B = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 \\ -3/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 7 \\ -12 \\ -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7/\sqrt{2} \\ -5/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} \end{vmatrix}$$

$$C^T X = Y => X = (C^T)^{-1} Y = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -3/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{6} \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 7/\sqrt{2} \\ -5/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

2.3 GIÁ TRỊ RIÊNG, VECTOR RIÊNG

Trị riêng – Vec tơ riêng của ma trận vuông A:

Số λ được gọi là trị riêng của ma trận A nếu tồn tại vec tơ khác không thỏa: $Ax = \lambda x$

Khi đó x gọi là vec tơ riêng ứng với trị riêng λ của ma trận A

Các khái niệm cơ bản:

X ≠ 0 là VTR của A nếu Ax cùng phương với x

Tìm TR-VTR của ma trận vuông

Bước 1: Lập phương trình đặc trưng det$(A - \lambda I)$= 0.

Bước 2: Giải phương trình đặc trưng tìm trị riêng.

Bước 3: Với mỗi TR λ_i , giải hệ $(A - \lambda_i I)x = 0$

Tìm VTR ứng với TR λ_i

Ví dụ:

$A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 6 & 5\end{pmatrix}, \lambda_1=-1, \lambda_2=3.$ Số nào là trị riêng của A?

$Ax=\lambda_1 x$:

$$\begin{pmatrix}3 & 4\\ 6 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}3x_1+4x_2=-x_1\\ 6x_1+5x_2=-x_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x_1+4x_2=0\\ 6x_1+6x_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=\alpha\\ x_2=-\alpha\end{cases}$$

$x=\begin{pmatrix}\alpha\\ -\alpha\end{pmatrix}, \alpha \neq 0$ là các VTR ứng với TR λ = -1 của A

$Ax=\lambda_2 x$:

$$\begin{pmatrix}3 & 4\\ 6 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}3x_1+4x_2=3x_1\\ 6x_1+5x_2=3x_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x_2=0\\ 6x_1+2x_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=0\\ x_2=0\end{cases}$$

Vì hệ có nghiệm duy nhất $x=0$ nên $\lambda_2=3$ không là TR của A

Các khái niệm cơ bản:

1) Bội đại số của trị riêng λ_i là bội nghiệm của λ_i trong phương trình đặc trưng.

2) Không gian con riêng của trị riêng λ_i là không gian nghiệm của hệ $(A - \lambda_i I)x = 0$, kí hiệu là E_{λ_i}.

3) Bội hình học của λ_i là số chiều của E_{λ_i}.

Ví dụ:

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Tìm tất cả TR, cơ sở và chiều của KG con riêng tương ứng

Giải: Phương trình đặc trưng det$(A - \lambda I)$= 0

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(3-\lambda)-2.4=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \text{ Nghiệm đơn BĐS} = 1 \\ \lambda_2 = 5 \text{ Nghiệm đơn BĐS} = 1 \end{array}\right.$$

Với λ = -1. Giải hệ $(A - \lambda_1 I)x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1-(-1) & 4 & 0 \\ 2 & 3-(-1) & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cơ sở của E_{-1} là $\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ và BHH = dim(E_{-1}) =1

Với $\lambda = 5$. Giải hệ $(A - \lambda_2 I)x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cơ sở của E_5 là $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ và BHH = dim(E_5) =1

Thanks
for your attention!

Have a nice day ☺