CHƯƠNG 6
PHƯƠNG PHÁP SỐ VÀ CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN TRONG CƠ HỌC

TS. Lê Thanh Long
ltlong@hcmut.edu.vn

Nội dung

6.1 Các khái niệm cơ bản trong cơ học

6.2 Quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị

6.3 Luật vật liệu đẳng hướng, bất đẳng hướng

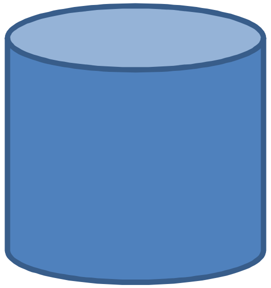
6.4 Nguyên lý cực trị thế năng toàn phần

6.1. Các khái niệm cơ bản trong cơ học

- **Cơ học vật rắn** nghiên cứu ***các ứng xử*** của vật rắn dưới tác dụng của các ***lực từ bên ngoài*** (ngoại lực). Dưới tác động của ngoại lực, vật rắn (ở trạng thái cân bằng cơ học hay chuyển động) có xu hướng thay đổi hình dáng so với trước khi chịu tác dụng của lực và được gọi là biến dạng, khi đó trong vật xuất hiện ứng suất để chống lại sự biến dạng.
- **Cơ học vật rắn biến dạng** nghiên cứu những ***dịch chuyển tương đối*** giữa các chất điểm thuộc vật rắn khi nó chịu tác dụng bởi ***hệ lực cân bằng***. Từ đó ta có thể tính toán sức chịu đựng của vật liệu

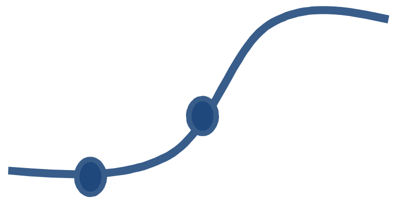
6.1. Các khái niệm cơ bản trong cơ học

- **Khối:** được bao bọc bởi các mặt phẳng
- **Tấm vỏ:** tập hợp của vô số đoạn thẳng, thể hiện một mặt của vật thể, khối rắn, vỏ, v.v
- **Đường:** tập hợp của vô số điểm



Khối

Tấm vỏ

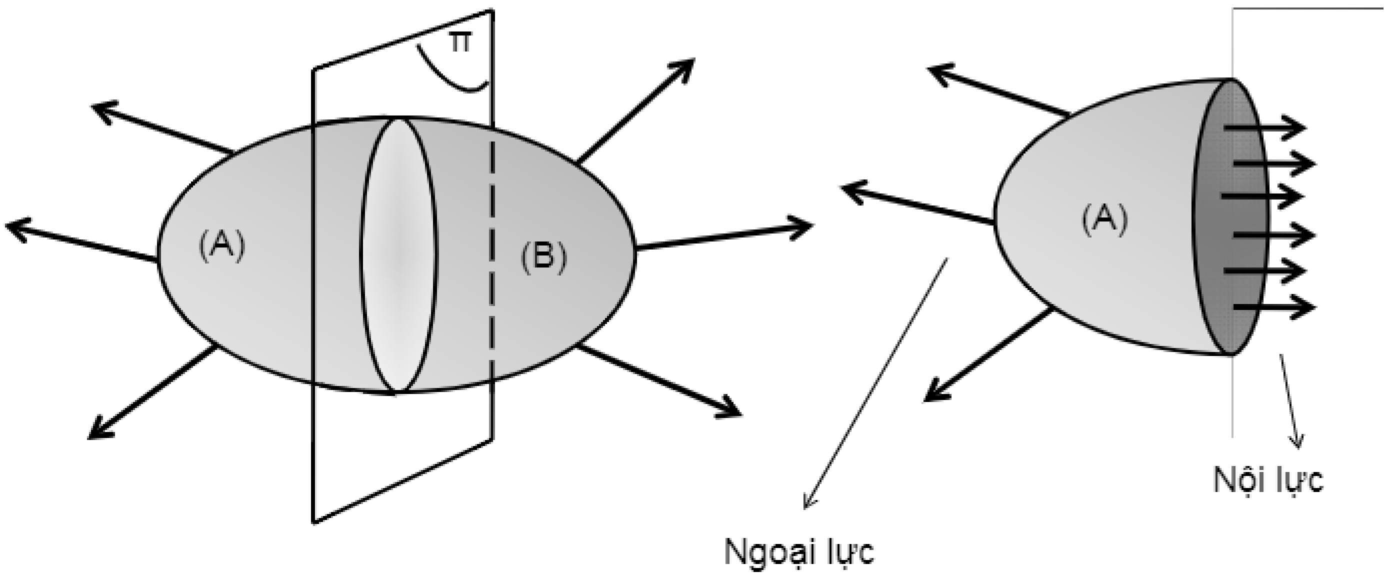


Đường

6.1. Các khái niệm cơ bản trong cơ học

- **Nội lực:**

Nội lực là độ tăng của lực liên kết giữa các phần tử thuộc vật rắn khi vật thể chịu tác dụng của hệ lực cân bằng



6.1. Các khái niệm cơ bản trong cơ học

- **Ứng suất:**

Xét một diện tích rất nhỏ ΔF tại một điểm C trên mặt cắt của phần A.

Hợp lực của nội lực trên ΔF là $\Delta\vec{P}$

Định nghĩa ứng suất trung bình tại C:

$$\vec{p}_{tb} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta F}$$

Ứng suất thực tại C:

$$\vec{p} = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta F} = \frac{d\vec{P}}{dF}$$

6.1. Các khái niệm cơ bản trong cơ học

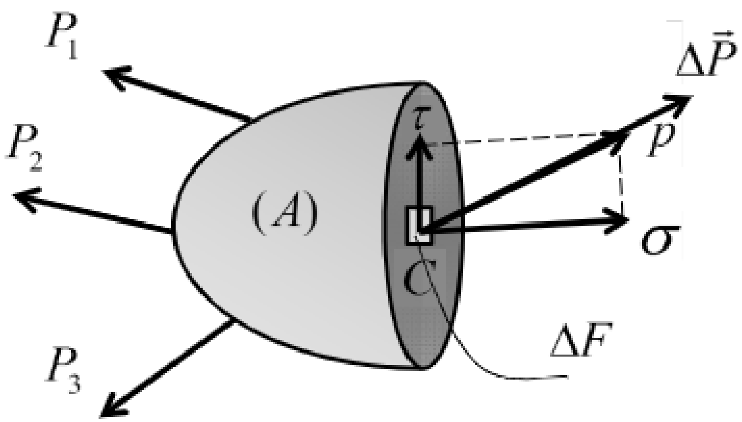
- **Ứng suất:**

Ứng suất p được phân thành 2 thành phần:

σ: Ứng suất pháp hướng theo pháp tuyến mặt cắt

τ: Ứng suất tiếp nằm trong mặt cắt

$$p^2 = \sigma^2 + \tau^2$$

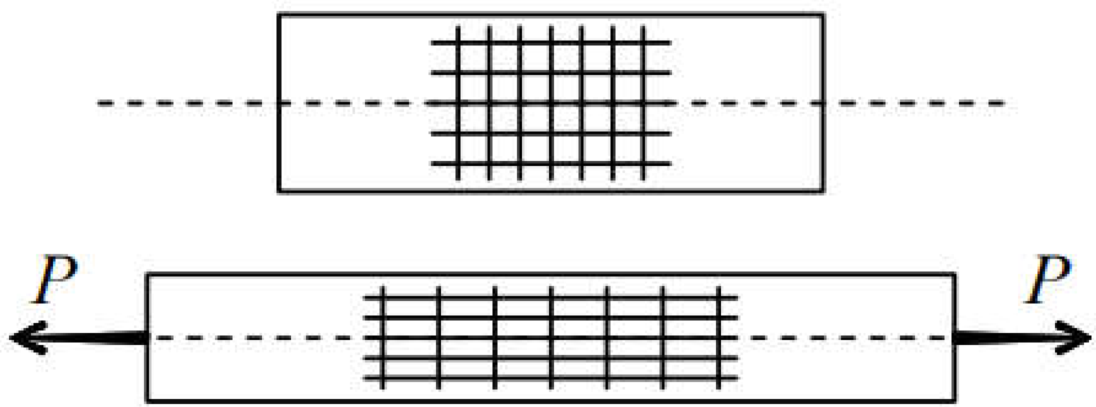


6.1. Các khái niệm cơ bản trong cơ học

- **Biến dạng:**

➢ Biến dạng dọc: biến dạng dài theo phương dọc trục thanh

➢ Biến dạng ngang: biến dạng theo phương vuông góc với trục thanh



6.1. Các khái niệm cơ bản trong cơ học

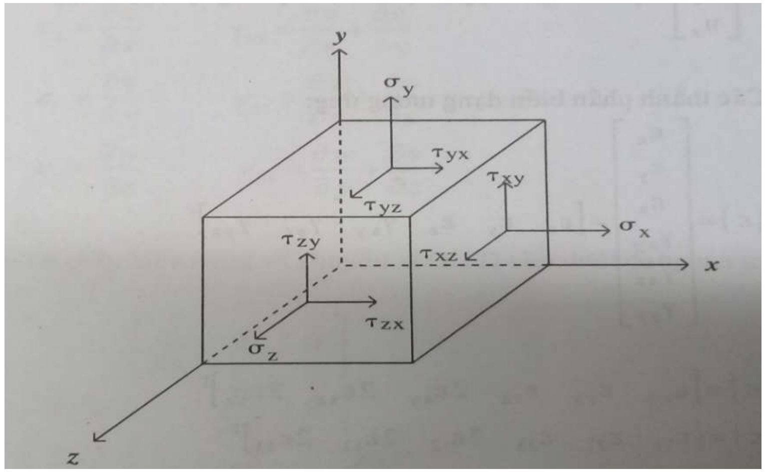
- **Chuyển vị:**

Chuyển vị là sự thay đổi vị trí của các mặt cắt (mỗi điểm) trên kết cấu dưới tác dụng của các ngoại lực: tải trọng, sự thay đổi nhiệt độ, chuyển vị của liên kết.

Khi biến dạng thì hầu hết các mặt cắt đều có vị trí mới, nên chuyển vị là hệ quả của sự biến dạng.

6.2. Quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị

Các thành phần ứng suất được viết dưới dạng ma trận:



$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{bmatrix}^T$$

hoặc $\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{23} \end{bmatrix}^T$ $\quad x = 1, y = 2, z = 3$

6.2. Quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị

Các thành phần chuyển vị được viết dưới dạng ma trận:

$$\{u\} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}^T$$

6.2. Quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị

Các thành phần biến dạng được viết dưới dạng ma trận:

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{bmatrix}^T$$

hoặc

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zz} & 2\varepsilon_{xy} & 2\varepsilon_{xz} & 2\varepsilon_{yz} \end{bmatrix}^T$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{33} & 2\varepsilon_{12} & 2\varepsilon_{13} & 2\varepsilon_{23} \end{bmatrix}^T$$

6.2. Quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị

Theo định luật Hooke, ta có quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị:

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\}$$

Trong trường hợp biến dạng nhỏ, ta có:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

6.2. Quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị

Viết lại dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

6.2. Quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị

Trường hợp bài toán phẳng, các chuyển vị chỉ còn lại hai thành phần:

$$\{u\} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}^T$$

Các biến dạng tương ứng:

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T$$

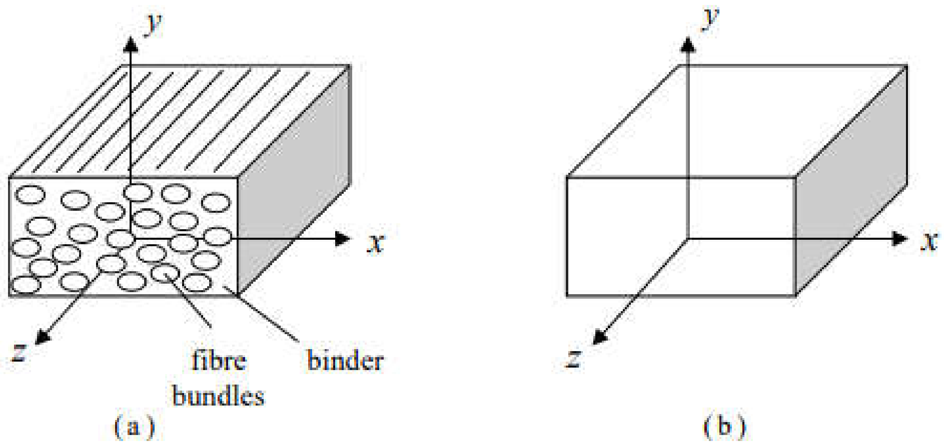
Quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

6.3. Luật vật liệu đẳng hướng, bất đẳng hướng

- **Luật vật liệu đẳng hướng:**

Vật liệu đẳng hướng là vật liệu thay đổi hình dạng theo một phương nhất định khi bị biến dạng



6.3. Luật vật liệu đẳng hướng, bất đẳng hướng

- **Luật vật liệu đẳng hướng:**

Trong phạm vi đàn hồi, tuyến tính, biến dạng và ứng suất có quan hệ qua biểu thức:

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{v}{E} & -\frac{v}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{v}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v}{E} & -\frac{v}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+v)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+v)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+v)}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}$$

6.3. Luật vật liệu đẳng hướng, bất đẳng hướng

- **Luật vật liệu đẳng hướng:**

Ma trận độ cứng vật liệu:

$$[D]=\frac{E}{(1+v)(1-2v)}\begin{bmatrix} 1-v & v & v & 0 \\ v & 1-v & v & 0 \\ v & v & 1-v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2v}{2} \end{bmatrix}$$

6.3. Luật vật liệu đẳng hướng, bất đẳng hướng

- **Luật vật liệu đẳng hướng:**

Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng được thể hiện qua biểu thức:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1-v & v & v & 0 & 0 & 0 \\ v & 1-v & v & 0 & 0 & 0 \\ v & v & 1-v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2v}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2v}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2v}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

6.3. Luật vật liệu đẳng hướng, bất đẳng hướng

- **Luật vật liệu đẳng hướng:**

Đối với bài toán ứng suất phẳng, ta có:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)}{1-\nu}$$

Do vậy, quan hệ giữa biến dạng và ứng suất có dạng:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{hay} \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

6.3. Luật vật liệu đẳng hướng, bất đẳng hướng

- **Luật vật liệu đẳng hướng:**

Tương tự, đối với bài toán biến dạng phẳng, ta có:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$

$$\sigma_z = v\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$$

Do vậy, quan hệ giữa ứng suất và biến dạng:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1+v}{E}\begin{bmatrix} 1-v & -v & 0 \\ -v & 1-v & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{hay} \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}\begin{bmatrix} 1-v & v & 0 \\ v & 1-v & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2v}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

6.3. Luật vật liệu đẳng hướng, bất đẳng hướng

- **Luật vật liệu đẳng hướng:**

Đối với bài toán đối xứng trục, quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{u}{r} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix}$$

6.3. Luật vật liệu đẳng hướng, bất đẳng hướng

- **Luật vật liệu đẳng hướng:**

Trường hợp kết cấu chịu biến dạng ban đầu $\{\varepsilon^0\}$, ta có:

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} + \{\varepsilon^0\}$$

$$\{\sigma\} = [D]\left(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^0\}\right)$$

Nếu vật liệu đẳng hướng, có hệ số dãn nở nhiệt α chịu một lượng tăng nhiệt độ ΔT, vật thể sẽ dãn nở đều theo 3 phương nhưng không có biến dạng góc, nghĩa là:

$$\gamma_{yz}^0 = \gamma_{xz}^0 = \gamma_{xy}^0 = 0 \qquad \varepsilon_x^0 = \varepsilon_y^0 = \varepsilon_z^0 = \alpha\Delta T$$

hay $$\{\varepsilon^0\} = \alpha\Delta T\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

6.3. Luật vật liệu đẳng hướng, bất đẳng hướng

- **Luật vật liệu bất đẳng hướng:**

Đối với bài toán phẳng, vật liệu trực hướng (orthotropic), trong hệ tọa độ vật liệu 1-2, quan hệ giữa ứng suất và biến dạng được biểu diễn như sau:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \dfrac{\nu_{12}E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \dfrac{\nu_{21}E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \dfrac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

với E_{11} là môđun đàn hồi theo phương dọc 1, E_{22} là môđun đàn hồi theo phương ngang 2, G_{12} là môđun đàn hồi trượt trong mặt phẳng 1-2, v_{12} là hệ số Poisson chính và v_{21} là hệ số Poisson phụ.

6.3. Luật vật liệu đẳng hướng, bất đẳng hướng

- **Luật vật liệu bất đẳng hướng:**

Ta có:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

Với:

$$[D] = \begin{bmatrix} \dfrac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \dfrac{\nu_{12}E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \dfrac{\nu_{21}E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \dfrac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}$$

6.3. Luật vật liệu đẳng hướng, bất đẳng hướng

- **Luật vật liệu bất đẳng hướng:**

Quan hệ giữa biến dạng và ứng suất có dạng:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{E_{11}} & -\dfrac{v_{21}}{E_{22}} & 0 \\ -\dfrac{v_{12}}{E_{11}} & \dfrac{1}{E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

6.3. Luật vật liệu đẳng hướng, bất đẳng hướng

- **Luật vật liệu bất đẳng hướng:**

Ta có:

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\}$$

Với:

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$$

6.4. Nguyên lý cực trị thế năng toàn phần

Thế năng toàn phần của một vật thể đàn hồi:

$$\pi = U - A$$

Với:

- U là thế năng biến dạng
- A là công ngoại lực

❖ Nguyên lý cực trị thế năng toàn phần được tóm tắt như sau

Trường chuyển vị tương ứng với sự cân bằng của vật thể

$$\Leftrightarrow \partial\pi = 0$$

6.4. Nguyên lý cực trị thế năng toàn phần

Biểu thức của thế năng toàn phần được viết tắt dưới dạng ma trận:

$$\pi = \frac{1}{2}\int_V \{\varepsilon\}^T [D]\left(\{\varepsilon\} - 2\{\varepsilon_0\}\right) dV - \int_V \{u\}^T \{f_v\} dV - \int_{S_t} \{u\}^T \{f_s\} ds$$

Với:

- $\{f_v\}$ là lực thể tích
- $\{f_s\}$ là lực bề mặt

Bài tập

1. Xác định ma trận độ cứng vật liệu của thép có module đàn hồi Young E = 200000 Mpa, ν=0,29 trong hai trường hợp:

a/ Ứng suất phẳng.

b/ Biến dạng phẳng.

Bài tập

a/ Ứng suất phẳng:

Với trạng thái ứng suất phẳng, ta có:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 218364,45 & 63325,69 & 0 \\ 63325,69 & 218364,45 & 0 \\ 0 & 0 & 77519,38 \end{bmatrix} MPa$$

b/ Biến dạng phẳng

Với trạng thái biến dạng phẳng, ta có:

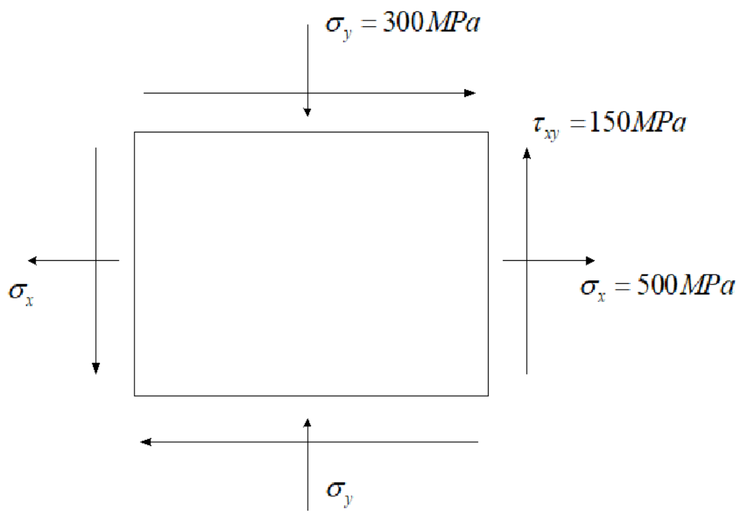
$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 262089,33 & 107050,57 & 0 \\ 107050,57 & 262089,33 & 0 \\ 0 & 0 & 77519,40 \end{bmatrix} MPa$$

Bài tập

2. Xét vật liệu có module đàn hồi Young E = 70000 Mpa, hệ số Poisson ν=0,3 tương ứng với trạng thái ứng suất

a/ Xác định ma trận độ cứng vật liệu

b/ Xác định các biến dạng tương ứng



Bài tập

Với trạng thái ứng suất phẳng, ta có:

$$[D]=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}76923,08 & 23076,92 & 0\\ 23076,92 & 76923,08 & 0\\ 0 & 0 & 26923,08\end{bmatrix}MPa$$

Các biến dạng tương ứng được suy ra từ biểu thức:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix}=[\mathrm{D}]^{-1}\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,0084\\ -0,0064\\ 0,0056\end{bmatrix}$$


Any
Questions?