

CHƯƠNG 7

XẤP XỈ BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

TS. Lê Thanh Long
lthong@hcmut.edu.vn

Nội dung

7.1 Các phương pháp xấp xỉ thông dụng

7.2 Xấp xỉ trên phần tử tham chiếu

7.3 Phép biến đổi hình học

7.1. Các phương pháp xấp xỉ thông dụng

- **Xấp xỉ bằng phần tử hữu hạn**

Giả sử V là miền xác định của một đại lượng cần khảo sát nào đó (chuyển vị, ứng suất, biến dạng, nhiệt độ, v.v.). Ta chia V ra nhiều miền con v^e có kích thước và bậc tự do hữu hạn. Đại lượng xấp xỉ của đại lượng trên sẽ được tính trong tập hợp các miền v^e .

7.1. Các phương pháp xấp xỉ thông dụng

Phương pháp xấp xỉ nhờ các miền con v^e được gọi là phương pháp xấp xỉ bằng các phần tử hữu hạn, nó có một số đặc điểm sau:

- Xấp xỉ nút trên mỗi miền con v^e chỉ liên quan đến những biến nút gắn vào nút của v^e và biên của nó,
- Các hàm xấp xỉ trong mỗi miền con v^e được xây dựng sao cho chúng liên tục trên v^e và phải thoả mãn các điều kiện liên tục giữa các miền con khác nhau.

Các miền con v^e được gọi là các **phần tử**.

7.2. Xấp xỉ trên phần tử tham chiếu

7.2.1 Bài toán nội suy tổng quát

Một hàm số $y = f(x)$ chỉ xác định được tại các điểm:

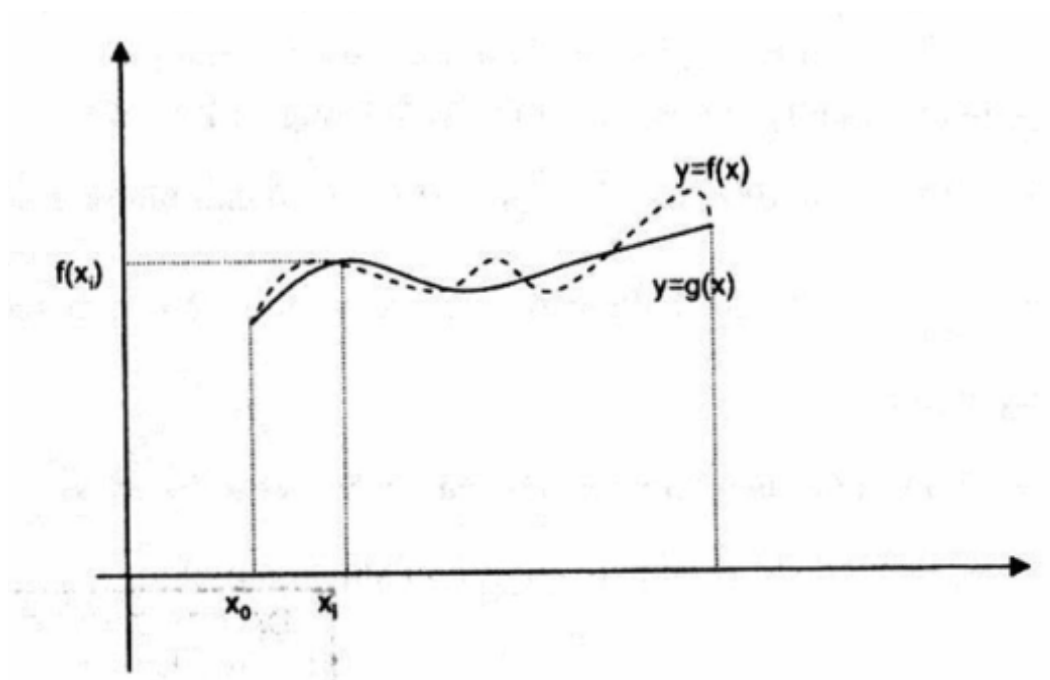
$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b : y_i = f(x_i) \forall i < n$$

Ta cần tìm một biểu thức giải tích đủ đơn giản $g(x)$ để xác định giá trị gần đúng của $y : y \approx g(x)$ tại các điểm $x \in [a, b]$ sao cho tại các điểm x_i ta có $g(x_i) = y_i$.

7.2. Xấp xỉ trên phần tử tham chiếu

7.2.1 Bài toán nội suy tổng quát

Về phương diện hình học, ta cần tìm hàm g có đồ thị đi qua các điểm $(x_i, f(x_i))$ như trong hình



7.2. Xấp xỉ trên phần tử tham chiếu

7.2.1 Bài toán nội suy tổng quát

Giả sử đã biết các giá trị y_i của hàm số tại các mốc nội suy x_i tương ứng. Cho trước hàm phụ thuộc $(n+1)$ tham số độc lập $\{c_j\}_{j=0}^n$, $\Phi(c_0, c_1, \dots, c_n, x)$ thỏa mãn các điều kiện nhất định. Người ta xác định các c_j cho biểu thức nội suy nhờ hệ phương trình:

$$\Phi(c_0, c_1, \dots, c_n, x) = y_k, \forall k = \overline{0, n}$$

Với các $\{c_j\}_{j=0}^n$ đã xác định nhờ điều kiện,

hàm $g(x) = \Phi(c_0, c_1, \dots, c_n, x)$ gọi là hàm nội suy và dùng làm công thức để tính giá trị $f(x)$

7.2. Xấp xỉ trên phần tử tham chiếu

7.2.2 Đa thức Lagrange

Lagrange đã xây dựng đa thức nội suy đơn giản sau đây:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_n^k(x)$$

Trong đó, $L_n(x)$ là đa thức bậc n có n nghiệm $x = x_j; j \neq k$ và $L_n^k(x_k) = 1$ hay $L_n^k(x_j) = \delta_j^k \quad \forall j \leq n$

Ta thấy được

$$L_n^k(x) = \frac{\prod_{i \neq k} (x - x_i)}{\prod_{i \neq k} (x_k - x_i)}$$

Như vậy, $L_n(x)$ là đa thức cần tìm.

7.2. Xấp xỉ trên phần tử tham chiếu

7.2.2 Đa thức Lagrange

Hoặc

$$L_k(x) = \prod_{\substack{m=0 \\ k \neq m}}^n \frac{x - x_m}{x_k - x_m}$$

Với n là số nút
 x_m là tọa độ nút thứ m

7.2. Xấp xỉ trên phần tử tham chiếu

7.2.2 Đa thức Hermite

Bài toán nội suy Hermite là bài toán mở rộng của nội suy Lagrange và Taylor.

Cho $x_i, a_{ki} \in R$ với $i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots, p_i - 1$ và $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$ trong đó thì $p_1 + p_2 + \dots + p_n = N$. Hãy xác định đa thức $H(x)$ có bậc $\deg H(x) \leq N - 1$ thỏa mãn điều kiện:

$$H^{(k)}(x_i) = a_{ki}, \forall i = 1, 2, \dots, n; \forall k = 0, 1, \dots, p_i - 1$$

7.2. Xấp xỉ trên phần tử tham chiếu

7.2.2 Đa thức Hermite

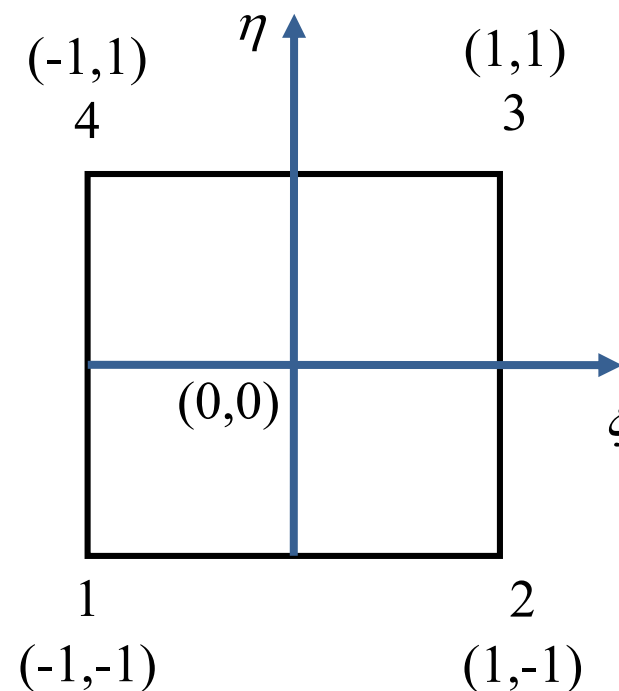
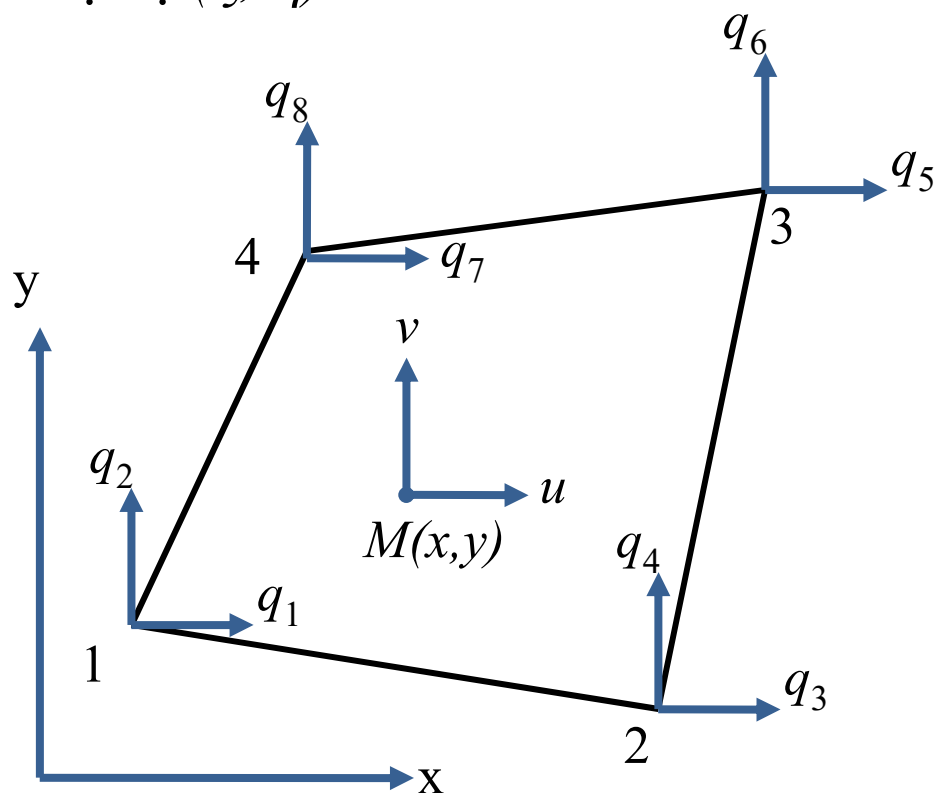
Khi n là số nguyên không âm thì nghiệm của những phương trình Hermite là những đa thức, được gọi là đa thức Hermite và có thể được viết như sau:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}), n = 0, 1, 2, \dots$$

7.3. Phép biến đổi hình học

7.3.1 Hàm dạng

Phần tử qui chiếu tứ giác có dạng hình vuông được xác định trong hệ toạ độ (ξ, η)



7.3. Phép biến đổi hình học

7.3.1 Hàm dạng

Các hàm dạng N_i ($i = 1, 2, 3, 4$) có tính chất:

- $N_i = 1$ tại nút i và bằng 0 tại các nút khác.

Chẳng hạn: N_1 bằng 1 tại nút 1; bằng 0 tại các nút còn lại (2, 3, 4).

- Yêu cầu $N_1 = 0$ tại nút 2, 3, 4 có nghĩa là $N_1 = 0$ dọc theo cạnh $\xi=1$ và $\eta=1$.

Vì vậy, N_1 phải có dạng: $N_1 = c(1-\xi)(1-\eta)$; trong đó c là hằng số cần xác định.

Từ điều kiện $N_1 = 1$ tại nút 1 ($\xi = -1; \eta = -1$), suy ra: $c = \frac{1}{4}$

7.3. Phép biến đổi hình học

7.3.1 Hàm dạng

Tương tự như trên, ta cũng xác định được biểu thức của các hàm dạng còn lại. Cuối cùng, biểu thức của các hàm dạng N_i như sau:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

7.3. Phép biến đổi hình học

7.3.1 Hàm dạng

- Ta có thể biểu diễn các hàm dạng một cách tổng quát như sau:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)$$

trong đó (ξ_i, η_i) là tọa độ của nút i .

- Mô tả trường chuyển vị của phần tử theo chuyển vị nút của nó.
Ta thấy:

$$u = N_1q_1 + N_2q_3 + N_3q_5 + N_4q_7$$

$$v = N_1q_2 + N_2q_4 + N_3q_6 + N_4q_8$$

7.3. Phép biến đổi hình học

7.3.1 Hàm dạng

Hoặc mô tả dưới dạng ma trận: $u = Nq$

Trong đó:

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

Nhờ cách mô tả đẳng tham số, ta biểu diễn tọa độ của một điểm trong phần tử qua tọa độ các nút phần tử cũng nhờ các hàm dạng N_i ở trên:

$$\begin{aligned} x &= N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4 \\ y &= N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4 \end{aligned}$$

7.3. Phép biến đổi hình học

7.3.2 Ma trận Jacobi

Các đạo hàm bậc nhất theo không gian trên phần tử tham chiếu và phần tử thực có quan hệ với nhau theo biểu thức:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \quad \text{Hoặc} \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

Trong đó **J** là ma trận Jacobi của phép biến hình $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$

7.3. Phép biến đổi hình học

7.3.2 Ma trận Jacobi

Tương tự, ta có mối quan hệ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

Hoặc

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

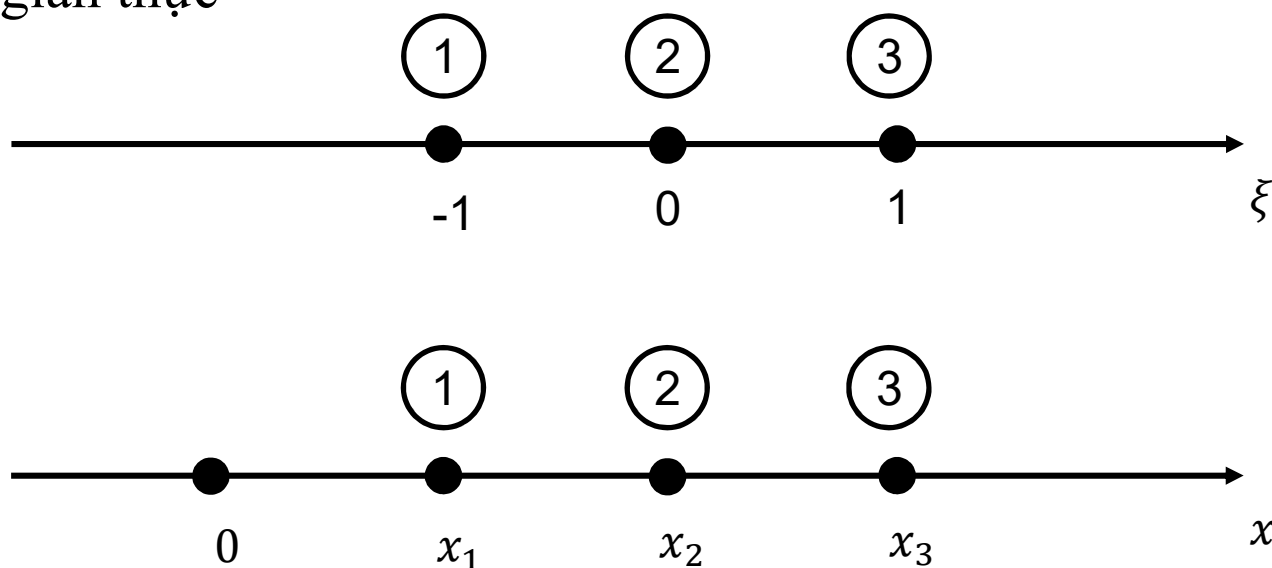
Trong đó **J** là ma trận Jacobi của phép biến hình

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

7.3. Phép biến đổi hình học

7.3.3 Ví dụ:

Tìm hàm dạng của phần tử 1 chiều trong hai không gian tham chiếu và không gian thực



7.3. Phép biến đổi hình học

7.3.3 Ví dụ 1:

Áp dụng đa thức lagrange, các hàm dạng của phần tử tham chiếu như sau:

$$N_1(\xi) = \frac{(\xi - 0)(\xi - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = \frac{1}{2} \xi(\xi - 1)$$

$$N_2(\xi) = \frac{[\xi - (-1)](\xi - 1)}{[0 - (-1)](0 - 1)} = -(\xi + 1)(\xi - 1)$$

$$N_3(\xi) = \frac{[\xi - (-1)](\xi - 0)}{[1 - (-1)](1 - 0)} = \frac{1}{2} \xi(\xi + 1)$$

7.3. Phép biến đổi hình học

7.3.3 Ví dụ 1:

Tương tự, ta có các hàm dạng của phần tử thực:

$$N_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

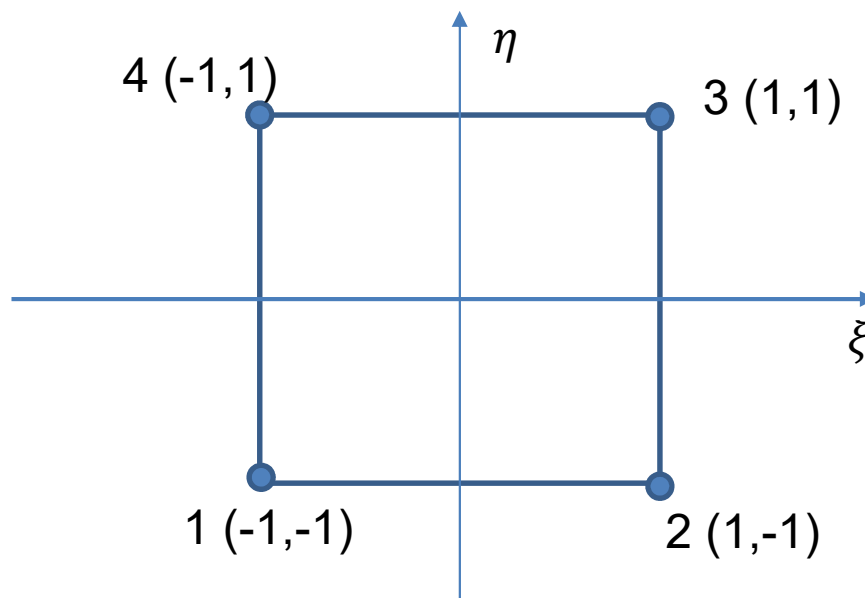
$$N_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$N_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

7.3. Phép biến đổi hình học

7.3.3 Ví dụ 2:

Dùng đa thức Lagrange, tìm các hàm dạng của phần tử tứ giác 4 nút



7.3. Phép biến đổi hình học

7.3.3 Ví dụ 2:

Áp dụng đa thức Lagrange cho hai phương trình ξ và η ta tìm được được các hàm dạng tương ứng với các nút 1, 2, 3 và 4 như sau:

$$N_1(\xi, \eta) = L_{1\xi} \cdot L_{1\eta} = \frac{\xi - 1}{-1 - 1} \cdot \frac{\eta - 1}{-1 - 1} = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_2(\xi, \eta) = L_{2\xi} \cdot L_{2\eta} = \frac{\xi - (-1)}{1 - (-1)} \cdot \frac{\eta - 1}{-1 - 1} = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

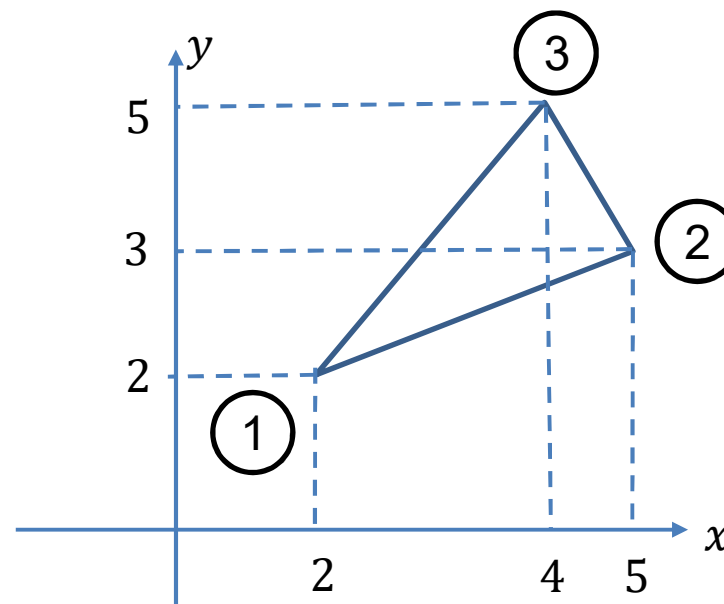
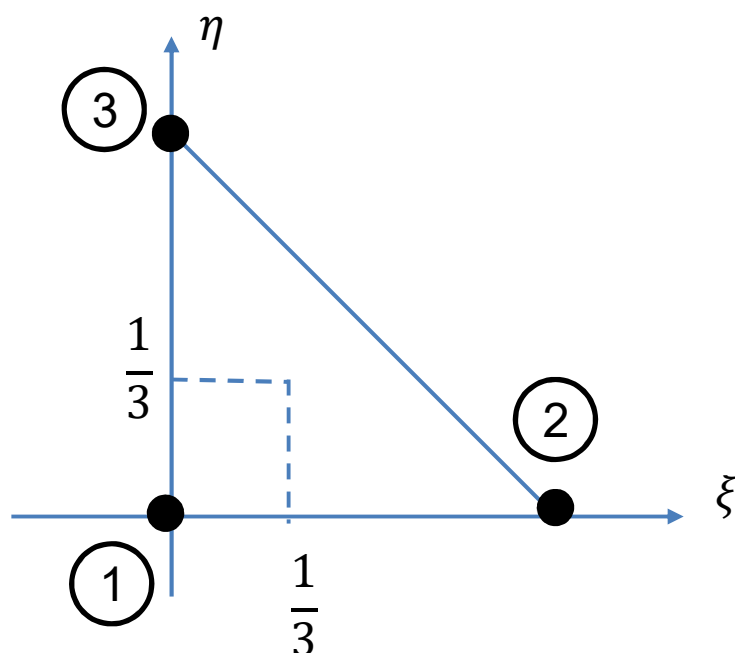
$$N_3(\xi, \eta) = L_{3\xi} \cdot L_{3\eta} = \frac{\xi - (-1)}{1 - (-1)} \cdot \frac{\eta - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N_4(\xi, \eta) = L_{4\xi} \cdot L_{4\eta} = \frac{\xi - 1}{-1 - 1} \cdot \frac{\eta - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

7.3. Phép biến đổi hình học

7.3.3 Ví dụ 3:

Xét phần tử 3 nút không gian tham chiếu và không gian thực:



Xác định tọa độ điểm A', ảnh của điểm A ($\xi = \frac{1}{3}, \eta = \frac{1}{3}$)

Tìm ma trận Jacobi của phép biến đổi hình học tại điểm A

7.3. Phép biến đổi hình học

7.3.3 Ví dụ 3:

Tìm ảnh điểm A

Ta có
$$x = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi, \eta) x_i, y = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi, \eta) y_i$$

Với
$$N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, N_2(\xi, \eta) = \xi, N_3(\xi, \eta) = \eta$$

Thay các thông số từ đề bài vào, ta được:

$$x_{A'} = \frac{11}{3}, y_{A'} = \frac{10}{3}$$

7.3. Phép biến đổi hình học

7.3.3 Ví dụ 3:

$$J_{11} = \frac{\partial}{\partial \xi} (N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3) = \frac{\partial}{\partial \xi} [(1 - \xi - \eta).2 + \xi.5 + \eta.4] = 3$$

$$J_{12} = \frac{\partial}{\partial \xi} (N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3) = \frac{\partial}{\partial \xi} [(1 - \xi - \eta).2 + \xi.3 + \eta.5] = 1$$

$$J_{21} = \frac{\partial}{\partial \eta} (N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3) = \frac{\partial}{\partial \eta} [(1 - \xi - \eta).2 + \xi.5 + \eta.4] = 2$$

$$J_{22} = \frac{\partial}{\partial \eta} (N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3) = \frac{\partial}{\partial \eta} [(1 - \xi - \eta).2 + \xi.3 + \eta.5] = 3$$

$$\rightarrow [J] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

