



CHƯƠNG 8

PHẦN TỬ THANH

TS. Lê Thanh Long
lthlong@hcmut.edu.vn

Nội dung

8.1 Phần tử thanh 2 nút 1 chiều

8.2 Phần tử thanh 3 nút 1 chiều

8.3 Phần tử thanh chịu xoắn

8.1. Phần tử thanh 2 nút một chiều

1. Ma trận độ cứng

- Để giải bài toán một chiều (1D) bằng phương pháp phần tử hữu hạn, ta sử dụng các quan hệ ứng suất - biến dạng và quan hệ biến dạng - chuyển vị.
- Xét một thanh đồng chất lẳng trụ:

Với

L : chiều dài thanh

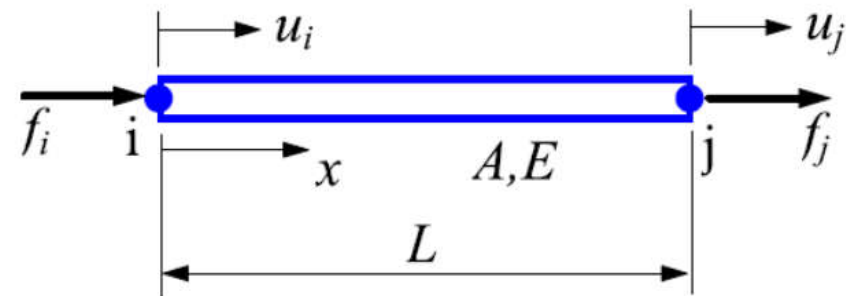
A : tiết diện mặt cắt ngang

E : module đàn hồi

$u = u(x)$: chuyển vị

$\varepsilon = \varepsilon(x)$: biến dạng

$\sigma = \sigma(x)$: ứng suất



8.1. Phần tử thanh 2 nút một chiều

1. Ma trận độ cứng

Quan hệ biến dạng - chuyển vị:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (1)$$

Quan hệ ứng suất - biến dạng:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2)$$

Với bài toán một chiều, vi phân thể tích viết dưới dạng:

$$dv = A dx \quad (3)$$

8.1. Phần tử thanh 2 nút một chiều

1. Ma trận độ cứng

Phương pháp hình thức

Xác định hai hàm dạng tuyến tính sau:

$$N_i(\xi) = 1 - \xi, \quad N_j(\xi) = \xi \quad (4)$$

Với :

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

Khi xác định được hàm dạng, trường chuyển vị của phần tử sẽ được biểu diễn thông qua các chuyển vị nút:

$$u(x) = u(\xi) = N_i(\xi)u_i + N_j(\xi)u_j \quad (5)$$

Hoặc:

$$u = [N_i \quad N_j] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{u} \quad (6)$$

8.1. Phần tử thanh 2 nút một chiều

1. Ma trận độ cứng

Từ phương trình (1) và (6):

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \left[\frac{d}{dx} \mathbf{N} \right] \mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (7)$$

Trong đó ma trận $\mathbf{B}$ được gọi là ma trận biến dạng-chuyển vị của phần tử:

$$\mathbf{B} = \frac{d}{dx} [N_i(\xi) \quad N_j(\xi)] = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} [N_i(\xi) \quad N_j(\xi)]$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (8)$$

8.1. Phần tử thanh 2 nút một chiều

1. Ma trận độ cứng

Theo định luật Hooke, ta có biểu thức ứng suất:

$$\sigma = E\varepsilon = E\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (9)$$

Các biểu thức $u = \mathbf{N}\mathbf{u}$, $\varepsilon = \mathbf{B}\mathbf{u}$, $\sigma = E\mathbf{B}\mathbf{u}$ mô tả chuyển vị, biến dạng và ứng suất qua các giá trị chuyển vị nút của phần tử. Ta sẽ thế các biểu thức này vào biểu thức thế năng của thanh để thiết lập ma trận độ cứng và ma trận lực nút của phần tử

8.1. Phần tử thanh 2 nút một chiều

1. Ma trận độ cứng

Thế năng biến dạng của phần tử:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int \sigma^T \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int (\mathbf{u}^T \mathbf{B}^T E \mathbf{B} \mathbf{u}) dV \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \left[\int (\mathbf{B}^T E \mathbf{B}) dV \right] \mathbf{u} \end{aligned} \quad (10)$$

Ta có công thức hiện bởi hai lực tại nút:

$$W = \frac{1}{2} f_i u_i + \frac{1}{2} f_j u_j = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (11)$$

8.1. Phần tử thanh 2 nút một chiều

1. Ma trận độ cứng

Cho hệ bảo toàn năng lượng, ta có:

$$U = W$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \left[\int (\mathbf{B}^T E \mathbf{B}) dV \right] \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (12)$$

$$\Rightarrow \left[\int (\mathbf{B}^T E \mathbf{B}) dV \right] \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

Hoặc $\Rightarrow \mathbf{k} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (13)$

Với $\mathbf{k} = \int (\mathbf{B}^T E \mathbf{B}) dV$ là ma trận độ cứng phần tử

$\mathbf{f}$ là ma trận lực nút của phần tử

8.1. Phần tử thanh 2 nút một chiều

1. Ma trận độ cứng

Dùng ma trận biến dạng-chuyển vị (8) để tính phương trình (12)

Ma trận độ cứng phần tử:

$$\mathbf{k} = \int_0^L \left\{ \begin{matrix} -1 \\ L \\ 1 \\ L \end{matrix} \right\} E \left[\begin{matrix} -1 & 1 \\ L & L \end{matrix} \right] A dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Thế năng biến dạng của phần tử:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{k} \mathbf{u}$$

8.1. Phần tử thanh 2 nút một chiều

1. Ma trận độ cứng

Phương pháp trực tiếp

Giả sử thanh trong trường hợp này hoạt động như một lò xo, ta suy ra ma trận độ cứng của thanh:

$$k = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Phương trình phần tử hữu hạn:

$$[k]\{u\} = \{f\} \quad \Rightarrow \quad \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

8.1. Phần tử thanh 2 nút một chiều

2. Tải nút tương đương

Giả sử phần tử hữu hạn có thể tích V chịu tác dụng của lực thể tích p và lực bề mặt q trên diện tích S . Thế năng toàn phần của phần tử là U có thể viết dưới dạng:

$$U = \iiint \frac{1}{2} [\varepsilon]^T \{\sigma\} dV - \iiint [f]^T \{p\} dV - \iint [f]^T \{q\} dS$$

Ta có vector tải phần tử hay còn gọi là tải nút tương đương:

$$\{P\}^e = \iiint [N]^T \{p\} dV + \iint [N]^T \{q\} dS$$

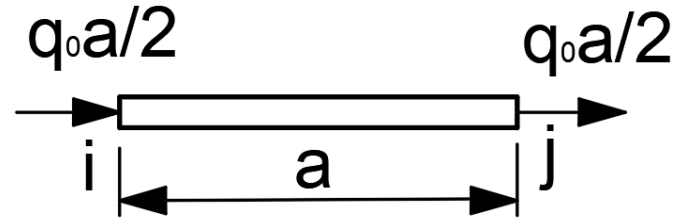
8.1. Phần tử thanh 2 nút một chiều

2. Tải nút tương đương

Trường hợp phần tử thanh 2 nút, dựa vào hàm dạng ta có tải nút tương đương:

$$\{P\}^e = \int_0^a [N]^T \{q\} dx = \int_0^a \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{a} \\ \frac{x}{a} \end{Bmatrix} q(x) dx$$

Trường hợp tải trọng phân bố đều $q(x) = q_0 = \text{const}$

$$\{P\}^e = \begin{Bmatrix} \frac{q_0 a}{2} \\ \frac{q_0 a}{2} \end{Bmatrix}$$


The diagram illustrates a horizontal beam element of length a between nodes i and j . A uniformly distributed load q_0 acts downwards along the entire length. The equivalent nodal loads are represented by two point loads, each of magnitude $q_0 a / 2$, acting upwards at nodes i and j .

8.2. Phần tử thanh 3 nút một chiều

1. Ma trận độ cứng

Ma trận phần tử thanh ba nút tương tự của phần tử thanh hai nút. Tính toán ma trận độ cứng và chuyển vị nút bao gồm các bước sau:

Bước 1: Xác định nút của phần tử thanh.

Bước 2: Xác định điều kiện biên là:

$$u(x = 0) = u_1; \quad u(x = L) = u_2$$

Bước 3: Xác định hàm dạng của nút N, quan hệ biến dạng-chuyển vị **B** và quan hệ ứng suất-biến dạng σ của phần tử 1D.

Bước 4: Thiết lập ma trận độ cứng và vector lực nút của từng phần tử trong hệ tọa độ địa phương

$$k = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

8.2. Phần tử thanh 3 nút một chiều

1. Ma trận độ cứng

Bước 5: Thiết lập ma trận độ cứng toàn hệ trong hệ tọa độ chung.

Bước 6: Giải hệ phương trình phần tử hữu hạn (13):

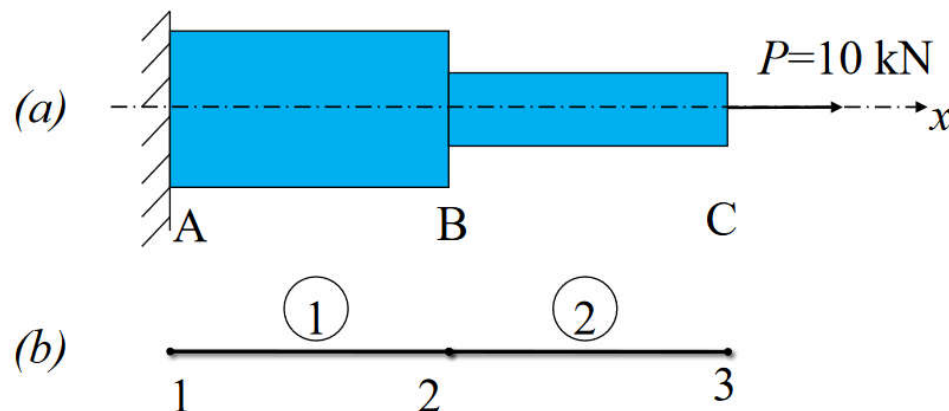
$$[K]\{U\} = \{F\}$$

Bước 7: Giải tìm nội lực trong từng phần tử.

8.2. Phần tử thanh 3 nút một chiều

2. Ví dụ

Ví dụ 1:



(a) Trục bậc chịu kéo đúng tâm; (b) Sơ đồ phần tử

Cho một trục bậc chịu tác dụng của lực $P = 10 \text{ kN}$. Biết tiết diện các đoạn: $A_1 = 20 \text{ mm}^2$; $A_2 = 10 \text{ mm}^2$; chiều dài các đoạn $l_1 = l_2 = 100 \text{ mm}$; và module đàn hồi $E_1 = E_2 = 200 \text{ GPa}$. Hãy xác định chuyển vị tại B và C; phản lực tại A; biến dạng; ứng suất trong các đoạn trục AB, BC.

8.2. Phần tử thanh 3 nút một chiều

2. Ví dụ

Chia trục thành hai phần tử 1 và 2

Bảng ghép nối phần tử được thiết lập như sau:

Phần tử	Nút i	Nút j
1	1	2
2	2	3

8.2. Phần tử thanh 3 nút một chiều

2. Ví dụ

Xác định ma trận độ cứng của phần tử 1 và 2:

$$k_1 = \frac{A_1 E_1}{l_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} 10^4 N/mm$$

$$k_2 = \frac{A_2 E_2}{l_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} 10^4 N/mm$$

Xác định ma trận độ cứng chung **K**:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 4 + 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} 10^4 N/mm$$

8.2. Phần tử thanh 3 nút một chiều

2. Ví dụ

- Vector lực nút chung: $\mathbf{F} = [0 \quad 0 \quad 10]^T$
- Hệ phương trình phần tử hữu hạn:

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{F}$$

$$\Rightarrow 10^4 \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 4+2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 10 \times 10^3 \end{Bmatrix}$$

- Đặt điều kiện biên:

Ta có $u_1 = 0$ do liên kết ngàm tại A, ta có hệ phương trình:

$$\Rightarrow 10^4 \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \times 10^3 \end{Bmatrix}$$

8.2. Phần tử thanh 3 nút một chiều

2. Ví dụ

- Xác định chuyển vị, biến dạng, ứng suất:

Giải hệ phương trình, ta được:

$$u_2 = 0,25 \text{ mm}$$

$$u_3 = 0,75 \text{ mm}$$

Phản lực liên kết:

$$R_1 = 10^4(-4u_2) = -10 \text{ kN}$$

Biến dạng được tính cho mỗi phần tử:

$$\varepsilon_1 = \frac{-u_1 + u_2}{l} = 2,5 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{-u_2 + u_3}{l} = 5 \cdot 10^{-3}$$

8.2. Phần tử thanh 3 nút một chiều

2. Ví dụ

Ứng suất của mỗi phần tử thanh:

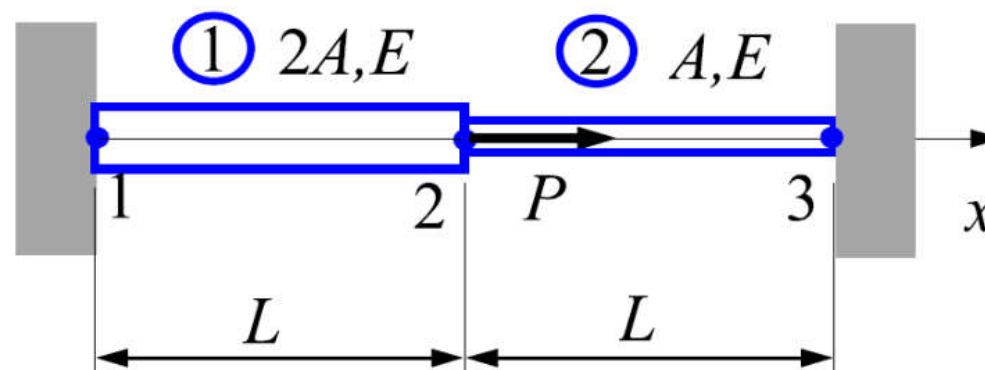
$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 = 500 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = E\varepsilon_2 = 1000 \text{ N/mm}^2$$

8.2. Phần tử thanh 3 nút một chiều

2. Ví dụ

Ví dụ 2:



Cho một trục bậc chịu liên kết ngàm 2 đầu và tác dụng của lực $P=200\text{kN}$. Biết tiết diện các đoạn $A_1 = 2400\text{mm}^2$; $A_2 = 600\text{mm}^2$; chiều dài các đoạn $l_1 = 300\text{mm}$; $l_2 = 400\text{mm}$; và module đàn hồi $E_1 = 70\text{ GPa}$; $E_2 = 200\text{ GPa}$. Hãy xác định chuyển vị tại B; biến dạng, ứng suất trong các đoạn trục AB, BC và phản lực tại A và C.

8.2. Phần tử thanh 3 nút một chiều

2. Ví dụ

- Chia trục thành hai phần tử 1 và 2

Bảng ghép nối phần tử được thiết lập như sau:

Phần tử	Nút i	Nút j
1	1	2
2	2	3

8.2. Phần tử thanh 3 nút một chiều

2. Ví dụ

- Xác định ma trận độ cứng của phần tử 1 và 2:

$$k_1 = \frac{A_1 E_1}{l_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2400 \cdot 70 \cdot 10^3}{300} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} N/mm$$

$$k_2 = \frac{A_2 E_2}{l_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{600 \cdot 200 \cdot 10^3}{400} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} N/mm$$

- Xác định ma trận độ cứng chung **K**:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 560 & -560 & 0 \\ -560 & 860 & -300 \\ 0 & -300 & 300 \end{bmatrix} 10^3 N/mm$$

8.2. Phần tử thanh 3 nút một chiều

2. Ví dụ

- Vector lực nút chung: $\mathbf{F} = [R_1 \quad 200.10^3 \quad R_3]^T$
- Hệ phương trình phần tử hữu hạn:

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{F}$$

$$\Rightarrow 10^3 \begin{bmatrix} 560 & -560 & 0 \\ -560 & 860 & -300 \\ 0 & -300 & 300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 200.10^3 \\ R_3 \end{Bmatrix}$$

- Đặt điều kiện biên:

Ta có $u_1 = u_3 = 0$ do liên kết ngàm tại A, ta có hệ phương trình:

$$\Rightarrow 860.u_2 = 200$$

8.2. Phần tử thanh 3 nút một chiều

2. Ví dụ

- Xác định chuyển vị, biến dạng, ứng suất:

Giải hệ phương trình, ta được:

$$u_2 = 0,23257mm$$

Phản lực liên kết:

$$R_1 = 10^3(-560u_2) = -130,233kN$$

$$R_3 = 10^3(-300u_2) = -69,767kN$$

Biến dạng được tính cho mỗi phần tử:

$$\varepsilon_1 = \frac{-u_1 + u_2}{l} = 7,752.10^{-4}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{-u_2 + u_3}{l} = -5,814.10^{-4}$$

8.2. Phần tử thanh 3 nút một chiều

2. Ví dụ

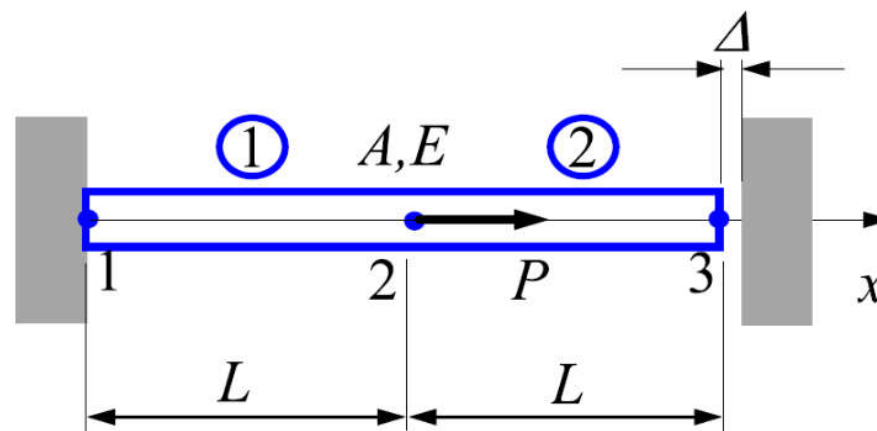
Ứng suất của mỗi phần tử thanh:

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 = 54,26 \text{ N/mm}^2$$
$$\sigma_2 = E\varepsilon_2 = -116,28 \text{ N/mm}^2$$

8.2. Phần tử thanh 3 nút một chiều

2. Ví dụ

Ví dụ 3:



Cho một trục bậc chịu liên kết ngàm 1 đầu và tác dụng của lực $P=6 \cdot 10^4 \text{ N}$. Biết tiết diện các đoạn $A_1 = A_2 = 250 \text{ mm}^2$; chiều dài các đoạn $L = 150 \text{ mm}$; và module đàn hồi $E_1 = 20 \text{ GPa}$. Khe hở giữa C và thành cứng là $1,2 \text{ mm}$. Hãy xác định chuyển vị trong các đoạn trục AB, BC và phản lực tại A và C.

8.2. Phần tử thanh 3 nút một chiều

2. Ví dụ

- Kiểm tra đầu C sau khi được tác dụng lực có tiếp xúc với thành cứng hay không?

$$\Delta_0 = \frac{PL}{EA} = \frac{6 \cdot 10^4 \cdot 150 \cdot 10^6}{20 \cdot 10^9 \cdot 250} = 1,8mm > \Delta = 1,2mm$$

Như vậy tiếp xúc có xảy ra.

8.2. Phần tử thanh 3 nút một chiều

2. Ví dụ

- Xác định ma trận độ cứng của phần tử 1 và 2:

$$k_1 = k_2 = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Xác định ma trận độ cứng chung **K**:

$$\mathbf{K} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} N/mm$$

8.2. Phần tử thanh 3 nút một chiều

2. Ví dụ

- Vector lực nút chung: $\mathbf{F} = [R_1 \quad P \quad R_3]^T$
- Hệ phương trình phần tử hữu hạn:

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{F}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ P \\ R_3 \end{Bmatrix}$$

- Đặt điều kiện biên:

Ta có $u_1 = 0$ do liên kết ngàm tại A, $u_3 = \Delta = 1,2 \text{ mm}$, ta có hệ phương trình:

$$\frac{AE}{L} [2 \quad -1] \begin{Bmatrix} u_2 \\ \Delta \end{Bmatrix} = \{P\}$$

8.2. Phần tử thanh 3 nút một chiều

2. Ví dụ

- Xác định chuyển vị, biến dạng, ứng suất:

Giải hệ phương trình, ta được:

$$u_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{PL}{EA} + \Delta \right) = 1,5mm$$

Phản lực liên kết:

$$R_1 = \frac{EA}{L} (-u_2) = -5.10^4 N$$

$$R_3 = \frac{EA}{L} (-u_2 + u_3) = -10^4 N$$

8.3. Phần tử thanh chịu xoắn

Hàm chuyển vị θ được viết dưới dạng: $\theta = B\delta_e$

Trong đó: $B = [B_1 \quad B_2]; \quad B_1 = \frac{-1}{l}, B_2 = \frac{1}{l}$

Phương trình biến thiên do thanh chịu xoắn thuần túy dưới dạng ma trận có dạng:

$$\gamma_e^T \int_0^l B^T GJB dx \delta_e = \gamma_e^T \int_0^l N^T m dx, \forall \gamma_e^T$$

Trong đó J là moment quán tính cực trị đối với trọng tâm của tiết diện ngang, m là moment xoắn phân bố trên thanh.

Do phương trình đúng với mọi $\forall \gamma_e^T$ nên ta có:

$$F_e = \int_0^l N^T m dx$$

hay

$$K_e \delta_e = F_e$$

8.3. Phần tử thanh chịu xoắn

Dựa trên phương trình đã cho, ta có:

$$K_e = \int_0^l B^T GJB dx \quad F_e = \int_0^l N^T m dx$$

Trong phương trình trên, K_e là ma trận độ cứng phần tử của thanh chịu xoắn thuần túy, F_e là vector lực nút tương đương của phần tử. Sau khi thực hiện tích phân, ta có:

$$K_e = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{l} & -\frac{GJ}{l} \\ -\frac{GJ}{l} & \frac{GJ}{l} \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad F_e = \begin{bmatrix} \frac{ml}{2} \\ \frac{ml}{2} \end{bmatrix}$$

