CHƯƠNG 9
PHẦN TỬ THANH TRONG KHÔNG GIAN 2 CHIỀU

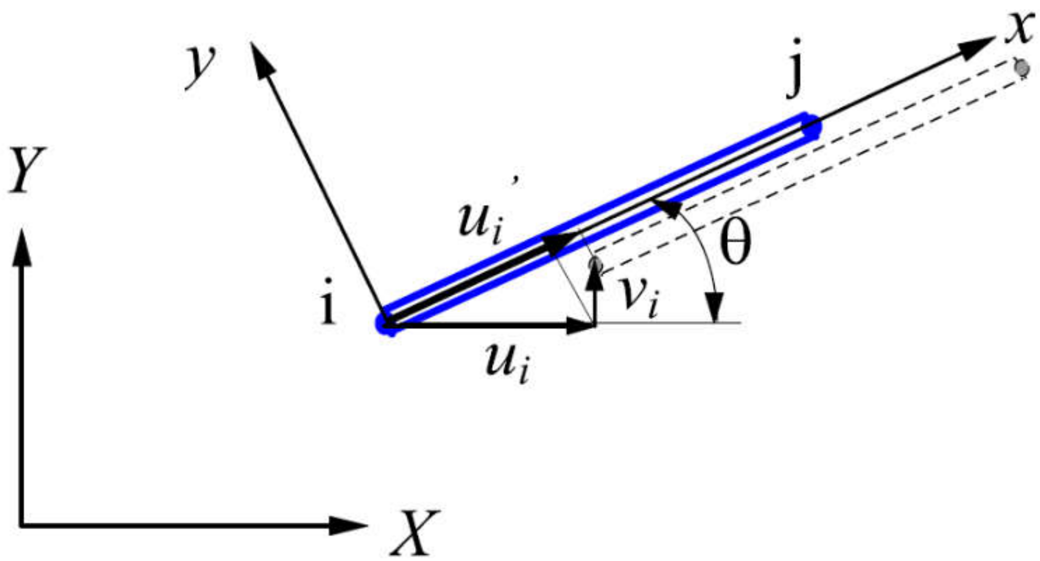
TS. Lê Thanh Long
ltlong@hcmut.edu.vn

Nội dung

9.1. Ma trận độ cứng

Xét thanh đồng chất lăng trụ sau:

Hệ tọa độ cục bộ	Hệ tọa độ toàn cục
x, y	X, Y
u_i', v_i'	u_i, v_i
1 dof tại 1 nút	2 dofs tại 1 nút



9.1. Ma trận độ cứng

Trong bài toán 2 chiều:

$$u_i' = u_i cos\theta + v_i sin\theta = [l \quad m]\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

$$v_i' = -u_i sin\theta + v_i cos\theta = [-m \quad l]\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

với $l = cos\theta, \quad m = sin\theta$

Ở dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix} u_i' \\ v_i' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

Hoặc $\mathbf{u}_i' = \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{u}_i$

trong đó, ma trận chuyển đổi: $\tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix}$ là trực giao

9.1. Ma trận độ cứng

Ta có ma trận vị trí 2 nút của phần tử thanh:

$$\begin{Bmatrix} u_i' \\ v_i' \\ u_j' \\ v_j' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

Hoặc $\mathbf{u}' = \mathbf{T}\mathbf{u}$ với $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix}$

Các lực nút được chuyển đổi theo cách tương tự:

$$\mathbf{f}' = \mathbf{T}\mathbf{f}$$

9.1. Ma trận độ cứng

Ma trận độ cứng trong không gian 2D

Trong hệ tọa độ cục bộ:

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i' \\ u_j' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i' \\ f_j' \end{Bmatrix}$$

Thêm vào các phương trình chuyển vị ngang, ta có:

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i' \\ v_i' \\ u_j' \\ v_j' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i' \\ 0 \\ f_j' \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Hoặc $\mathbf{k}'\mathbf{u}'=\mathbf{f}'$

9.1. Ma trận độ cứng

Dùng các phép biến đổi cho phương trình trên, ta thu được:

$$\mathbf{k}'\mathbf{T}\mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{f}$$

Nhân 2 vế cho $\mathbf{T}^T$ và lưu ý là $\mathbf{T}^T\mathbf{T} = \mathbf{I}$, ta có:

$$\mathbf{T}^{\mathbf{T}}\mathbf{k}'\mathbf{T}\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

Do đó, ma trận độ cứng phần tử k trong hệ tọa độ toàn cục là:

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^{\mathbf{T}}\mathbf{k}'\mathbf{T}$$

là một ma trận đối xứng 4x4

9.1. Ma trận độ cứng

Dạng tường minh:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} u_i & v_i & u_j & v_j \end{array} \\
k = \dfrac{EA}{L} & \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Trong đó:

$$l = cos\theta = \frac{X_j - X_i}{L}, \qquad m = sin\theta = \frac{Y_j - Y_i}{L}$$

Ma trận độ cứng của toàn bộ cấu trúc được lắp ghép từ các ma trận cứng phần tử theo cách thông thường như trong trường hợp 1D

9.2. Tải nút tương đương

Tương tự ở chương 6, vecto tải nút tương đương được xác định bởi biểu thức:

$$U = \iiint \frac{1}{2}[\varepsilon]^T\{\sigma\}dV - \iiint [f]^T\{p\}dV - \iiint [f]^T\{q\}dS$$

Hoặc:

$$\{f\}_e = \int [N]^T\{g\}_e dV + \int [N]^T\{p\}_e dS + [N]_{x_0}^T P + [N']_{x_0}^T M$$

với:

[N] là ma trận các hàm nội suy, $\{g\}_e$ là lực thể tích phần tử, $\{p\}_e$ là lực bề mặt, P là lực tập trung, M là momen tập trung.

9.3. Ứng suất phần tử

Ứng suất phần tử trong không gian 2D:

$$\sigma = E\varepsilon = E\mathbf{B}\begin{Bmatrix} u'_i \\ u'_j \end{Bmatrix} = E\begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

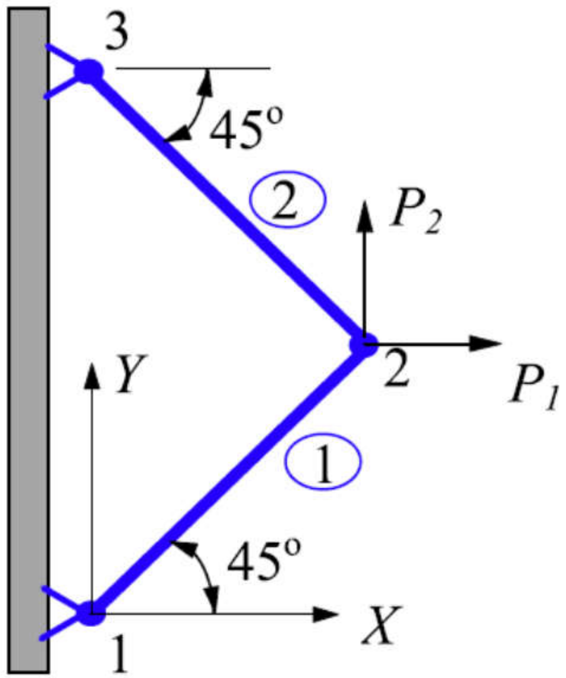
Do đó:

$$\sigma = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} -l & -m & l & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

9.4. Ví dụ

<u>Ví dụ 1</u>: Một giàn khung đơn giản lắp ghép từ hai thanh giống nhau (với E, A và L), và chịu tải như hình. Tìm:

1. Chuyển vị tại nút 2,
2. Ứng suất trong mỗi thanh



9.4. Ví dụ

Cấu trúc đơn giản này là minh họa của quá trình lắp ghép và giải nghiệm của phần tử thanh trong không gian 2-D

Trong hệ tọa độ cục bộ , ta có:

$$k'_1 = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = k'_2$$

Do nằm ở khác hệ trục nên hai ma trận này không thể lắp ghép với nhau. Ta cần chuyển chúng về hệ tọa độ toàn cục OXY.

9.4. Ví dụ

Phần tử 1:

$$\theta = 45°, \qquad l = m = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Phần tử 2:

$$\theta = 135°, \qquad l = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad m = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dùng công thức ta thu được ma trận độ cứng trong hệ trục toàn cục

$$k_1 = {T_1}^T k'_1 T_1 = \frac{EA}{2L}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

9.4. Ví dụ

$$k_2 = {T_2}^T {k'}_2 T_2 = \frac{EA}{2L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lắp ghép thành phương trình PTHH cho toàn kết cấu:

$$\frac{EA}{2L}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix}$$

9.4. Ví dụ

Tải trọng và điều kiện biên (BC):

$$u_1 = v_1 = u_3 = v_3 = 0, \qquad F_{2X} = P_1, \qquad F_{2Y} = P_2$$

Phương trình PTHH viết dưới dạng cô đọng:

$$\frac{EA}{2L}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

Giải, ta thu được chuyển vị tại nút 2:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{EA}\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

9.4. Ví dụ

Ta tính được ứng suất trong hai thanh:

$$\sigma_1 = \frac{E}{L}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\frac{L}{EA}\begin{Bmatrix}0\\0\\P_1\\P_2\end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2A}(P_1 + P_2)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{L}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\frac{L}{EA}\begin{Bmatrix}P_1\\P_2\\0\\0\end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2A}(P_1 - P_2)$$

9.4. Ví dụ

Ví dụ 2:

Cho hệ thanh như hình bên,

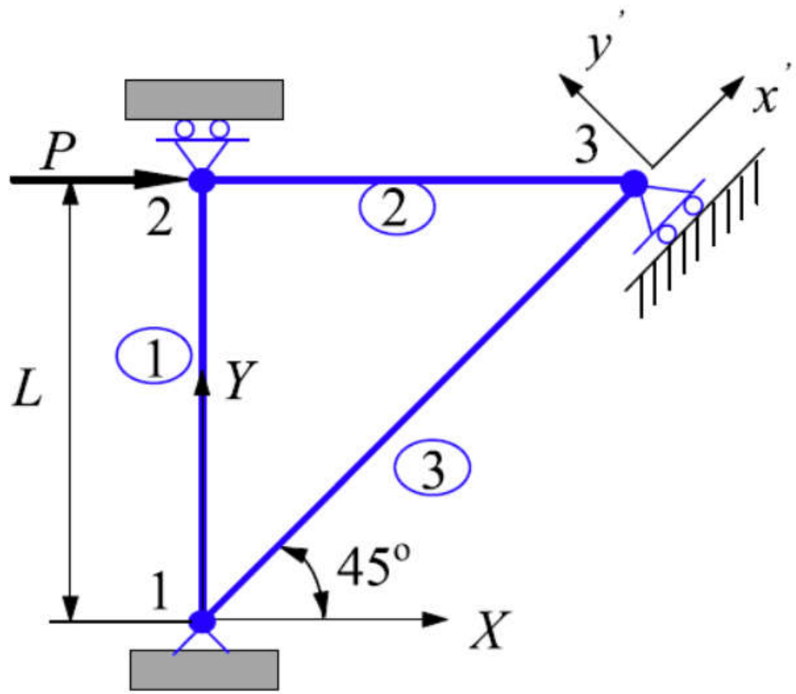
$P = 1000\ kN, L = 1m,$

$E = 210\ GPa,$

$A = 6.0 \times 10^{-4}\ m^2$ *phần tử* 1 *và* 2,

$A = 6\sqrt{2} \times 10^{-4}\ m^2$ *phần tử* 3.

Xác định các chuyển vị và các phản lực.



9.4. Ví dụ

Phần tử 1:

$$\theta = 90°, \qquad l = 0, \qquad m = 1$$

$$k_1 = \frac{(210 \times 10^9)(6.0 \times 10^{-4})}{1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} (N/m)$$

Phần tử 2:

$$\theta = 0°, \qquad l = 1, \qquad m = 0$$

$$k_2 = \frac{(210 \times 10^9)(6.0 \times 10^{-4})}{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (N/m)$$

9.4. Ví dụ

Ta có một con lăn tại nút 3 cần lưu ý đặc biệt trong nghiệm PTHH. Trước tiên thực hiện lắp ghép phương trình PTTH cho hệ thanh.

Phần tử 3:

$$\theta = 45°, \qquad l = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad m = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$k_3 = \frac{(210 \times 10^9)\left(6\sqrt{2} \times 10^{-4}\right)}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (N/m)$$

9.4. Ví dụ

Phương trình PTHH cho toàn kết cấu:

$$1260\times 10^5\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ & 1.5 & 0 & -1 & -0.5 & -0.5 \\ & & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1.5 & 0.5 \\ Sym. & & & & & 0.5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix}$$

9.4. Ví dụ

Tải trọng và điều kiện biên (BC):

$$u_1 = v_1 = v_2 = 0, \qquad \text{và } v'_3 = 0, \qquad F_{2X} = P, F_{3x'} = 0.$$

Từ quan hệ biến đổi và điều kiện biên, ta có:

$$v'_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-u_3 + v_3) = 0,$$

Do đó:

$$u_3 - v_3 = 0$$

Đây là một ràng buộc đa điểm (multipoint constraint – MPC)

9.4. Ví dụ

Tương tự ta có quan hệ cho lực tại nút 3:

$$F_{3x'} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}(F_{3X} + F_{3Y}) = 0,$$

Suy ra: $F_{3X} + F_{3Y} = 0$

Áp dụng tải trọng và điều kiện biên vào phương trình PTHH cho toàn kết cấu bằng cách xóa hàng và cột thứ 1, 2 và 4, ta được:

$$1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix}$$

9.4. Ví dụ

Ngoài ra, từ MPC và quan hệ lực tại nút 3, phương trình PTHH trở thành:

$$1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ F_{3X} \\ -F_{3X} \end{Bmatrix}$$

$$1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ F_{3X} \\ -F_{3X} \end{Bmatrix}$$

Từ phương trình thứ 3, ta có: $F_{3X} = -1260 \times 10^5 u_3$

9.4. Ví dụ

Thay vào phương trình thứ 2 và sắp xếp lại:

$$1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Giải, ta thu được chuyển vị:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2520 \times 10^5} \begin{Bmatrix} 3P \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.01191 \\ 0.003968 \end{Bmatrix} (m)$$

9.4. Ví dụ

Từ phương trình PTHH toàn cục, ta có thể tính được các phản lực:

$$\begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix} = 1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -500 \\ -500 \\ 0.0 \\ -500 \\ 500 \end{Bmatrix} \; (kN)$$


Any
Questions?