CHƯƠNG 10
PHẦN TỬ DẦM

TS. Lê Thanh Long
ltlong@hcmut.edu.vn

Nội dung

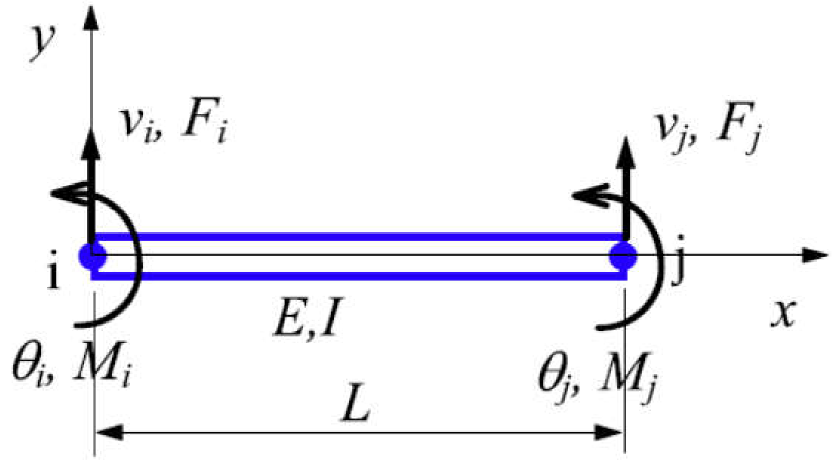
10.1 Ma trận độ cứng

10.2 Tải nút tương đương

10.3 Ví dụ

10.1. Ma trận độ cứng

Xét phần tử dầm phẳng đơn giản



Trong đó:

L: Chiều dài dầm

I: momen quán tính của mặt cắt ngang

$v = v(x)$: độ võng (chuyển vị ngang) của trục

$\theta = \frac{dv}{dx}$: góc xoay quanh trục z

$F = F(x)$: lực cắt

$M = M(x)$: momen quanh trục z

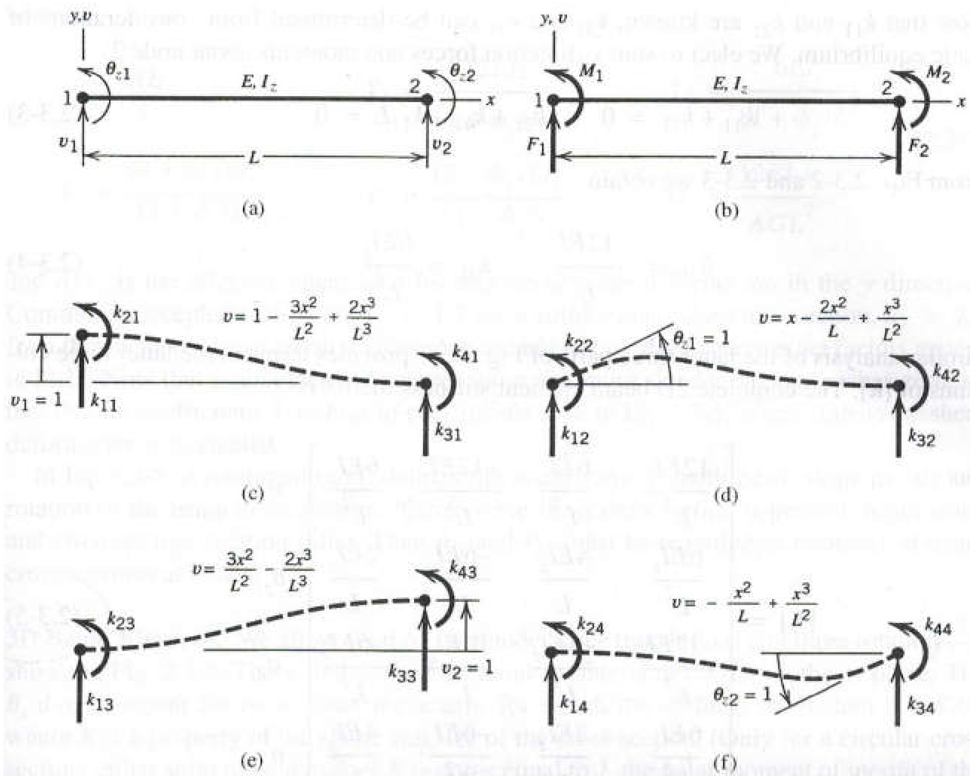
Lý thuyết dầm cơ bản

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x)$$

$$\sigma = -\frac{My}{I}$$

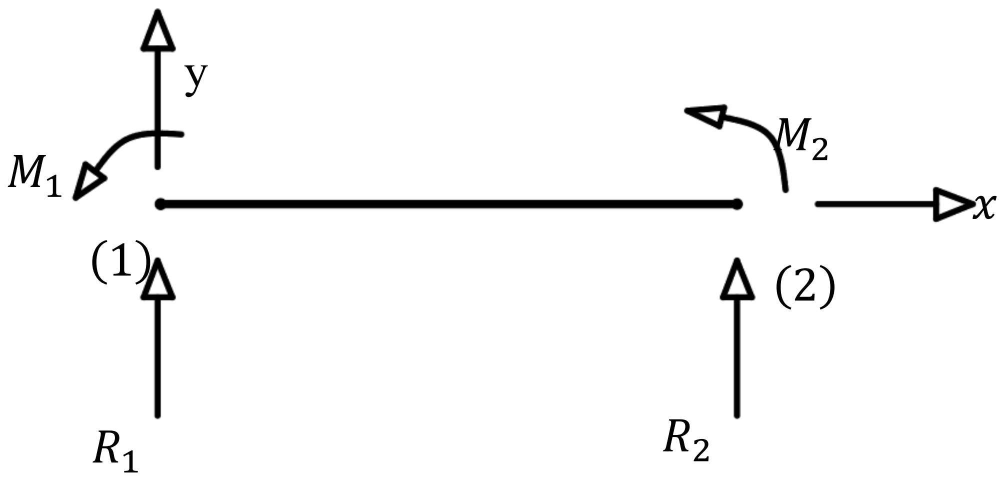
10.1. Ma trận độ cứng

Sử dụng các kết quả từ lý thuyết dầm cơ bản để tính từng cột của ma trận độ cứng



10.1. Ma trận độ cứng

Vector tải nút tương đương có các thành phần R_1, R_2, M_1, M_2



Với hàm dạng $N_1 = 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3}$, $\quad N_2 = x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$,

$$N_3 = 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3}, \quad N_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

10.1. Ma trận độ cứng

Sau đó, ta có thể biểu diễn chuyển vị của dầm dưới dạng ma trận:

$$v(x) = \mathbf{Nu}$$

$$v(x) = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)] \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

Đây là hàm bậc ba. Lưu ý quan hệ:

$$N_1 + N_3 = 1$$

$$N_2 + N_3 L + N_4 = \mathrm{x}$$

Có nghĩa là chuyển động của vật rắn được biểu diễn bởi hình dạng biến dạng giả định của hàm

10.1. Ma trận độ cứng

Độ cong của dầm:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\mathbf{Nu} = \mathbf{Bu}$$

Trong đó, ma trận biến dạng-chuyển vị **B** được cho bởi

$$B = \frac{d^2}{dx^2}\mathbf{N} = [N''_1(x) \quad N''_2(x) \quad N''_3(x) \quad N''_4(x)]$$
$$= \left[-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}\right]$$

10.1. Ma trận độ cứng

Thế năng biến dạng của phần tử dầm:

$$U = \frac{1}{2}\int \sigma^T \varepsilon dV = \frac{1}{2}\int_0^L \int_A \left(-\frac{My}{I}\right)^T \frac{1}{E}\left(-\frac{My}{I}\right) dAdx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L M^T \frac{1}{EI} M dx = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^T EI \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L (\mathbf{Bu})^T EI (\mathbf{Bu}) dx = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \left(\int_0^L \mathbf{B}^T EI\mathbf{B} dx\right)\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \mathbf{k}\,\mathbf{u}$$

Từ đó, ta có công thức ma trận độ cứng dầm đơn giản:

$$k = \int_0^L \mathbf{B}^T EI\mathbf{B} dx$$

10.1. Ma trận độ cứng

Phương trình phần tử hữu hạn:

$$\frac{EI}{L^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_i & \theta_i & v_j & \theta_j \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \end{Bmatrix}$$

10.1. Ma trận độ cứng

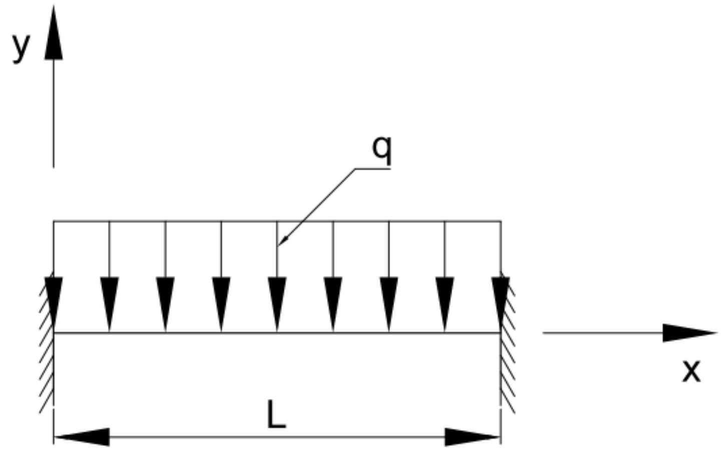
Ma trận độ cứng của một phần tử dầm 2D tổng quát:

$$
k = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} u_i & v_i & \theta_i & u_j & v_j & \theta_j \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\
0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\
0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

10.2. Tải nút tương đương

Tải nút tương đương của tải trọng ngang phân bố:

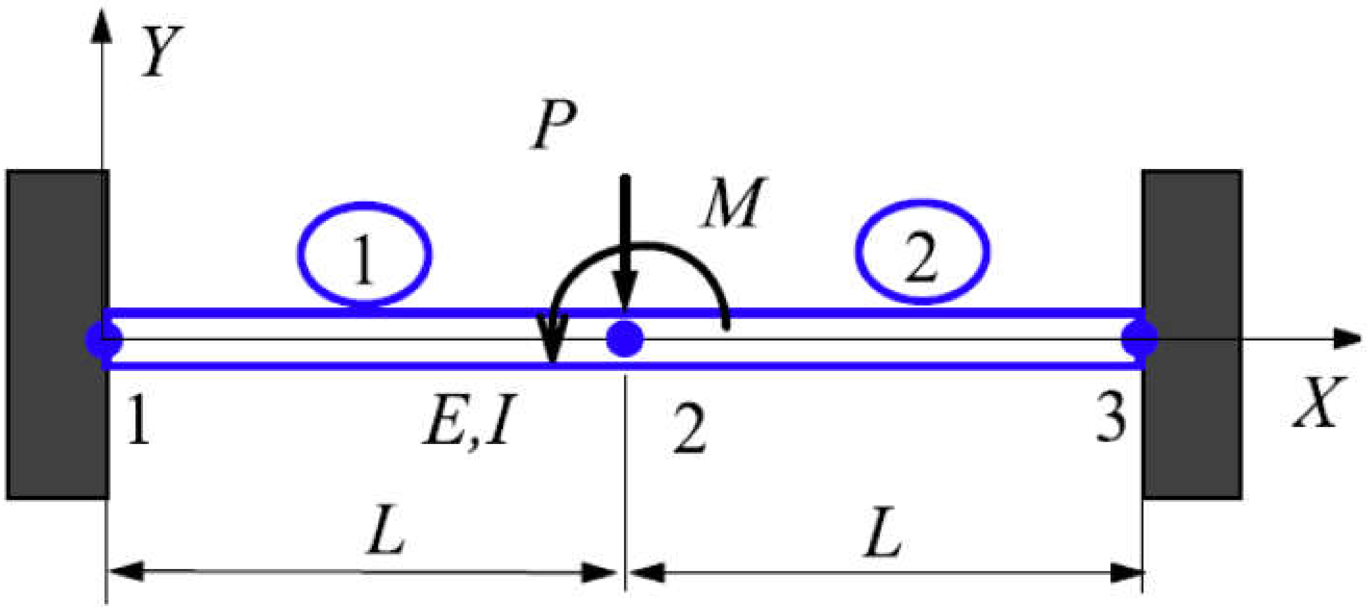
$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ M_1 \\ R_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \int_0^L \begin{Bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \\ N_4(x) \end{Bmatrix} (-q)dx = \begin{Bmatrix} \frac{-qL}{2} \\ \frac{-qL^2}{12} \\ \frac{-qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix}$$



10.3. Ví dụ

Ví dụ 1:

Cho dầm bị ngàm hai đầu, chịu lực P hướng xuống và momen M tại chính giữa dầm. Tìm chuyển vị và góc xoay tại nút chính giữa và các phản lực tại hai đầu dầm.



10.3. Ví dụ

Ví dụ 1:

Các ma trận độ cứng phần tử:

$$k_1 = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$k_2 = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

10.3. Ví dụ

Ví dụ 1:

Ma trận độ cứng chung:

$$K = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

10.3. Ví dụ

Ví dụ 1:

Phương trình phần tử hữu hạn:

$$\frac{EI}{L^3}\begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \\ F_{2Y} \\ M_2 \\ F_{3Y} \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

10.3. Ví dụ

Ví dụ 1:

Các điều kiện biên:

$$F_{2Y} = -P, \qquad M_2 = M,$$
$$v_1 = v_3 = \theta_1 = \theta_3 = 0$$

Phương trình phần tử hữu hạn thu gọn:

$$K = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ M \end{Bmatrix}$$

Ta thu được:

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{24EI}\begin{Bmatrix} -PL^2 \\ 3M \end{Bmatrix}$$

10.3. Ví dụ

Ví dụ 1:

Từ phương trình PTHH toàn cục -> tính được các phản lực và moment:

$$\begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \\ F_{3Y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L \\ 6L & 2L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{Bmatrix} 2P + 3M/L \\ PL + M \\ 2P - 3M/L \\ -PL + M \end{Bmatrix}$$

Ứng suất trong dầm tại hai đầu có thể được tính bằng công thức:

$$\sigma = \sigma_x = -\frac{My}{I}$$

10.3. Ví dụ

Ví dụ 1:

Lưu ý: Nghiệm PTHH chính xác theo lý thuyết dầm do không có tải trọng phân bố hiện diện giữa các nút.

Nhắc lại:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x)$$

Và: $\frac{dM}{dx} = V \quad (V - lực\ cắt\ trong\ dầm)$

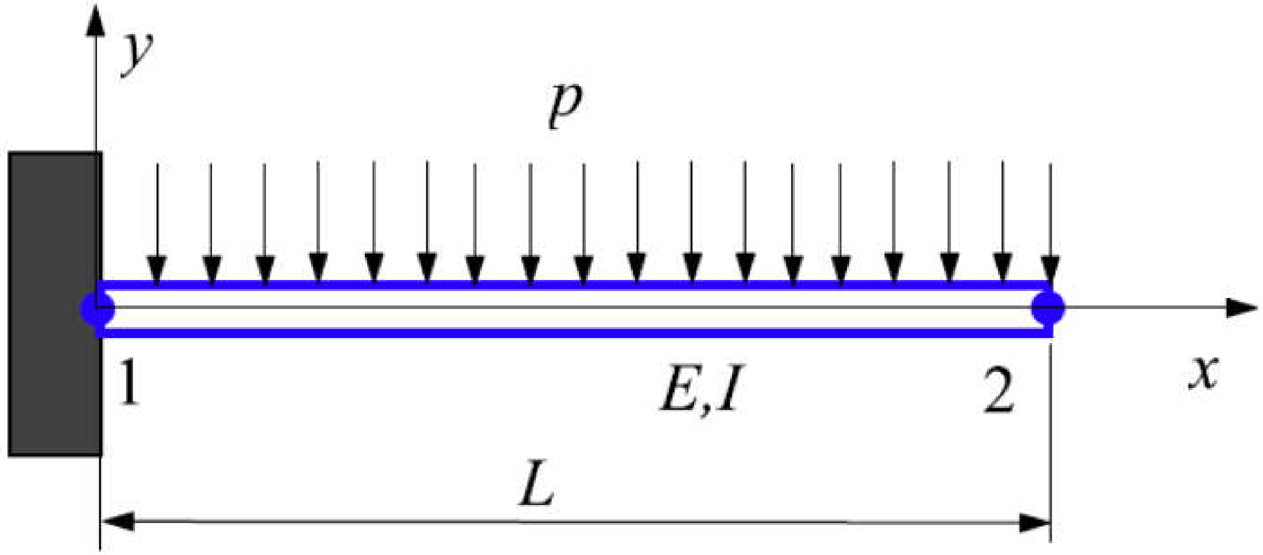
$\frac{dV}{dx} = q \quad (q - tải\ trọng\ phân\ bố\ trên\ dầm)$

Vì vậy: $$EI\frac{d^4v}{dx^4} = q(x)$$

Nếu $q(x) = 0$, nghiệm chính xác của chuyển vị v là hàm bậc 3 của x (được mô tả bằng các biểu thức hàm dạng)

10.3. Ví dụ

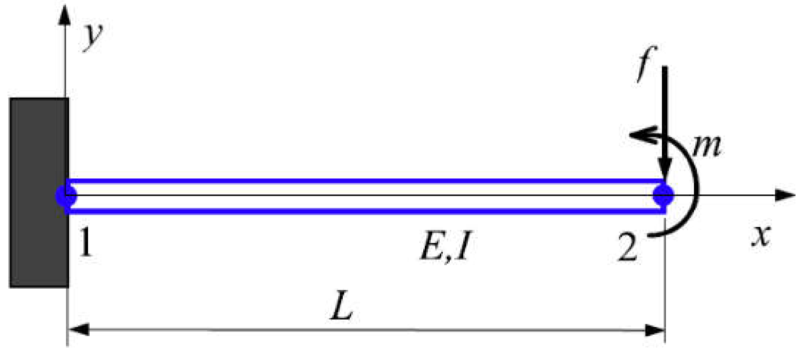
Ví dụ 2:



Cho dầm bị ngàm một đầu, với tải trọng phân bố p.

Tìm chuyển vị và góc xoay tại đầu bên phải, phản lực và mômen tại đầu bên trái.

10.3. Ví dụ



Ví dụ 2:

Công của tải nút tương đương:

Trong đó:

$$f = \frac{pL}{2}, \qquad m = pL^2/12$$

Áp dụng phương trình PTHH, ta có:

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \\ F_{2Y} \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

10.3. Ví dụ

Ví dụ 2:

Các điều kiện biên:

$$F_{2Y} = -f, \qquad M_2 = m$$
$$v_1 = \theta_1 = 0$$

Phương trình PTHH thu gọn:

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f \\ m \end{Bmatrix}$$

Giải, ta thu được:

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{6EI}\begin{Bmatrix} -2L^2 f + 3Lm \\ -3Lf + 6m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -pL^4/8EI \\ -pL^3/6EI \end{Bmatrix} \qquad \text{(A)}$$

10.3. Ví dụ

Ví dụ 2:

Lưu ý:

Độ võng (x) trong dầm tính bằng phương pháp PTHH có sai khác với nghiệm chính xác. Nghiệm chính xác từ thuyết dầm cơ bản là đa thức bậc 4 của x, trong khi nghiệm PTHH của v chỉ là đa thức bậc 3 của x.

Nếu moment tương đương m bị bỏ qua, ta có:

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{6EI}\begin{Bmatrix} -2L^2 f \\ -3Lf \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -pL^4/6EI \\ -pL^3/4EI \end{Bmatrix} \qquad \text{(B)}$$

10.3. Ví dụ

Ví dụ 2:

Sai số trong (B) sẽ giảm nếu sử dụng nhiều phần tử hơn. Thực tế, moment tương đương m thường bị bỏ qua trong các ứng dụng PTHH. Nghiệm PTHH sẽ hội tụ khi có nhiều phần tử được áp dụng.

Từ phương trình PTHH ◊ tính toán phản lực và moment:

$$\begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \end{Bmatrix} = \frac{L^3}{EI} \begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} pL/2 \\ 5pL^2/12 \end{Bmatrix}$$

10.3. Ví dụ

Ví dụ 2:

Trong đó, kết quả trong (A) được sử dụng. Vector lực này chứa các lực nút hiệu dụng tổng bao gồm các lực nút tương đương cho tải p được cho bởi:

$$\begin{Bmatrix} -pL/2 \\ -pL^2/12 \end{Bmatrix} \quad \text{(B)}$$

Các phản lực đứng có thể tính được như sau:

$$\begin{Bmatrix} F_{1Y} \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} pL/2 \\ 5pL^2/12 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -pL/2 \\ -pL^2/12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} pL \\ pL^2/2 \end{Bmatrix}$$


Any
Questions?