



Digital Signal Processing

405109

cuu duong than cong . com

Chapter 2

Quantization

cuu duong than cong . com

Nguyen Thanh Tuan, M.Eng.
Department of Telecommunications (113B3)
Ho Chi Minh City University of Technology
Email: nttbk97@yahoo.com

1. Quantization process

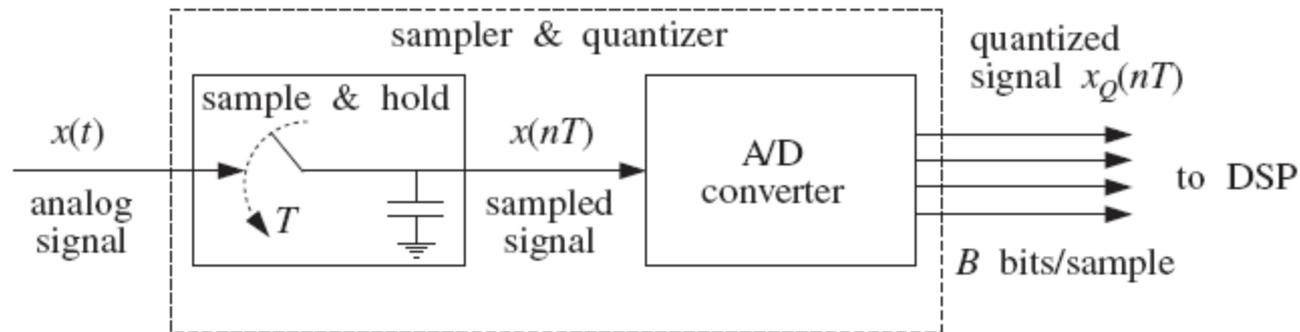


Fig: Analog to digital conversion

- ❖ The quantized sample $x_Q(nT)$ is represented by **B bit**, which can take 2^B possible values.
- ❖ An A/D is characterized by a **full-scale range R** which is divided into 2^B quantization levels. Typical values of R in practice are between 1-10 volts.

1. Quantization process

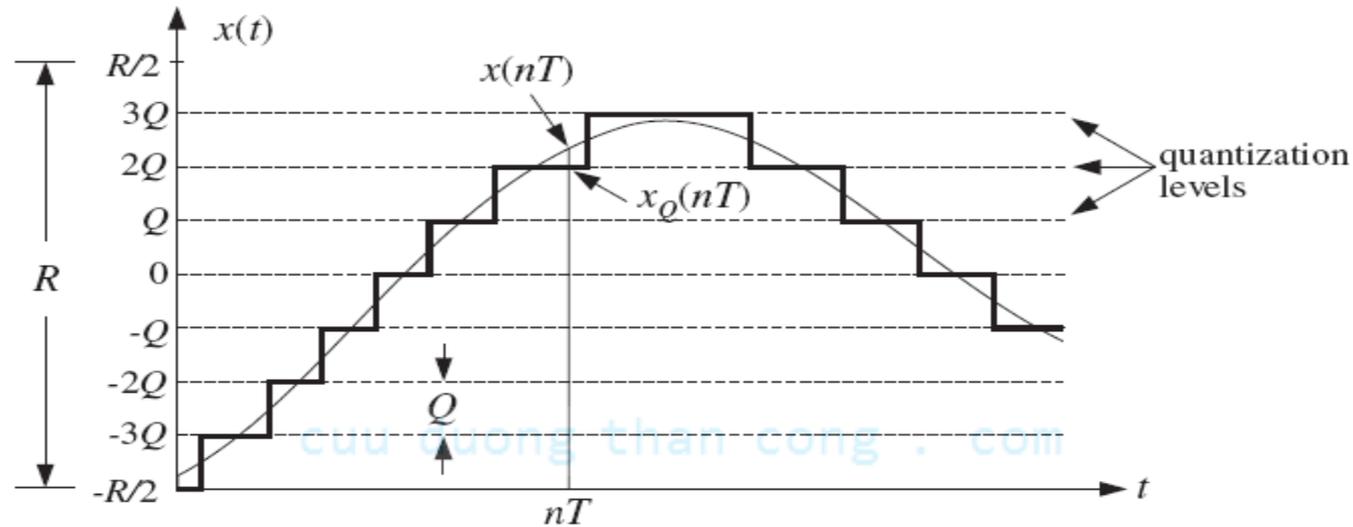


Fig: Signal quantization

- ❖ Quantizer resolution or quantization width (step) $Q = \frac{R}{2^B}$
- ❖ A **bipolar** ADC $-\frac{R}{2} \leq x_Q(nT) < \frac{R}{2}$
- ❖ A **unipolar** ADC $0 \leq x_Q(nT) < R$

1. Quantization process

- ❖ Quantization by **rounding**: replace each value $x(nT)$ by the **nearest** quantization level.
- ❖ Quantization by **truncation**: replace each value $x(nT)$ by its **below nearest** quantization level.
- ❖ Quantization error: $e(nT) = x_Q(nT) - x(nT)$
- ❖ Consider rounding quantization: $-\frac{Q}{2} \leq e \leq \frac{Q}{2}$

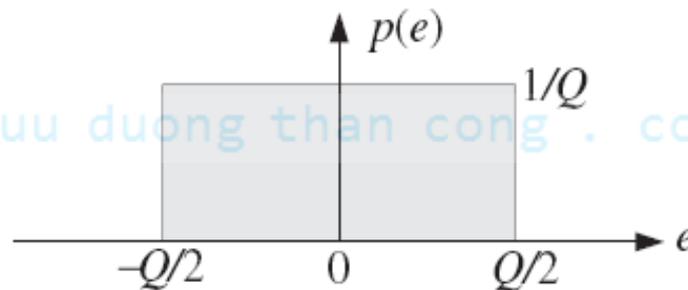


Fig: Uniform probability density of quantization error

1. Quantization process

❖ The **mean value** of quantization error $\bar{e} = \int_{-Q/2}^{Q/2} ep(e)de = \int_{-Q/2}^{Q/2} e \frac{1}{Q} de = 0$

❖ The **mean-square error** $\sigma_q^2 = \overline{e^2} = \int_{-Q/2}^{Q/2} (e - \bar{e})^2 p(e)de = \int_{-Q/2}^{Q/2} e^2 \frac{1}{Q} de = \frac{Q^2}{12}$
(power)

❖ Root-mean-square (rms) error: $e_{rms} = \sigma_q = \sqrt{\overline{e^2}} = \frac{Q}{\sqrt{12}}$

❖ R and Q are the ranges of the signal and quantization noise, then the signal to noise ratio (SNR) or dynamic range of the quantizer is defined as

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_q^2} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{R}{Q} \right) = 20 \log_{10} (2^B) = 6B \text{ dB}$$

which is referred to as **6 dB bit rule**.

Example 1



- ❖ In a digital audio application, the signal is sampled at a rate of 44 KHz and each sample quantized using an A/D converter having a full-scale range of 10 volts. Determine the number of bits B if the rms quantization error must be kept below 50 microvolts. Then, determine the actual rms error and the bit rate in bits per second.

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

2. Digital to Analog Converters (DACs)

- ❖ We begin with A/D converters, because they are used as the building blocks of successive approximation ADCs.

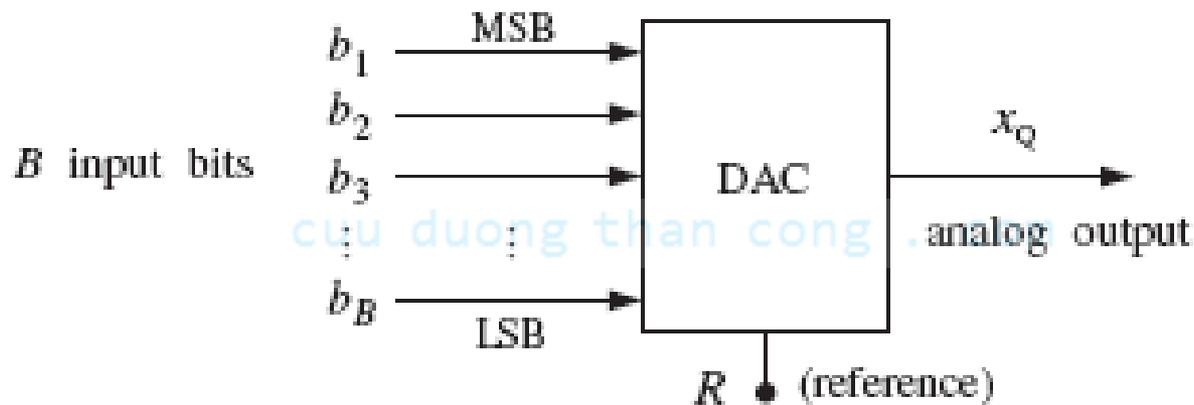


Fig: B-bit D/A converter

- ❖ Vector B input bits : $b = [b_1, b_2, \dots, b_B]$. Note that b_B is the **least significant bit (LSB)** while b_1 is the **most significant bit (MSB)**.
- ❖ For unipolar signal, $x_Q \in [0, R)$; for bipolar $x_Q \in [-R/2, R/2)$.

2. DACs

❖ Full scale $R = V_{REF}$, $B = 4$ bit

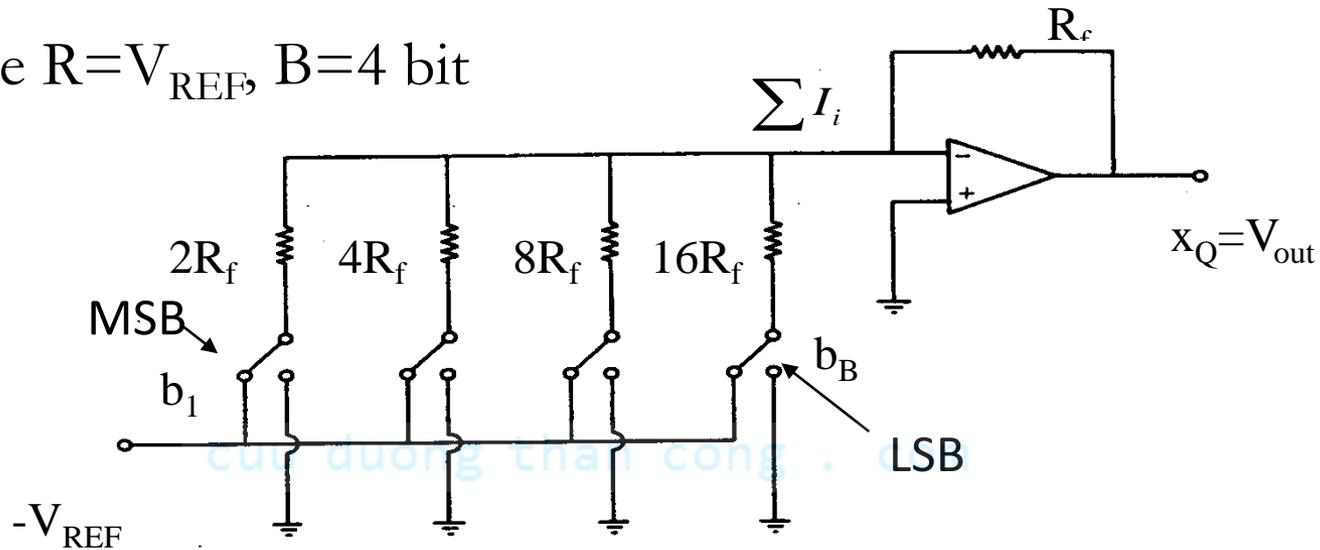


Fig: DAC using binary weighted resistor

$$\sum I = V_{REF} \left(\frac{b_1}{2R_f} + \frac{b_2}{4R_f} + \frac{b_3}{8R_f} + \frac{b_4}{16R_f} \right)$$

$$x_Q = V_{OUT} = \sum I \cdot R_f = V_{REF} \left(\frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{4} + \frac{b_3}{8} + \frac{b_4}{16} \right)$$

$$x_Q = R2^{-4} (b_1 2^{-3} + b_2 2^{-2} + b_3 2^{-1} + b_4 2^0) = Q(b_1 2^{-3} + b_2 2^{-2} + b_3 2^{-1} + b_4 2^0)$$

2. DACs



❖ **Unipolar natural binary** $x_Q = R(b_1 2^{-1} + b_2 2^{-2} + \dots + b_B 2^{-B}) = Qm$

where m is the integer whose binary representation is $b = [b_1, b_2, \dots, b_B]$.

$$m = b_1 2^{B-1} + b_2 2^{B-2} + \dots + b_B 2^0$$

❖ **Bipolar offset binary**: obtained by shifting the x_Q of unipolar natural binary converter by half-scale $R/2$:

$$x_Q = R(b_1 2^{-1} + b_2 2^{-2} + \dots + b_B 2^{-B}) - \frac{R}{2} = Qm - \frac{R}{2}$$

❖ **Two's complement code**: obtained from the offset binary code by complementing the most significant bit, i.e., replacing b_1 by $\bar{b}_1 = 1 - b_1$.

$$x_Q = R(\bar{b}_1 2^{-1} + b_2 2^{-2} + \dots + b_B 2^{-B}) - \frac{R}{2}$$

Example 2



- ❖ A 4-bit D/A converter has a full-scale $R=10$ volts. Find the quantized analog values for the following cases ?
- Natural binary with the input bits $b=[1001]$?
 - Offset binary with the input bits $b=[1011]$?
 - Two's complement binary with the input bits $b=[1101]$?

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

3. A/D converters

- ❖ A/D converters quantize an analog value x so that it is represented by B bits $b=[b_1, b_2, \dots, b_B]$.

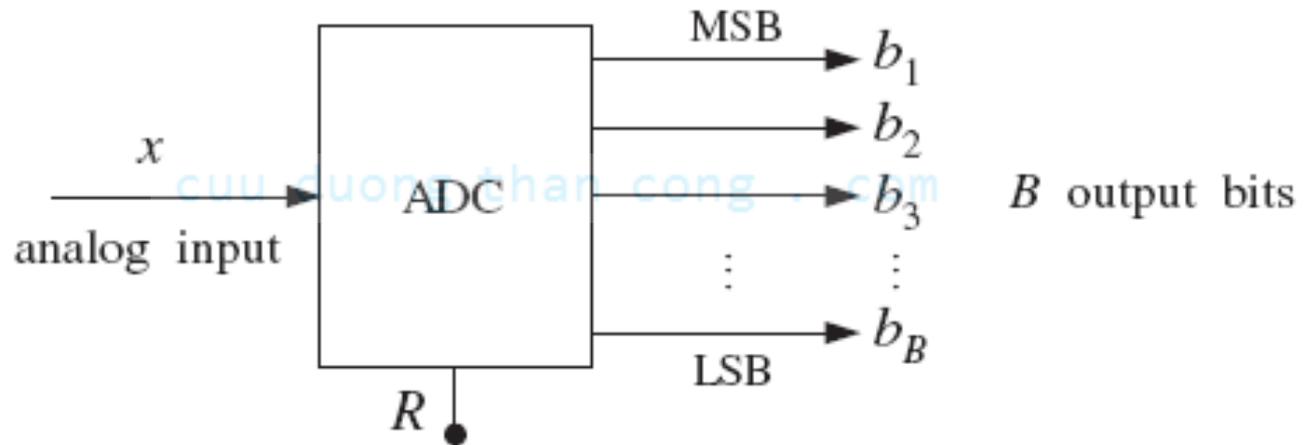


Fig: B-bit A/D converter

3. A/D converters

- ❖ One of the most popular converters is the successive approximation A/D converter

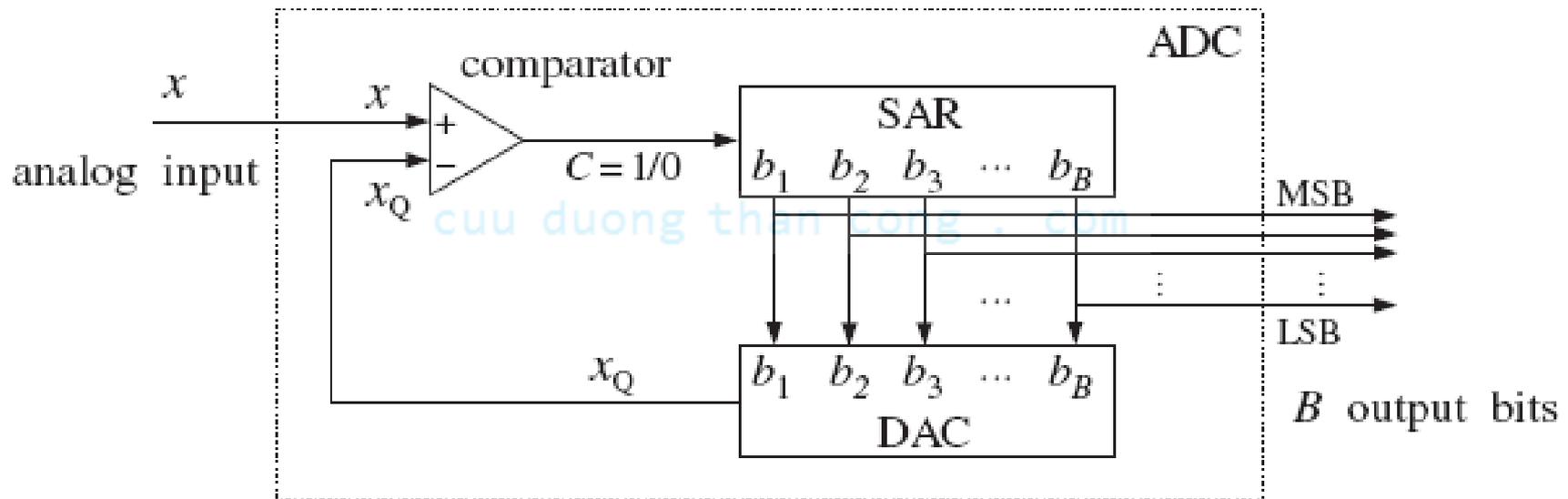


Fig: Successive approximation A/D converter

- ❖ After B tests, the **successive approximation register** (SAR) will hold the correct bit vector b .

3. A/D converters

❖ Successive approximation algorithm

for each x to be converted, do:
initialize $\mathbf{b} = [0, 0, \dots, 0]$
for $i = 1, 2, \dots, B$ do:
 $b_i = 1$
 $x_Q = \text{dac}(\mathbf{b}, B, R)$
 $b_i = u(x - x_Q)$

where the unit-step function is defined by $u(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$

This algorithm is applied for the **natural and offset binary with truncation quantization.**

Example 3

❖ Consider a 4-bit ADC with the full-scale $R=10$ volts. Using the successive approximation algorithm to find offset binary of **truncation quantization** for the analog values $x=3.5$ volts and $x=-1.5$ volts.

Test	$b_1b_2b_3b_4$	x_Q	$C = u(x - x_Q)$
b_1	1 000	0,000	1
b_2	1 1 00	2,500	1
b_3	11 1 0	3,750	0
b_4	110 1	3,125	1
	1101	3,125	

3. A/D converter

- ❖ For rounding quantization, we shift x by $Q/2$:

for each x to be converted, do:

$$y = x + Q/2$$

initialize $\mathbf{b} = [0, 0, \dots, 0]$

for $i = 1, 2, \dots, B$ do:

$$b_i = 1$$

$$x_Q = \text{dac}(\mathbf{b}, B, R)$$

$$b_i = u(y - x_Q)$$

- ❖ For the two's complement code, the sign bit b_1 is treated separately.

for each x to be converted, do:

$$y = x + Q/2$$

initialize $\mathbf{b} = [0, 0, \dots, 0]$

$$b_1 = 1 - u(y)$$

for $i = 2, 3, \dots, B$ do:

$$b_i = 1$$

$$x_Q = \text{dac}(\mathbf{b}, B, R)$$

$$b_i = u(y - x_Q)$$

Example 4

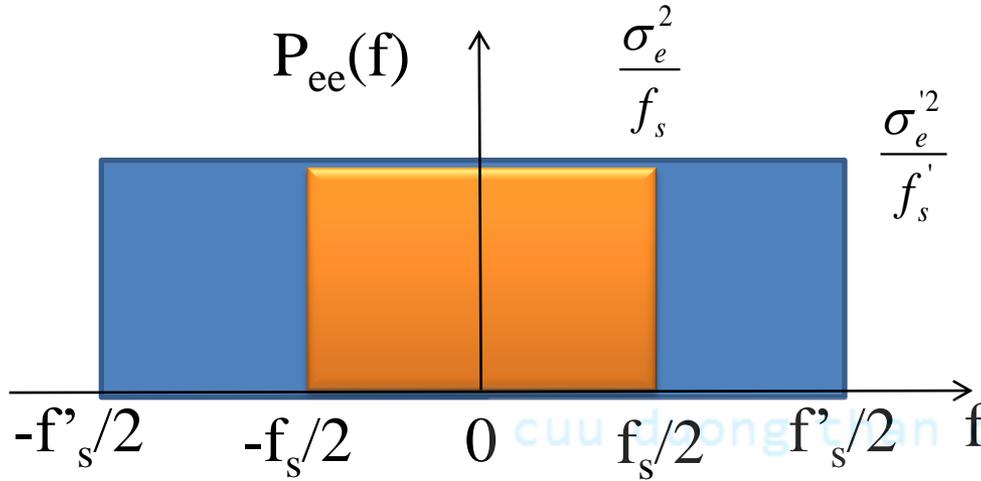


- ❖ Consider a 4-bit ADC with the full-scale $R=10$ volts. Using the successive approximation algorithm to find offset and two's complement of **rounding quantization** for the analog values $x=3.5$ volts.

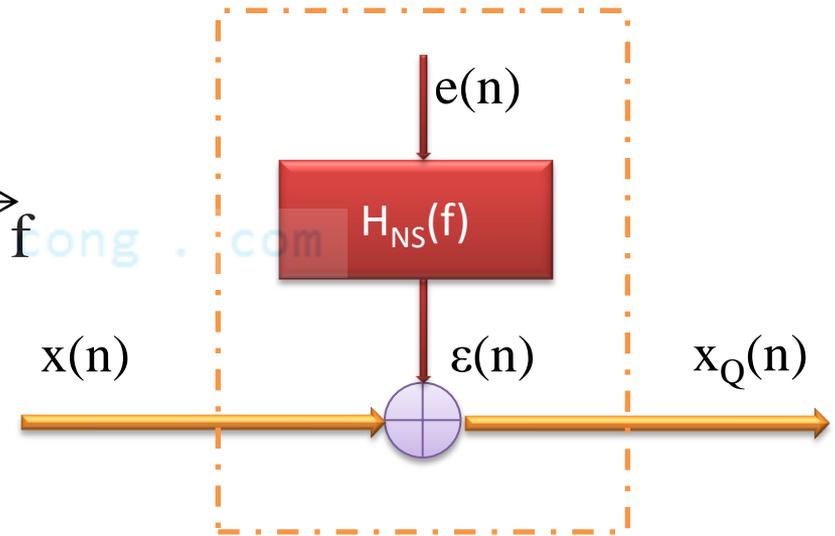
cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

Oversampling noise shaping



$$\frac{\sigma_e^2}{f_s} = \frac{\sigma_e'^2}{f'_s} \Rightarrow \sigma_e^2 = f_s \frac{\sigma_e'^2}{f'_s}$$



$$|H_{NS}(f)|^2 = \left| 2 \sin \left(\frac{\pi f}{f'_s} \right) \right|^{2p}, \quad \text{for } -\frac{f'_s}{2} \leq f \leq \frac{f'_s}{2}$$

Oversampling noise shaping



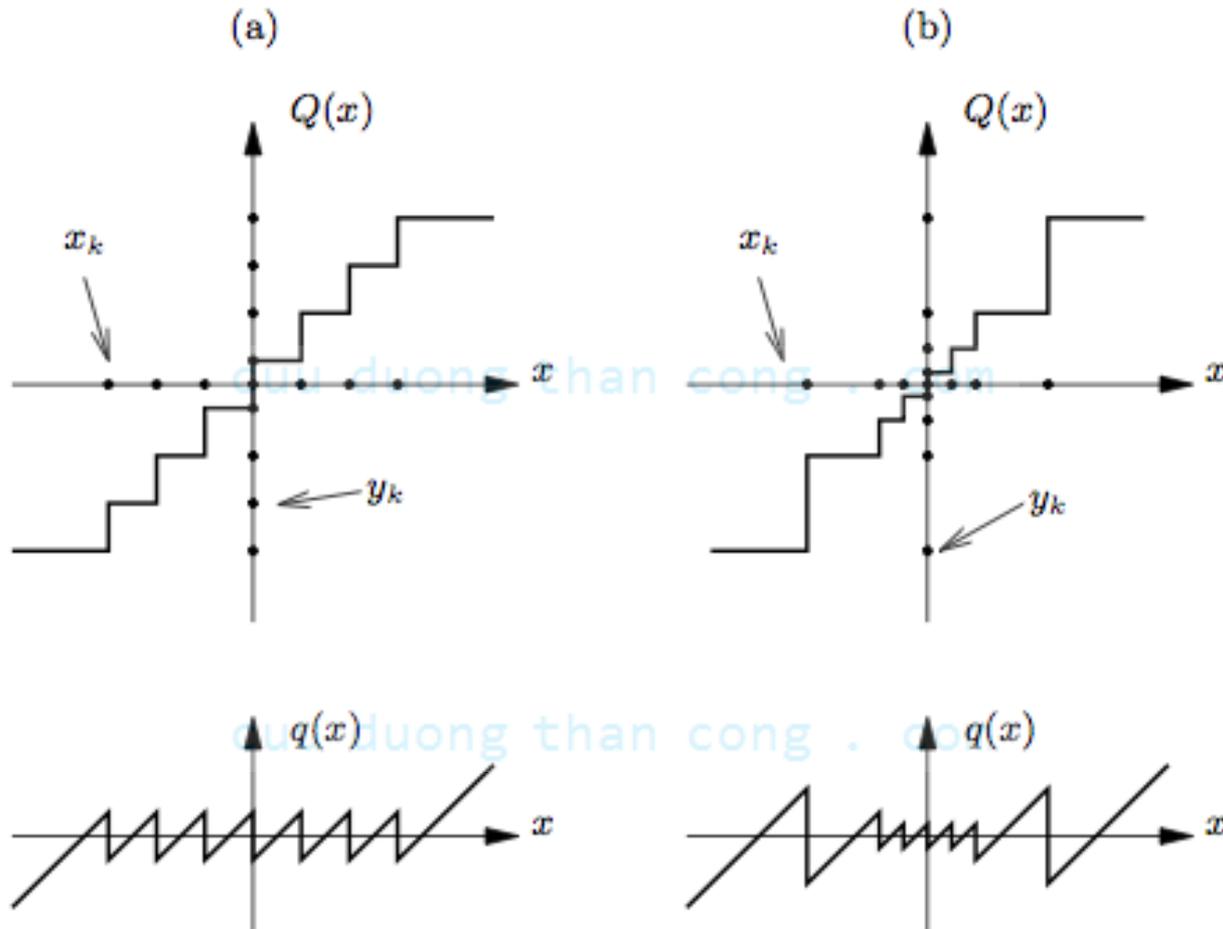
$$\Delta B = (p + 0.5) \log_2 L - 0.5 \log_2 \left(\frac{\pi^{2p}}{2p + 1} \right)$$

p	L	4	8	16	32	64	128
0	$\Delta B = 0.5 \log_2 L$	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
1	$\Delta B = 1.5 \log_2 L - 0.86$	2.1	3.6	5.1	6.6	8.1	9.6
2	$\Delta B = 2.5 \log_2 L - 2.14$	2.9	5.4	7.9	10.4	12.9	15.4
3	$\Delta B = 3.5 \log_2 L - 3.55$	3.5	7.0	10.5	14.0	17.5	21.0
4	$\Delta B = 4.5 \log_2 L - 5.02$	4.0	8.5	13.0	17.5	22.0	26.5
5	$\Delta B = 5.5 \log_2 L - 6.53$	4.5	10.0	15.5	21.0	26.5	32.0

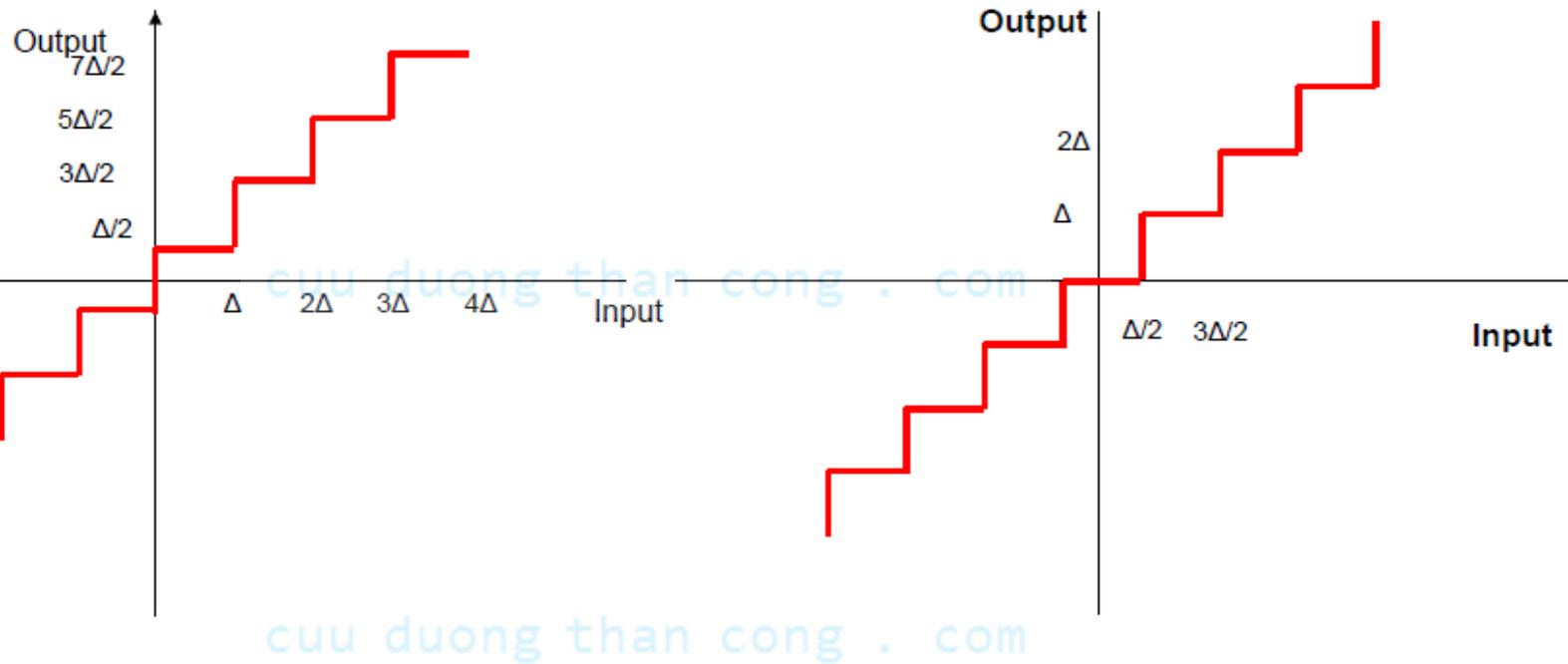
$$\sigma_{\epsilon}^2 = \begin{cases} Q^2/12, & \text{undithered} \\ 2Q^2/12, & \text{rectangular dither} \\ 3Q^2/12, & \text{triangular dither} \\ 4Q^2/12, & \text{Gaussian dither} \end{cases}$$

cuu duong than cong . com

Uniform and non-uniform quantization



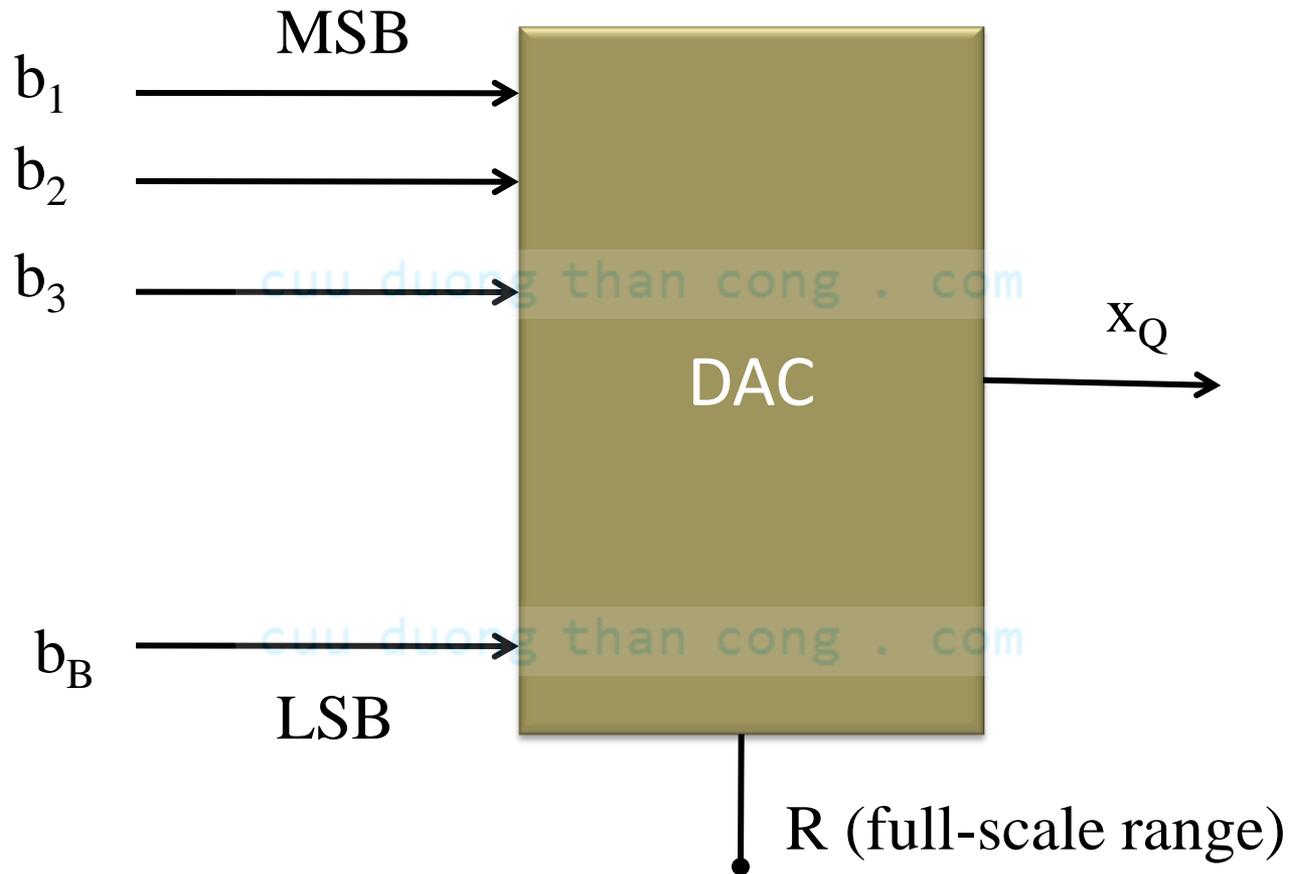
Mid-riser and mid-tread quantization



cuu duong than cong . com

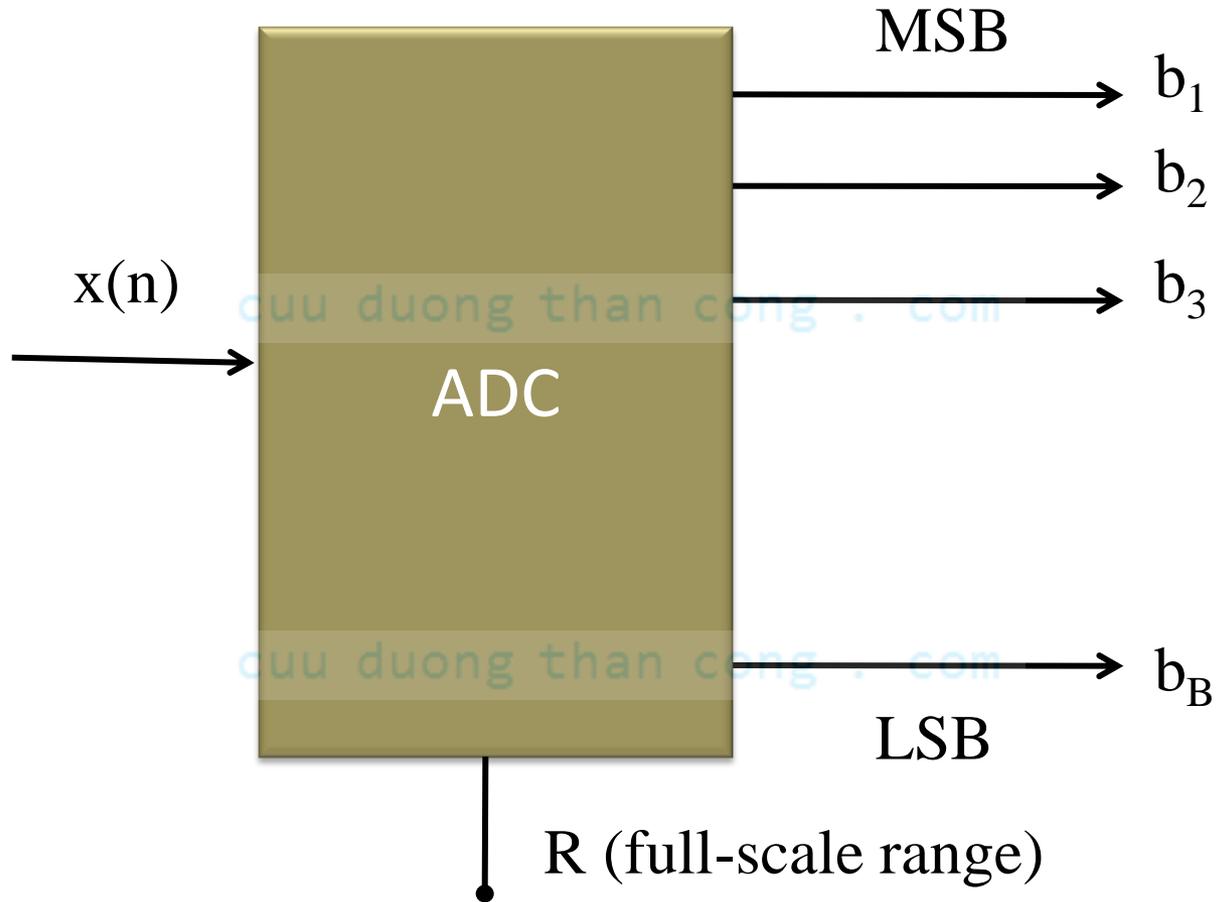
Bonus 2.1

❖ Write a program to simulate DAC.



Bonus 2.2

❖ Write a program to simulate ADC.



- ❖ Các thông số cơ bản của quá trình lượng tử hóa?
- ❖ Quan hệ giữa các nguyên tắc lượng tử?
- ❖ Quan hệ giữa các nguyên tắc mã hóa?
- ❖ Tính chất của sai số lượng tử?
- ❖ Hiệu quả của lấy mẫu dư và định dạng nhiều?
- ❖ Hiệu quả của dither?
- ❖ Giải thuật test bit?
- ❖ Xác định mức lượng tử và các bit lượng tử?
- ❖ Xác định dung lượng cần lưu trữ?
- ❖ Xác định tốc độ xử lý yêu cầu của chip DSP?

Homework 1



- ❖ Cho bộ lượng tử và mã hóa nhị phân tự nhiên $B = 5$ bit hoạt động theo nguyên tắc làm tròn gần nhất (rounding) với khoảng lượng tử đều $Q = 1.1 @$ (biết 0 là giá trị lượng tử nhỏ nhất).
- Xác định giá trị lượng tử lớn nhất?
 - Kiểm tra xem liệu giá trị 20.10 có là giá trị lượng tử hay không?
 - Xác định giá trị lượng tử tương ứng với từ mã 10011?
 - Xác định từ mã của mẫu tín hiệu ngõ vào 20.10?
 - Làm lại câu d trong trường hợp $B = 8$ bit?

cuu duong than cong . com

- ❖ Cho bộ lượng tử và mã hóa nhị phân tự nhiên 8 bit hoạt động theo nguyên tắc làm tròn gần nhất (rounding) với khoảng lượng tử đều $Q = 0.4@$ (biết 0 là giá trị lượng tử nhỏ nhất).
- Xác định giá trị lượng tử lớn nhất?
 - Kiểm tra xem liệu giá trị 24.04 có là giá trị lượng tử hay không?
 - Xác định giá trị lượng tử tương ứng với từ mã 00111101?
 - Xác định từ mã của mẫu tín hiệu ngõ vào 20.13?
 - Dùng giải thuật test bit, xác định từ mã của mẫu tín hiệu ngõ vào 25.03?
 - Đề xuất 1 giải pháp để thực hiện lượng tử theo nguyên tắc rút bớt (làm tròn xuống) trong trường hợp vẫn sử dụng bộ lượng tử và mã hóa hoạt động theo nguyên tắc làm tròn trên?

Homework 3



- ❖ Cho bộ lượng tử và mã hóa nhị phân tự nhiên 8 bit hoạt động theo nguyên tắc làm tròn với khoảng lượng tử đều $Q = 0.1 @$ (biết 0 là giá trị lượng tử nhỏ nhất).
- Xác định giá trị lượng tử lớn nhất?
 - Xác định giá trị lượng tử tương ứng với từ mã 11100011?
 - Xác định từ mã của mẫu tín hiệu ngõ vào 22.07?
 - Dùng giải thuật test bit, xác định từ mã của mẫu tín hiệu ngõ vào 9.05?
 - Giả sử tín hiệu phân bố đều trong tầm hoạt động, tính tỉ số công suất tín hiệu trên nhiễu SNR của bộ lượng tử trên?

Homework 4



- ❖ Cho bộ lượng tử lưỡng cực đối xứng hoạt động theo nguyên tắc làm tròn với khoảng lượng tử đều $Q = 0.2@$ (biết 0 là một giá trị lượng tử) và mã hóa nhị phân 8 bit dạng bù 2.
- Xác định giá trị lượng tử lớn nhất và nhỏ nhất?
 - Xác định giá trị lượng tử tương ứng với từ mã 10001000?
 - Xác định từ mã của mẫu tín hiệu ngõ vào 1.64?
 - Dùng giải thuật test bit, xác định giá trị lượng tử của mẫu tín hiệu ngõ vào 1.64?

cuu duong than cong . com

Homework 5



- ❖ Một tín hiệu rời rạc được lượng tử và mã hóa bằng bộ chuyển đổi A/D 4 bit có tầm toàn thang $R=1$ @ V dùng giải thuật xấp xỉ liên tiếp làm tròn xuống (truncation).
- Hãy xác định khoảng lượng tử Q ?
 - Tìm giá trị lượng tử x_Q cho giá trị rời rạc $x=2.75$ V và từ mã $b=[b_1 b_2 b_3 b_4]$ tương ứng cho mã offset?
 - Lặp lại câu b) cho mã bù hai?

cuu duong than cong . com