

TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

ThS. Đặng Ngọc Minh Đức

cuu duong than cong . com

NỘI DUNG MÔN HỌC

- Chương 1: Những định luật cơ bản trong trường điện từ
- Chương 2: Trường điện tĩnh
- Chương 3: Trường điện dừng
- Chương 4: Trường từ dừng
- Chương 5: Trường điện từ biến thiên

Tài liệu tham khảo:

- Ngô Nhật Ảnh, Trương Trọng Tuấn Mỹ, *Trường điện từ*, NXB Đại học Quốc gia Tp.HCM, 2000.

27-Apr-09

Chương 0:

GIẢI TÍCH VECTOR

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 0:

GIẢI TÍCH VECTOR

- Trong không gian 3 chiều, 3 họ mặt cong độc lập:
- $f_1(x, y, z) = u_1; f_2(x, y, z) = u_2; f_3(x, y, z) = u_3$
- 3 mặt $u_1 = \text{const}; u_2 = \text{const}; u_3 = \text{const}$ là các mặt tọa độ. Chọn gốc tọa độ làm chuẩn.
- Hai mặt tọa độ cắt nhau theo 1 đường gọi là đường tọa độ.
- 3 vector đơn vị $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ xác định hướng.
- Hệ tọa độ cong – trực giao – thuận:

$$\vec{i}_1 = \vec{i}_2 \times \vec{i}_3; \vec{i}_2 = \vec{i}_3 \times \vec{i}_1; \vec{i}_3 = \vec{i}_1 \times \vec{i}_2$$

27-Apr-09

CHƯƠNG 0:

GIẢI TÍCH VECTOR

27-Apr-09

- dl_1, dl_2, dl_3 là những yếu tố dài trên các đường tọa độ

Các hệ số h_1, h_2, h_3 là các hệ số Larmor

$$dl_1 = h_1 du_1, dl_2 = h_2 du_2, dl_3 = h_3 du_3$$

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i}\right)^2} \quad i = 1, 2, 3$$

- Đối với tọa độ trực giao, yếu tố dài:

$$dl^2 = dl_1^2 + dl_2^2 + dl_3^2$$

- Trong hệ tọa độ Descartes:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

5

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 0:

GIẢI TÍCH VECTOR

27-Apr-09

Trong hệ tọa độ cong trực giao:

- Vector dịch chuyển: $\vec{dl} = h_1 du_1 \vec{i}_1 + h_2 du_2 \vec{i}_2 + h_3 du_3 \vec{i}_3$

- Yếu tố diện tích: $dS_1 = h_2 h_3 du_2 du_3$

$$dS_2 = h_3 h_1 du_3 du_1$$

$$dS_3 = h_1 h_2 du_1 du_2$$

- Yếu tố thể tích: $dV = dl_1 dl_2 dl_3 = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$

6

CHƯƠNG 0: GIẢI TÍCH VECTOR

- Hệ tọa độ Descartes:

$$u_1 = x = \text{const}; u_2 = y = \text{const}; u_3 = z = \text{const}$$

- Gốc tọa độ là giao điểm 3 mặt phẳng $x=0, y=0, z=0$

- Vector đơn vị: $\vec{i}_1 = \vec{i}_x; \vec{i}_2 = \vec{i}_y; \vec{i}_3 = \vec{i}_z$

$$\vec{i}_x = \vec{i}_y \times \vec{i}_z; \vec{i}_y = \vec{i}_z \times \vec{i}_x; \vec{i}_z = \vec{i}_x \times \vec{i}_y$$

- Vector đơn vị dịch chuyển:

$$d\vec{l} = dx\vec{i}_x + dy\vec{i}_y + dz\vec{i}_z$$

$$dl = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

7

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 0: GIẢI TÍCH VECTOR

- Hệ số Larmor: $h_1 = 1; h_2 = 1; h_3 = 1$

- Yếu tố diện tích: $d\vec{S}_x = \pm dydz\vec{i}_x$

$$d\vec{S}_y = \pm dzdx\vec{i}_y$$

$$d\vec{S}_z = \pm dxdy\vec{i}_z$$

- Yếu tố thể tích: $dV = dxdydz$

- Vector vị trí: $\vec{r} = x\vec{i}_x + y\vec{i}_y + z\vec{i}_z$

8

CHƯƠNG 0:

GIẢI TÍCH VECTOR

27-Apr-09

- Hệ tọa độ trụ:

$$R = \text{const}; \phi = \text{const}; z = \text{const}$$

- Vector đơn vị: $\vec{i}_R = \vec{i}_\phi \times \vec{i}_z; \vec{i}_\phi = \vec{i}_z \times \vec{i}_R; \vec{i}_z = \vec{i}_R \times \vec{i}_\phi$

$$x = R \cos \phi; y = R \sin \phi; z = z$$

- Vector đơn vị dịch chuyển:

$$d\vec{l} = dR\vec{i}_R + R d\phi \vec{i}_\phi + dz \vec{i}_z$$

$$dl = \sqrt{(dR^2 + (Rd\phi)^2 + dz^2)}$$

9

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 0:

GIẢI TÍCH VECTOR

27-Apr-09

- Hệ số Larmor: $h_1 = 1; h_2 = R; h_3 = 1$

- Yếu tố diện tích: $d\vec{S}_R = \pm R d\phi dz \vec{i}_R$

$$d\vec{S}_\phi = \pm dz dR \vec{i}_\phi$$

$$d\vec{S}_z = \pm R dR d\phi \vec{i}_z$$

- Yếu tố thể tích: $dV = R dR d\phi dz$

- Vector vị trí xác định P(R,Φ,z): $\vec{r} = R\vec{i}_R + z\vec{i}_z$

10

CHƯƠNG 0:

GIẢI TÍCH VECTOR

27-Apr-09

- Hệ tọa độ cầu:

$$r = \text{const}; \theta = \text{const}; \phi = \text{const}$$

- Vector đơn vị:

$$\vec{i}_r = \vec{i}_\theta \times \vec{i}_\phi; \vec{i}_\theta = \vec{i}_\phi \times \vec{i}_r; \vec{i}_\phi = \vec{i}_r \times \vec{i}_\theta$$

$$x = r \sin \theta \cos \phi; y = r \sin \theta \sin \phi; z = r \cos \theta$$

- Vector đơn vị dịch chuyển:

$$d\vec{l} = dr\vec{i}_r + r d\theta \vec{i}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{i}_\phi$$

$$dl = \sqrt{(dr)^2 + (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\phi)^2}$$

11

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 0:

GIẢI TÍCH VECTOR

27-Apr-09

- Hệ số Larmor: $h_1 = 1; h_2 = r; h_3 = r \sin \theta$

- Yếu tố diện tích: $d\vec{S}_r = \pm (r d\theta)(r \sin \theta d\phi) \vec{i}_r$

$$d\vec{S}_\theta = \pm dr (r \sin \theta d\phi) dR \vec{i}_\theta$$

$$d\vec{S}_\phi = \pm dr (r d\theta) \vec{i}_\phi$$

- Yếu tố thể tích: $dV = dr (r d\theta)(r \sin \theta d\phi)$

- Vector vị trí xác định P(r,θ,Φ): $\vec{r} = r \vec{i}_r$

12

CHƯƠNG 0:

GIẢI TÍCH VECTOR

27-Apr-09

○ Xét 2 vector $\vec{A} = A_1 \vec{i}_1 + A_2 \vec{i}_2 + A_3 \vec{i}_3$
 $\vec{B} = B_1 \vec{i}_1 + B_2 \vec{i}_2 + B_3 \vec{i}_3$

$$\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow A_1 = B_1; A_2 = B_2; A_3 = B_3$$

$$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_1 \pm B_1) \vec{i}_1 + (A_2 \pm B_2) \vec{i}_2 + (A_3 \pm B_3) \vec{i}_3$$

$$m \vec{A} = mA_1 \vec{i}_1 + mA_2 \vec{i}_2 + mA_3 \vec{i}_3$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\vec{A}, \vec{B})$$

$$= A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

13

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 0:

GIẢI TÍCH VECTOR

27-Apr-09

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$d(\vec{A} \cdot \vec{B}) = d\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot d\vec{B}$$

$$d(\vec{A} \times \vec{B}) = d\vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times d\vec{B}$$

14

CHƯƠNG 0:

GIẢI TÍCH VECTOR

27-Apr-09

- Gradient là 1 toán tử tác dụng lên 1 hàm vô hướng cho ra 1 vector.
- Xét hàm vô hướng $V(u_1, u_2, u_3)$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial V}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial V}{\partial u_3} du_3$$
$$\vec{dl} = h_1 du_1 \vec{i}_1 + h_2 du_2 \vec{i}_2 + h_3 du_3 \vec{i}_3$$

- Vector gradient $dV = \text{grad}V \vec{dl}$

$$\text{grad}V = \frac{1}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u_1} \vec{i}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial V}{\partial u_2} \vec{i}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial V}{\partial u_3} \vec{i}_3$$

15

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 0:

GIẢI TÍCH VECTOR

27-Apr-09

- Tọa độ Descartes:

$$\text{grad}V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{i}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{i}_z$$

- Tọa độ trụ:

$$\text{grad}V = \frac{\partial V}{\partial R} \vec{i}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{i}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{i}_z$$

- Tọa độ cầu:

$$\text{grad}V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{i}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{i}_\phi$$

16

CHƯƠNG 0:

GIẢI TÍCH VECTOR

27-Apr-09

- Divergence tác động lên 1 hàm vector cho ra 1 vô hướng

$$\text{div} \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{A} d\vec{S}}{\Delta V}$$

- Công thức tính:

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial(A_2 h_3 h_1)}{\partial u_2} + \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial u_3} \right]$$

17

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 0:

GIẢI TÍCH VECTOR

27-Apr-09

- Hệ tọa độ Descartes

$$\text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- Hệ tọa độ trụ

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{R} \frac{\partial(R A_R)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- Hệ tọa độ cầu

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

18

CHƯƠNG 0:

GIẢI TÍCH VECTOR

Định lý Divergence cho phép thay thể tích phân thể tích bằng tích phân mặt & ngược lại.

$$\int_V \text{div} \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} d\vec{S}$$

27-Apr-09

19

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 0:

GIẢI TÍCH VECTOR

- Curl (Rotation) tác động lên 1 hàm vector cho ra 1 vector.

$$\text{curl} \vec{A} \cdot \vec{i}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \vec{A} d\vec{l}}{\Delta S}$$

- Công thức tính:

$$\text{curl} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{i}_1 & h_2 \vec{i}_2 & h_3 \vec{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ A_1 h_1 & A_2 h_2 & A_3 h_3 \end{vmatrix} = \text{rot} \vec{A}$$

27-Apr-09

20

- Hệ tọa độ Descartes

$$\text{curl } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \text{rot } \vec{A}$$

- Định lý Stroke cho phép thay thế tích phân mặt bằng tích phân đường & ngược lại.

$$\int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S} = \oint_C \vec{A} d\vec{l}$$

Chương 1:

CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

27-Apr-09

- Điện tích thử q đặt trong trường điện chịu tác dụng của lực $\vec{F}_e$
- Cường độ trường điện $\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q}$ (V/m)
- Điện môi bị phân cực trong trường điện, vector phân cực điện xác định trạng thái phân cực điện môi tại mỗi điểm

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta V} \quad (\text{C/m}^2)$$

$\Delta \vec{P}$ là moment lưỡng cực điện của điện môi thể tích ΔV

cuu duong than cong . com

CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

27-Apr-09

- Vector cảm ứng điện $\vec{D}$ được định nghĩa:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (\text{C/m}^2) \quad \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \quad (\text{F/m})$$
- Trong môi trường đẳng hướng

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

χ_e độ cảm điện của môi trường

ϵ_r độ thẩm điện tương đối

$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ độ thẩm điện tuyệt đối

CHƯƠNG 1:

CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA
TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

27-Apr-09

- Điện tích thử q chuyển động với vận tốc $\vec{v}$ chịu tác dụng lực từ $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$

- Vector cảm ứng từ $\vec{B} = \frac{\vec{F}_m(\mathbf{max}) \times \vec{i}_m}{qv}$ (Wb/m²)
 $\vec{i}_m$ vector đơn vị

- Từ môi bị phân cực bị phân cực trong trường từ, vector phân cực từ xác định trạng thái phân cực từ của từ môi $\vec{M}$

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{m}}{\Delta V} \quad (\text{A/m})$$

$\Delta \vec{m}$ moment từ của điện môi thể tích ΔV

25

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 1:

CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA
TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

27-Apr-09

- Vector cường độ trường từ: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ (A/m)

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \quad (\text{H/m})$$

- Đối với môi trường tuyến tính, đẳng hướng:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

χ_m độ cảm từ của môi trường

μ_r độ thẩm từ tương đối

$\mu = \mu_r \mu_0$ độ thẩm từ tuyệt đối

26

CHƯƠNG 1:

CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA
TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

- Mật độ điện tích khối:

$$q = \int_V \rho dV \quad \rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \left(\frac{C}{m^3} \right)$$

- Mật độ điện tích mặt:

$$q = \int_S \sigma dS \quad \sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} \left(\frac{C}{m^2} \right)$$

- Mật độ điện tích dài:

$$q = \int_C \lambda dl \quad \lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \left(\frac{C}{m} \right)$$

27-Apr-09

27

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 1:

CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA
TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

- Cường độ dòng điện I chảy qua mặt S:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} \text{ (A)}$$

Δq là điện tích chuyển qua S trong thời gian Δt

- Mật độ dòng điện: $|\vec{J}| = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \left(\frac{A}{m^2} \right)$

ΔI cường độ dòng điện chảy qua ΔS đặt vuông góc với dòng điện

- Dòng điện chảy qua mặt S bất kỳ:

$$I = \int_S \vec{J} d\vec{S} \text{ (A)}$$

27-Apr-09

28

CHƯƠNG 1:

CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA
TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

27-Apr-09

- $\vec{J}$ liên hệ với cường độ trường điện $\vec{E}$

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} \text{ (Định luật Ohm dạng vi phân)}$$

γ là độ dẫn điện của môi trường (S/m)

- Mật độ công suất tiêu tán p_{tt} (W/m³)

$$p_{tt} = \vec{J} \cdot \vec{E} \text{ (Định luật Jule-Lenz dạng vi phân)}$$

29

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 1:

CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA
TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

27-Apr-09

- Định luật bảo toàn điện tích:

“Điện tích trong một hệ cô lập về điện không thay đổi”

- Nếu điện tích q phân bố trong thể tích V giảm một lượng $-dq$ trong thời gian dt thì sẽ có một dòng điện chảy ra ngoài mặt S bao quanh thể tích V

$$-\frac{dq}{dt} = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$q = \int_V \rho dV$$

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{J} dV$$

$$\text{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

(Phương trình liên tục)

30

CHƯƠNG 1:

CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

27-Apr-09

- Định luật Gauss đối với trường điện:

“Thông lượng của vector cảm ứng điện gửi qua mặt kín S bất kỳ bằng tổng các điện tích tự do phân bố trong thể tích V bao bởi mặt S ”

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$$

Giả sử điện tích phân bố liên tục trong V : $q = \int_V \rho dV$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{D} dV \rightarrow \text{div} \vec{D} = \rho$$

31

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 1:

CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

27-Apr-09

- Định luật cảm ứng điện từ Paraday:

“Sức điện động cảm ứng có giá trị bằng và ngược dấu với tốc độ biến thiên từ thông gửi qua diện tích giới hạn bởi vòng dây.”

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}$$

Nếu mặt tích phân S không phụ thuộc thời gian: $\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S}$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

32

CHƯƠNG 1:

CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA
TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

27-Apr-09

- Định luật lưu số Ampere – Maxwell:

“Lưu số của vector cường độ trường từ theo đường kín C tùy ý bằng tổng đại số cường độ các dòng điện chảy qua diện tích bao bởi đường kín C”

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \sum_K I_K = I^*$$

Nếu dòng I chảy qua diện tích S phân bố liên tục với mật độ dòng $\vec{J}$

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{H} d\vec{S} = \int_S \vec{J} d\vec{S}$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J}$$

33

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 1:

CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA
TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

27-Apr-09

- Với dòng điện biến đổi: $\text{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$

$$\text{div} \vec{D} = \rho \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{D} = \text{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

$$\text{div} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

- Định lý Ampere-Maxwell kể đến dòng điện dịch:

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

34

CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

27-Apr-09

- Định luật Gauss đối với trường từ:

“Thông lượng vector cảm ứng từ $\vec{B}$ (từ thông) gửi qua mặt kín S bất kỳ luôn luôn bằng không.”

$$\Phi_m = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Áp dụng định lý Divergence: $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{B} dV = 0$

Vì thể tích V tùy ý nên: $\text{div} \vec{B} = 0$

Đường sức từ luôn là các đường cong khép kín

35

cuu duong than cong . com

CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

27-Apr-09

- Hệ phương trình Maxwell:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{B} &= 0 & \text{div} \vec{D} &= \rho \end{aligned}$$

- Trong môi trường đẳng hướng, tuyến tính:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}; \vec{B} = \mu \vec{H}; \vec{J} = \gamma \vec{E}$$

- Lực Lorentz: $\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B}$

36

CHƯƠNG 1:

CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA
TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

Trường điện từ tạo bởi nguồn điện, nguồn từ:

27-Apr-09

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

Nguồn điện

$$\vec{E} \longleftrightarrow \vec{H}$$

$$\vec{J} \longleftrightarrow -\vec{J}_m$$

$$\vec{D} \longleftrightarrow \vec{B}$$

$$\varepsilon \longleftrightarrow -\mu$$

$$\rho \longleftrightarrow -\rho_m$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{D} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = \rho_m$$

Nguồn từ

37

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 1:

CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA
TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

Định lý Pounting:

Xét điện tích điểm dq , lực điện từ $\vec{F}$:

$$\vec{F} = dq(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Công của lực điện từ trong khoảng $d\vec{l}$:

$$dA = \vec{F} d\vec{l} = dq(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l} = dq \vec{E} d\vec{l} = dq \vec{E} \vec{v} dt$$

Điện tích phân bố mật độ khối ρ : $dq = \rho dV$

$$\frac{dA}{dt} = \rho dV \vec{E} \vec{v} \xrightarrow{\vec{J} = \rho \vec{v}} \frac{dA}{dt} = \vec{J} \vec{E} dV$$

27-Apr-09

38

CHƯƠNG 1:

CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

- Điện tích khối mật độ ρ chuyển động vận tốc $\vec{v}$ tạo nên dòng điện dẫn, mật độ dòng $\vec{J}$ thì công suất trường điện từ đối với dòng điện này trong miền V

$$P_j = \int_V \vec{J} \vec{E} dV$$

- Mật độ công suất tiêu tán:

$$p_j = \vec{J} \vec{E}$$

- Định nghĩa vector Poynting:

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$$

39

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 1:

CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

$$\text{div} \vec{P} = \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \text{rot} \vec{H} = -\left(\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{J} \vec{E} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$$

$$-\text{div} \vec{P} = \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{J} \vec{E} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{Định lý Poynting dạng vi phân}$$

$$-\int_V \text{div} \vec{P} dV = \int_V \vec{J} \vec{E} dV + \int_V \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) dV$$

$$-\oint_S \vec{P} d\vec{S} = \int_V \vec{J} \vec{E} dV + \int_V \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) dV$$

Định lý Poynting dạng tích phân

Vector Poynting $\vec{P}$ còn gọi là vector mật độ công suất

40

CHƯƠNG 1:

CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

27-Apr-09

- Công suất tiêu tán trường trong thể tích V $\int_V \vec{J} \vec{E} dV$
- Công suất biến đổi của năng lượng trường điện từ chứa trong V

$$\int_V (\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) dV$$

Năng lượng trường điện: $\frac{dW}{dt} = \int_V (\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) dV$

$$W = \int_{t=0}^t \int_V (\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) dV dt = \frac{1}{2} \int_{t=0}^t \int_V (\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \vec{D}) + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \vec{B})) dV dt$$

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B}) dV$$

41

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 1:

CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

27-Apr-09

Năng lượng trường điện tập trung trong thể tích V

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \vec{D} dV \quad (J)$$

Năng lượng trường từ tập trung trong thể tích V

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \vec{B} dV \quad (J)$$

Mật độ năng lượng trường điện

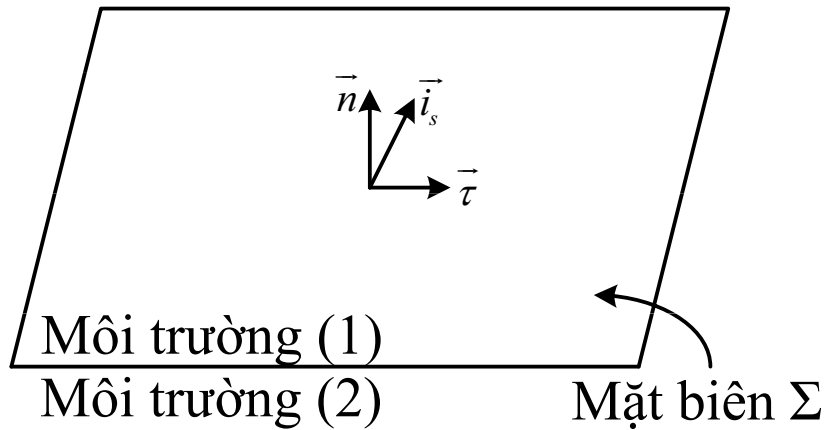
$$w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D} \quad (J / m^3)$$

Mật độ năng lượng trường từ

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B} \quad (J / m^3)$$

Định lý Pouting là dạng phát biểu toán học của định luật bảo toàn chuyển hóa năng lượng

42



σ mật độ điện tích mặt trên mặt biên Σ

- Điều kiện biên đối với thành phần pháp tuyến:

$$\begin{aligned} \{D_{1n} - D_{2n} = \sigma\}_{\Sigma} & \quad \{\vec{n}(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma\}_{\Sigma} \\ \{B_{1n} - B_{2n} = 0\}_{\Sigma} & \quad \{\vec{n}(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0\}_{\Sigma} \\ \{J_{1n} - J_{2n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}\}_{\Sigma} & \quad \{\vec{n}(\vec{J}_1 - \vec{J}_2) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}\}_{\Sigma} \end{aligned}$$

σ mật độ điện tích mặt trên mặt biên Σ

CHƯƠNG 1:

CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

27-Apr-09

- Điều kiện biên đối với thành phần tiếp tuyến:

$$\begin{aligned} \{E_{1t} = E_{2t}\}_{\Sigma} & \quad \{\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0\}_{\Sigma} \\ \{H_{1t} - H_{2t} = J_s\}_{\Sigma} & \quad \{\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s\}_{\Sigma} \end{aligned}$$

$\vec{J}_s$ mật độ dòng điện mặt (A/m)

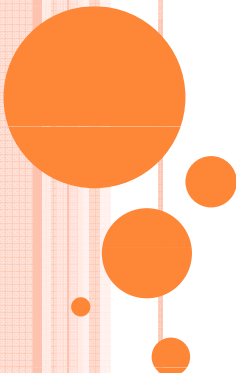
45

cuu duong than cong . com

Chương 2:

TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

cuu duong than cong . com



CHƯƠNG 2:

TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

- Trường điện từ tĩnh là TĐT không thay đổi theo thời gian $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, trong đó không có sự chuyển động có hướng của điện tích $\vec{J} = 0$
- Hệ phương trình Maxwell cho TĐT tĩnh:

$$\begin{array}{ll} \text{rot} \vec{H} = 0 & \text{rot} \vec{E} = 0 \\ \text{div} \vec{B} = 0 & \text{div} \vec{D} = \rho \\ \vec{B} = \mu \vec{H} & \vec{D} = \epsilon \vec{E} \end{array}$$

27-Apr-09

47

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 2:

TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

- Điều kiện biên cho TĐT tĩnh:

$$\begin{array}{ll} \{\vec{n}(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0\}_\Sigma & \{\vec{n}(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma\}_\Sigma \\ \{\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0\}_\Sigma & \{\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0\}_\Sigma \end{array}$$

27-Apr-09

48

CHƯƠNG 2:

TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

- Công của lực điện tĩnh:

$$A = \oint_C \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S} = 0$$

- Xét đường cong C gồm 2 nhánh

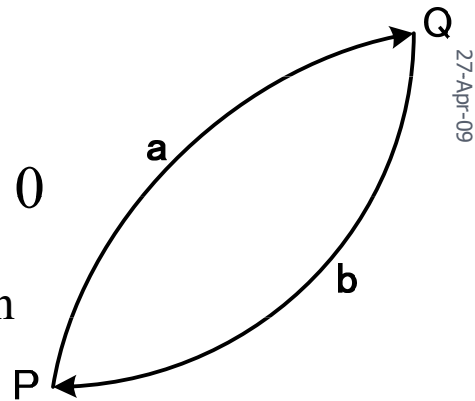
PaQ & QbP

$$\oint_{PaQbP} \vec{E} d\vec{l} = \int_{PaQ} \vec{E} d\vec{l} + \int_{QbP} \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad \boxed{\int_{PaQ} \vec{E} d\vec{l} = \int_{PbQ} \vec{E} d\vec{l}}$$

Công của lực điện tĩnh không phụ thuộc đường dịch chuyển mà phụ thuộc điểm đầu và điểm cuối.

49

cuu duong than cong . com



27-Apr-09

CHƯƠNG 2:

TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

- Thế điện φ được định nghĩa $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$

Dấu “-” nói lên quy ước $\vec{E}$ hướng theo chiều giảm của thế điện vô hướng φ

$$\begin{aligned} d\varphi(x, y, z) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \\ &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{i}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{i}_z \right) (dx \vec{i}_x + dy \vec{i}_y + dz \vec{i}_z) \\ &= \text{grad } \varphi \cdot d\vec{l} = -\vec{E} d\vec{l} \end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi = - \int \vec{E} d\vec{l} + K}$$

50

27-Apr-09

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 2:

TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

- Hiệu điện thế giữa 2 điểm A, B:

$$\varphi(A) - \varphi(B) = \int_A^B \vec{E} d\vec{l}$$

- Nếu chọn thế điện chuẩn bằng không ở vô cùng, $\varphi(\infty)=0$

$$\varphi(A) - \varphi(\infty) = \int_A^{\infty} \vec{E} d\vec{l}$$

27-Apr-09

51

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 2:

TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

- Trường điện của điện tích điểm q đối xứng cầu:

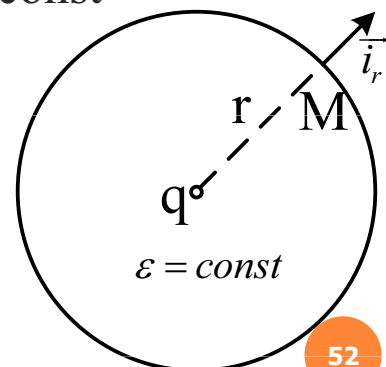
$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{i}_r$$

- Thế điện tại mọi điểm trên mặt cầu $r=\text{const}$

$$\varphi(P) = \int_P^{\infty} E_r dr = \frac{q}{4\pi\epsilon r}$$

- Nếu có hệ gồm n điện tích điểm q:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r_k}$$



27-Apr-09

52

CHƯƠNG 2:

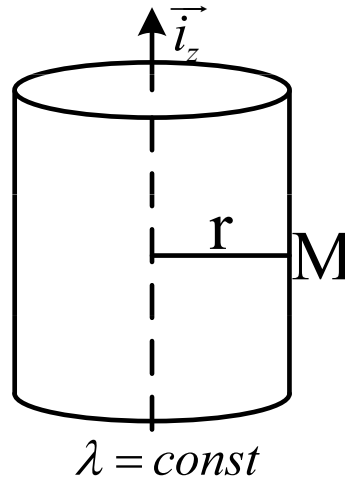
TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

VD: Tính $\vec{E}, \vec{D}, \varphi$ gây ra bởi 1 trục điện $\lambda = \text{const}$ nằm trong môi trường đẳng hướng tuyến tính đồng nhất vô hạn.

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} \vec{i}_r$$

$$\varphi(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_0}{r}$$

Với $\varphi(r_0) = 0$



27-Apr-09

53

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 2:

TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

○ Phương trình Poisson-Laplace:

Giả sử môi trường đồng nhất $\epsilon = \text{const}$: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{div} \vec{D} = \rho \\ \vec{E} = -\text{grad} \varphi \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{div}(\epsilon \text{grad} \varphi) = \epsilon \text{div} \text{grad} \varphi = -\rho \\ \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{array}$$

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{Phương trình Poisson}$$

$$\rho = 0 \Rightarrow \Delta \varphi = 0 \quad \text{Phương trình Laplace}$$

Δ : toán tử Laplace, trong tọa độ Descartes:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

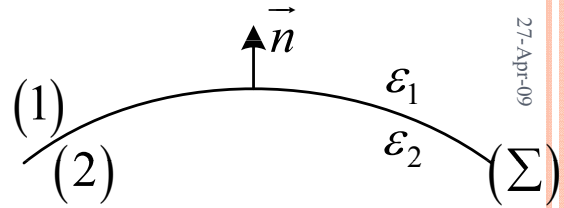
27-Apr-09

54

CHƯƠNG 2:

TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

Các điều kiện biên đối với φ :



- Điều kiện biên liên tục: $\{\varphi_1 = \varphi_2\}_\Sigma$
- Điều kiện biên pháp tuyến: $\left\{ \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma \right\}_\Sigma$
- Điều kiện biên tiếp tuyến: $\left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} \right\}_\Sigma$

55

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 2:

TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

VD: Tìm phân bố của thế φ gây ra bởi điện tích tự do phân bố theo quy luật sau: (hệ tọa độ trụ)

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_0 & r=a \\ -\sigma_0 \frac{a}{b} & r=b \end{cases} \quad \sigma_0 = const, \varepsilon = \varepsilon_0$$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} a \ln \frac{b}{a} & 0 \leq r \leq a \\ \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} a \ln \frac{b}{r} & a \leq r \leq b \\ 0 & r \geq b \end{cases}$$

56

CHƯƠNG 2:

TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

27-Apr-09

Vật dẫn bên trong trường điện tĩnh

- Trường điện bên trong vật dẫn:

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$$

- Mật độ điện tích tự do bên trong vật dẫn:

$$\rho = \text{div} \vec{D} = 0 \Rightarrow \rho = 0$$

- Thế điện bên trong vật dẫn:

$$d\varphi = -\vec{E} d\vec{l} = 0 \Rightarrow \varphi = \text{const}$$

- Trường điện trên mặt vật dẫn:

$$\left. \begin{array}{l} D_{1n} - D_{2n} = \sigma \\ E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0 \end{array} \right\} \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{n}$$

57

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 2:

TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

27-Apr-09

- Gọi U là thế của 1 vật dẫn so với vô cùng, Q là điện tích vật dẫn. Nếu môi trường tuyến tính:

$$\frac{Q}{U} = C \text{ điện dung vật dẫn cô lập}$$

$$\text{VD: Xét tụ điện } Q_2 = -Q_1 \Rightarrow \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_1 + Q_2 = 0$$

φ_1, φ_2 : là thế điện vật dẫn 1, 2

$$\frac{Q_1}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{Q_2}{\varphi_2 - \varphi_1} = C > 0$$

58

CHƯƠNG 2:

TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

27-Apr-09

○ Xét hệ n vật dẫn, vật dẫn i ($i=1 \rightarrow n$) có:

- Thế φ_i
- Điện tích q_i

○ Nếu môi trường tuyến tính

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^n B_{ij} q_j \quad B_{ij}: \text{hệ số thế}$$

$B_{ij}(i \neq j)$: hệ số thế tương hỗ giữa vật dẫn thứ i & j

B_{ii} : hệ số thế riêng của vật dẫn thứ i

$$q_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \varphi_j \quad A_{ij}: \text{hệ số điện dung}$$

$A_{ij}(i \neq j)$: hệ số điện dung tương hỗ giữa vật dẫn thứ i & j

A_{ii} : hệ số điện dung riêng của vật dẫn thứ i

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 2:

TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

27-Apr-09

$$q_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \varphi_j = \sum_{j=1}^n A_{ij} \varphi_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (-A_{ij}) U_{ij}$$

$$q_i = C_{ii} U_{i0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n C_{ij} U_{ij} \quad C_{ii} = \sum_{j=1}^n A_{ij}$$

$C_{ij} = -A_{ji}$: điện dung bộ phận tương hỗ giữa vật dẫn thứ i & j

C_{ii} : điện dung bộ phận riêng của vật dẫn thứ i

VD: 3 vật dẫn

$$q_1 = C_{11} U_{10} + C_{12} U_{12} + C_{13} U_{13} \quad C_{10} = A_{11} + A_{12} + A_{13}$$

$$q_2 = C_{21} U_{21} + C_{22} U_{20} + C_{23} U_{23} \quad C_{12} = -A_{12}$$

$$q_3 = C_{31} U_{31} + C_{32} U_{32} + C_{33} U_{30}$$

CHƯƠNG 2:

TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

Điện môi trong trường điện tĩnh

Do bị phân cực nên trường điện khi có điện môi là tổng:

- Trường điện ngoài ban đầu: gây bởi điện tích tự do
- Trường điện phụ của điện môi: gây ra bởi điện tích liên kết của điện môi.

Vector phân cực điện: $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$

Mật độ điện tích liên kết: $\rho_{lk} = -div \vec{P}$

27-Apr-09

61

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 2:

TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

- Năng lượng trường điện

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \vec{D} dV$$

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k q_k$$

- Năng lượng tụ điện

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

27-Apr-09

62

CHƯƠNG 2:

TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

Một số phương pháp tính bài toán tĩnh điện:

- Định luật Gauss
- Phương trình Laplace-Poisson
- Phương pháp chồng trường
- Phương pháp thay thế bờ

27-Apr-09

63

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 2:

TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

Định luật Gauss:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q \Leftrightarrow \text{div} \vec{D} = \rho$$

- Đối xứng cầu $\varphi = \varphi(r); \vec{D} = D(r) \cdot \vec{i}_r$
- Đối xứng trụ $\varphi = \varphi(r); \vec{D} = D(r) \cdot \vec{i}_r$
- Đối xứng phẳng $\varphi = \varphi(x); \vec{D} = D(x) \cdot \vec{i}_x$

27-Apr-09

64

CHƯƠNG 2:

TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

Phương trình Laplace-Poisson: ($\epsilon = \text{const}$)

27-Apr-09

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{Pt Poisson} \quad \Delta\varphi = 0 \quad \text{Pt Laplace}$$

Đối xứng cầu	Đối xứng trụ	Đối xứng phẳng
$\Delta\varphi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{d\varphi}{dr})$	$\Delta\varphi(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \frac{d\varphi}{dr})$	$\Delta\varphi(x) = \frac{d^2\varphi}{dx^2}$
$\varphi = -\frac{A}{r} + B$	$\varphi = A \ln r + B$	$\varphi = Ax + B$

65

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 2:

TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

Phương pháp chồng trường:

27-Apr-09

- Hệ n điện tích điểm

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R_i} \quad \vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^n \frac{q_i \vec{R}_i}{R_i^3}$$

- Điện tích phân bố liên tục trong V, S, L

$$\varphi = \int_{V(S,L)} d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{dq}{R} \quad \vec{E} = \int_{V(S,L)} d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{dq \vec{R}}{R^3}$$

66

CHƯƠNG 2:

TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

- Phương pháp thay thế bờ:
- Trường điện của điện tích điểm & mặt phẳng dẫn
- Trường điện của điện tích điểm & quả cầu dẫn
- Trường điện của điện tích đặt gần mặt phân chia 2 điện môi

27-Apr-09

67

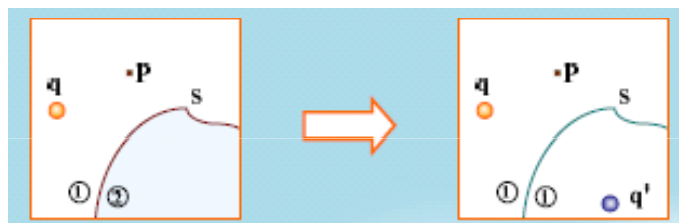
cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 2:

TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

- Nguyên tắc của phương pháp ảnh điện
 - Loại trừ ảnh hưởng của các điện tích cảm ứng, liên kết
 - Đồng nhất toàn bộ không gian, thêm điện tích ảnh
 - Đảm bảo điều kiện biên
 - Áp dụng định lý duy nhất nghiệm: nghiệm không thay đổi

27-Apr-09

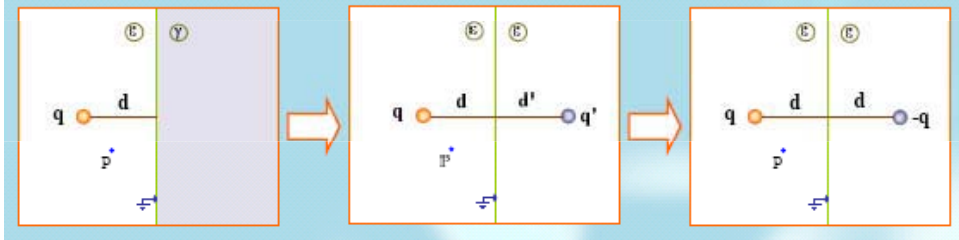


68

CHƯƠNG 2:

TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

- Trường điện của điện tích điểm & mặt phẳng dẫn



- Điều kiện biên
$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon r_q} + \frac{q'}{4\pi\epsilon r_{q'}}$$

- Suy ra $q' = -q, d' = d$

27-Apr-09

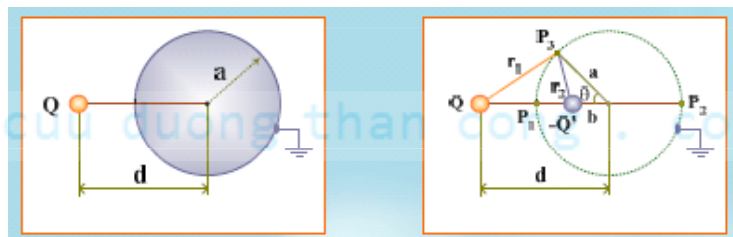
69

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 2:

TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

- Trường điện của điện tích điểm & quả cầu dẫn



$$\varphi(P_3) = 0 \Leftrightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon r_1} + \frac{-Q'}{4\pi\epsilon r_2} = 0$$

$$b = \frac{a^2}{d} \quad Q' = \frac{Qa}{d}$$

27-Apr-09

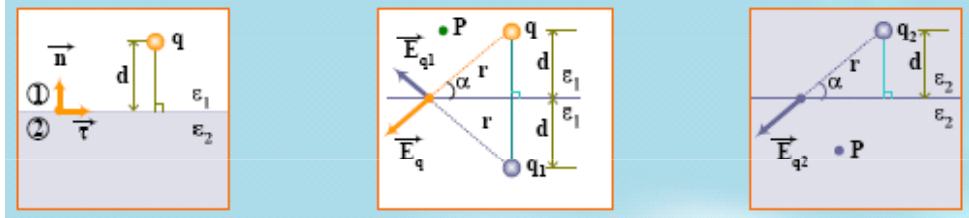
70

CHƯƠNG 2:

TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

- Trường điện của điện tích đặt gần mặt phân chia 2 điện môi

27-Apr-09



$$D_{1n} = -\frac{q}{4\pi r^2} \sin \alpha + \frac{q_1}{4\pi r^2} \sin \alpha$$

$$D_{2n} = -\frac{q_2}{4\pi r^2} \sin \alpha$$

$$E_{1\tau} = -\frac{q}{4\pi \epsilon_1 r^2} \cos \alpha + \frac{q_1}{4\pi \epsilon_1 r^2} \cos \alpha$$

$$E_{2\tau} = -\frac{q_2}{4\pi r^2} \cos \alpha$$

- Điều kiện biên: $q_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q, q_1 = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$

71

cuu duong than cong . com

Chương 3:

TRƯỜNG ĐIỆN DỪNG

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 3:

TRƯỜNG ĐIỆN DỪNG

27-Apr-09

- Trường điện từ dừng là TĐT không thay đổi theo thời gian $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, có dòng điện không đổi với mật độ dòng $\vec{J}$
- Hệ phương trình Maxwell cho TĐT dừng:

$$\begin{array}{ll} \text{rot} \vec{H} = \vec{J} & \text{rot} \vec{E} = 0 \\ \text{div} \vec{B} = 0 & \text{div} \vec{D} = \rho \\ \vec{B} = \mu \vec{H} & \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{J} = \gamma \vec{E} & \text{div} \vec{J} = 0 \end{array}$$

73

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 3:

TRƯỜNG ĐIỆN DỪNG

27-Apr-09

Tách 2 nhóm độc lập nhau: Trường từ dừng & trường điện dừng.

- Trường từ dừng gây bởi dòng điện dẫn không đổi theo thời gian.

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J}; \text{div} \vec{B} = 0; \vec{B} = \mu \vec{H}$$

- Trường điện dừng trong môi trường dẫn có dòng điện không đổi.

$$\text{rot} \vec{E} = 0; \text{div} \vec{J} = 0; \vec{J} = \gamma \vec{E}$$

- Trường điện dừng trong điện môi lý tưởng.

$$\text{rot} \vec{E} = 0; \text{div} \vec{D} = 0; \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

74

Trường điện dừng trong môi trường dẫn:

- Điều kiện để duy trì dòng điện không đổi.
- Thế điện vô hướng - Phương trình Laplace.
- Điều kiện biên.
- Điện trở - Điện dẫn – Công suất tiêu tán.
- Sự tương tự giữa trường điện dừng trong môi trường dẫn với trường điện tĩnh.

Điều kiện để duy trì dòng điện không đổi:

- Môi trường dẫn phải khép kín qua 1 nguồn.
- Nguồn phải cung cấp năng lượng thường xuyên, đều đặn.
- Định luật Ohm: $\vec{J} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_s)$

$$\vec{E}_s = \frac{\vec{F}_s}{q}$$

Lực trường ngoài tồn tại trong các nguồn điện (pin, acquy) tác động lên điện tích q
Trường lực ngoài phải là trường lực không có tính chất thế.

CHƯƠNG 3:

TRƯỜNG ĐIỆN DỪNG

27-Apr-09

Xét mạch dây dẫn tiết diện ngang nhỏ, diện tích S , mang dòng điện không đổi I được duy trì bởi 1 nguồn.

$$\oint_C \vec{J} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_C \vec{E}_s \cdot d\vec{l}$$

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \Rightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \vec{J} \cdot d\vec{l} = J dl = \frac{I}{S} dl$$

Đặt $R = \oint_C \frac{dl}{\gamma S}; \varepsilon = \oint_C \vec{E}_s \cdot d\vec{l}$

$$RI = \varepsilon$$

77

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 3:

TRƯỜNG ĐIỆN DỪNG

27-Apr-09

- Thế điện vô hướng φ – Phương trình Laplace:

$$\varphi(A) - \varphi(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- Trong môi trường tuyến tính, đồng nhất, đẳng hướng ($\gamma=0$)

$$\text{div } \vec{J} = \text{div}(\gamma \vec{E}) = \gamma \text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{div grad } \varphi = \Delta \varphi = 0$$

78

CHƯƠNG 3:

TRƯỜNG ĐIỆN DỪNG

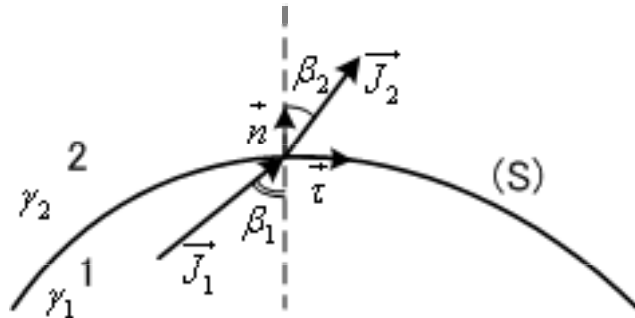
27-Apr-09

○ Điều kiện biên:

$$\varphi_1(S) = \varphi_2(S)$$

$$J_{1n}(S) = J_{2n}(S)$$

$$E_{1\tau}(S) = E_{2\tau}(S)$$



$$J_n = \gamma E_n = -\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

$$E_\tau = \frac{J_\tau}{\gamma} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}$$

$$\frac{\tan \beta_2}{\tan \beta_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$$

79

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 3:

TRƯỜNG ĐIỆN DỪNG

27-Apr-09

○ Điện trở - Điện dẫn – Công suất tiêu tán:

$$u = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$i = \oint_S \vec{J} d\vec{S}$$

$$u = ri; i = gu$$

r: điện trở, g: điện dẫn

Mật độ công suất tiêu tán:

$$p_{tt} = \vec{J} \vec{E}$$

Công suất tiêu tán:

$$P_{tt} = \int_V \vec{J} \vec{E} dV$$

$$P_{tt} = ui = ri^2 = gu^2$$

80

CHƯƠNG 3:

TRƯỜNG ĐIỆN DỪNG

27-Apr-09

Trường điện dừng trong
môi trường dẫn

Trường điện tĩnh trong
miền không có ρ_{td}

$rot \vec{E} = 0; \vec{E} = -grad \varphi; \Delta \varphi = 0$ $div \vec{J} = 0; \vec{J} = \gamma \vec{E}$ $I = \int_S \vec{J} d\vec{S}; g = \frac{I}{U}$ $\varphi_1(S) = \varphi_2(S)$ $J_{1n}(S) = J_{2n}(S)$ $E_{1\tau}(S) = E_{2\tau}(S)$	$rot \vec{E} = 0; \vec{E} = -grad \varphi; \Delta \varphi = 0$ $div \vec{D} = 0; \vec{D} = \epsilon \vec{E}$ $Q = \int_S \vec{D} d\vec{S}; C = \frac{Q}{U}$ $\varphi_1(S) = \varphi_2(S)$ $D_{1n}(S) = D_{2n}(S)$ $E_{1\tau}(S) = E_{2\tau}(S)$
--	--

81

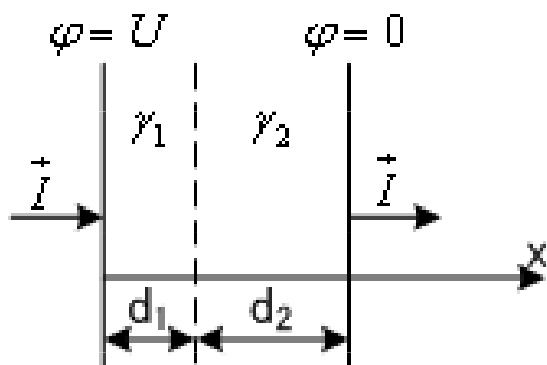
cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 3:

TRƯỜNG ĐIỆN DỪNG

27-Apr-09

VD: Tụ điện phẳng 2 lớp cách điện, diện tích mỗi bản là S. Hiệu điện thế U. Tìm phân bố của E, J. Tính dòng rò chảy qua tụ. Suy ra điện dẫn rò, điện trở cách điện.



82

CHƯƠNG 3:

TRƯỜNG ĐIỆN DỪNG

27-Apr-09

- Trường điện từ trong môi trường lý tưởng bao quanh vật dẫn có dòng điện không đổi:

$$\vec{J} = 0 \quad E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

$$\text{rot} \vec{E} = 0$$

$$\text{div} \vec{D} = 0$$

$$\Delta \varphi = 0 \quad E_{2n} = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

83

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 3:

TRƯỜNG ĐIỆN DỪNG

27-Apr-09

- Định luật Kirchhoff về dòng điện

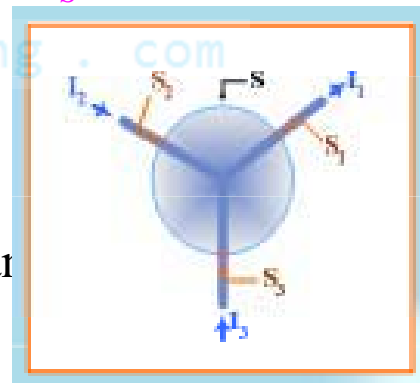
$$\oint_S \vec{J} d\vec{S} = 0$$

J chỉ khác 0 bên trong dây dẫn:

$$\oint_S \vec{J} d\vec{S} = \sum_{k=1}^n \int_{S_k} \vec{J} d\vec{S} = \sum_{k=1}^n \pm i_k = 0$$

Đối với dòng điện biến thiên thời gian

$$\oint_S \vec{J} d\vec{S} = - \frac{dq}{dt}$$



$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

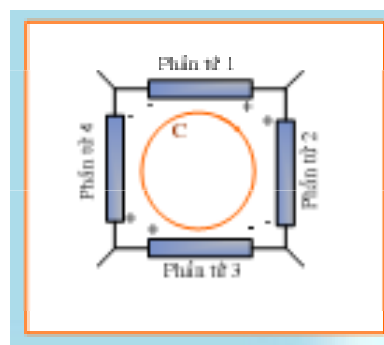
CHƯƠNG 3:

TRƯỜNG ĐIỆN DÙNG

27-Apr-09

○ Định luật Kirchhoff về điện áp: $\oint_C \vec{E} d\vec{l} = 0$

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = \sum_{k=1}^n \int_{C_k} \vec{E} d\vec{l} = \sum_{k=1}^n \pm U_k$$



$$-U_1 + U_2 - U_3 + U_4 = 0$$

85

cuu duong than cong . com

Chương 4:

TRƯỜNG TỪ DÙNG

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 4:

TRƯỜNG TỪ DỪNG

27-Apr-09

- Trường điện từ dừng là TĐT không thay đổi theo thời gian $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, có dòng điện không đổi với mật độ dòng $\vec{J}$
- Hệ phương trình Maxwell cho Trường từ dừng:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H} &= \vec{J} & \text{div} \vec{B} &= 0 \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} & \text{div} \vec{J} &= 0 \end{aligned}$$

- Điều kiện biên:

$$B_{1n}(S) = B_{2n}(S)$$

$$\vec{n} \times \vec{H}_2(S) - \vec{n} \times \vec{H}_1(S) = \vec{J}_s$$

87

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 4:

TRƯỜNG TỪ DỪNG

27-Apr-09

Thế từ vô hướng φ_m :

- Ở miền không có dòng điện: $\text{rot} \vec{H} = 0$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

- Có thể biểu diễn $\vec{H} = -\text{grad} \varphi_m$

$$\varphi_{mA} - \varphi_{mB} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad \varphi_{mM} = \int_M^{M_0} \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad \varphi(M_0) = 0$$

$$\varphi_{mM} = \int_{M_L M_0} H dl \pm ki$$

=> Thế từ vô hướng có thể không đơn trị.

88

CHƯƠNG 4:

TRƯỜNG TỪ DỪNG

27-Apr-09

Phương trình Laplace đối với thế từ vô hướng:

- Xét miền không có dòng điện dẫn, $\mu = \text{const}$:

$$\begin{cases} \text{div} \vec{H} = \text{div} \left(\frac{\vec{B}}{\mu} \right) = 0 \\ \vec{H} = -\text{grad} \varphi_m \end{cases} \Rightarrow \Delta \varphi_m = 0$$

89

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 4:

TRƯỜNG TỪ DỪNG

27-Apr-09

Điều kiện biên:

- Trên mặt phân cách hai môi trường có độ thấm từ μ_1, μ_2 , không có mật độ dòng điện mặt.

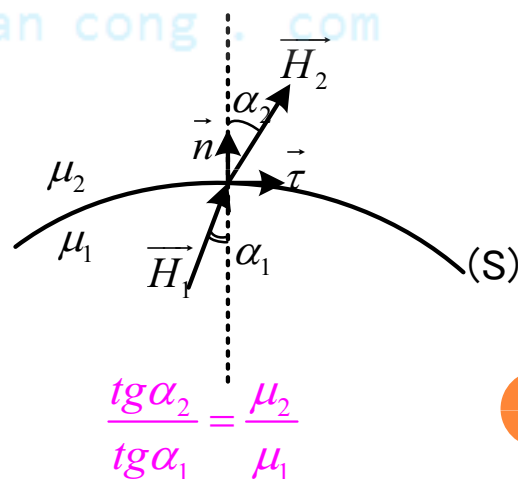
$$\varphi_{m1}(S) = \varphi_{m2}(S)$$

$$B_{1n}(S) = B_{2n}(S)$$

$$H_{1\tau}(S) = H_{2\tau}(S)$$

$$B_{in} = \mu_i H_{in} = -\mu_i \frac{\partial \varphi_{mi}}{\partial n}$$

$$H_{i\tau} = \frac{B_{i\tau}}{\mu_i} = -\frac{\partial \varphi_{mi}}{\partial \tau}$$



90

CHƯƠNG 4:

TRƯỜNG TỪ DỪNG

27-Apr-09

Trường từ dừng ở miền
không có dòng điện dẫn

Trường điện tĩnh trong
miền không có ρ_{td}

$rot \vec{H} = 0; \vec{H} = -grad \varphi_m; \Delta \varphi_m = 0$ $div \vec{B} = 0; \vec{B} = \mu \vec{H}$ $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$ $\varphi_{m1}(S) = \varphi_{m2}(S)$ $B_{1n}(S) = B_{2n}(S)$ $H_{1\tau}(S) = H_{2\tau}(S)$	$rot \vec{E} = 0; \vec{E} = -grad \varphi; \Delta \varphi = 0$ $div \vec{D} = 0; \vec{D} = \epsilon \vec{E}$ $Q = \int_S \vec{D} d\vec{S}$ $\varphi_1(S) = \varphi_2(S)$ $D_{1n}(S) = D_{2n}(S)$ $E_{1\tau}(S) = E_{2\tau}(S)$
---	---

91

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 4:

TRƯỜNG TỪ DỪNG

27-Apr-09

○ Thế vector $\vec{A}$:

- Trong miền có dòng điện $J \neq 0$, không thể biểu diễn trường từ qua thế vô hướng φ_m

$$\begin{cases} div \vec{B} = 0 \\ div rot \vec{A} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{B} = rot \vec{A}$$

$\vec{A}$: thế vector

$$\vec{A}' = \vec{A} + grad f$$

f : hàm vô hướng bất kỳ

$$rot \vec{A}' = rot \vec{A} + rot grad f = rot \vec{A}$$

92

➔ Thế vector không đơn trị ➔ Điều kiện phụ: $div \vec{A} = 0$

CHƯƠNG 4:

TRƯỜNG TỪ DÙNG

27-Apr-09

- Phương trình Laplace đối với thế vector $\vec{A}$:

Định nghĩa: $\Delta \vec{A} = -\text{rot rot } \vec{A} + \text{grad div } \vec{A}$

$$\begin{cases} \text{div } \vec{A} = 0 \\ \text{rot } \vec{B} = \text{rot rot } \vec{A} = \mu \vec{J} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad \text{Phương trình Poisson}$$

$$\vec{J} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{A} = 0 \quad \text{Phương trình Laplace}$$

Trong HTĐ Descartes:

$$\Delta A_x = -\mu J_x; \Delta A_y = -\mu J_y; \Delta A_z = -\mu J_z$$

93

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 4:

TRƯỜNG TỪ DÙNG

27-Apr-09

- Nghiệm $\vec{A}$ của phương trình Laplace – Poisson trong môi trường đồng nhất vô hạn:

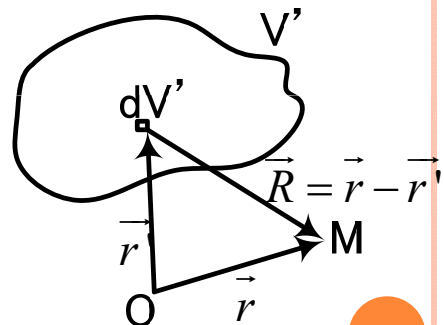
Trường điện tĩnh: $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV', \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$

Vận dụng sự tương tự:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} dV'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} dV'$$

Định luật Bio-Savart



94

CHƯƠNG 4:

TRƯỜNG TỪ DÙNG

27-Apr-09

VD: Xét dòng điện i chảy trong vòng dây C' khép kín,

$$\mu = \text{const} \quad \vec{J} dV' = \vec{J} S dl' = JS \vec{dl}' = i \vec{dl}'$$

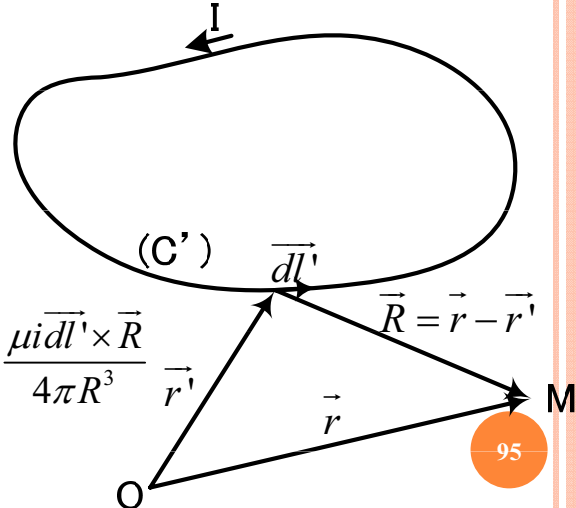
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu i}{4\pi} \oint_{C'} \frac{\vec{dl}'}{R}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu i}{4\pi} \oint_{C'} \frac{\vec{dl}' \times \vec{R}}{R^3}$$

$$d\vec{A} = \frac{\mu \vec{J} dV'}{4\pi R} = \frac{\mu i d\vec{l}'}{4\pi R}; \quad d\vec{B} = \frac{\mu \vec{J} dV' \times \vec{R}}{4\pi R^3} = \frac{\mu i d\vec{l}' \times \vec{R}}{4\pi R^3}$$

Nhận xét: $d\vec{A} \parallel \vec{J} dV'; d\vec{B} \perp \vec{J} dV'$

$$d\vec{A} \parallel i \vec{dl}'; d\vec{B} \perp i \vec{dl}'$$



95

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 4:

TRƯỜNG TỪ DÙNG

27-Apr-09

Trường từ dùng song phẳng:

- Xét trường từ dùng gây ra bởi dòng điện dẫn chảy theo 1 phương nhất định $\vec{J} = J(x, y) \vec{i}_z$

- Trường từ không phụ thuộc vào tọa độ z , thế vector $\vec{A}$ song song với trục z ; $\vec{B}, \vec{H}$ vuông góc với trục z

$$\vec{A} = A(x, y) \vec{i}_z; \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \text{grad } A \times \vec{i}_z$$

Môi trường $\mu = \text{const}$, thế $\vec{A}$ thỏa pt Poisson-Laplace:

$$\Delta A = -\mu J$$

96

CHƯƠNG 4:

TRƯỜNG TỪ DỪNG

27-Apr-09

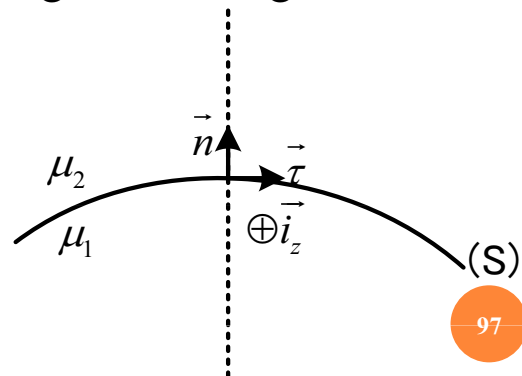
Các điều kiện biên hỗn hợp:

- Xét 2 môi trường phân cách bởi mặt trụ (S), vector pháp tuyến hướng từ môi trường 1 sang môi trường 2

$$A_1(S) = A_2(S)$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial \tau}(S) = \frac{\partial A_2}{\partial \tau}(S)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial n}(S) - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial n}(S) = J_s$$



97

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 4:

TRƯỜNG TỪ DỪNG

27-Apr-09

Trường từ dừng song phẳng
khảo sát bằng $\vec{A} = A\vec{i}_z$.

$$|\vec{B}| = |\text{grad} A|$$

$$\Delta A = -\mu J$$

$$A_1(S) = A_2(S)$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial \tau}(S) = \frac{\partial A_2}{\partial \tau}(S)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial n}(S) - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial n}(S) = J_s$$

Trường điện tĩnh song phẳng
trong miền không có ρ_{td}

$$|\vec{E}| = |\text{grad} \varphi|$$

$$\Delta \varphi = -\frac{1}{\varepsilon} \rho$$

$$\varphi_1(S) = \varphi_2(S)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau}(S) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau}(S)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}(S) - \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}(S) = \sigma$$

98

CHƯƠNG 4:

TRƯỜNG TỪ DỪNG

27-Apr-09

○ Năng lượng trường từ dừng:

- Năng lượng trường từ dừng tính qua B, H:

- Mật độ năng lượng trường từ: $w_M = \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H}$

- Năng lượng toàn phần của trường từ:

$$W_M = \int_{tbkg} w_M dV = \frac{1}{2} \int_{tbkg} \vec{B} \vec{H} dV$$

99

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 4:

TRƯỜNG TỪ DỪNG

27-Apr-09

○ Năng lượng trường từ dừng:

- Năng lượng trường từ dừng tính qua thế vector A, J:

$$W_M = \frac{1}{2} \int_{tbkg} \vec{B} \vec{H} dV = \frac{1}{2} \int_{tbkg} \text{rot } \vec{A} \vec{H} dV = \frac{1}{2} \int_{tbkg} \vec{A} \text{rot } \vec{H} dV + \frac{1}{2} \int_{tbkg} \text{div}(\vec{A} \times \vec{H}) dV$$

$$W_M = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \vec{J} dV + \frac{1}{2} \oint_{S_\infty} (\vec{A} \times \vec{H}) dV$$

- Bên ngoài V, $\vec{J} = 0$ nên số hạng thứ nhất chỉ cần lấy miền tích phân theo V. Số hạng thứ 2 sẽ tiến tới 0 khi $S \rightarrow \infty$

$$* \text{div}(\vec{A} \times \vec{H}) = \vec{H} \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \text{rot } \vec{H}$$

100

CHƯƠNG 4:

TRƯỜNG TỪ DÙNG

27-Apr-09

- Biểu diễn năng lượng trường từ qua từ thông, hệ số tự cảm, hệ số hồ cảm:

$$W_M = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n I_k I_l M_{kl}$$

- M_{kl} : hệ số hồ cảm của vòng dây thứ l đối với vòng dây thứ k
- $M_{ll}=L_l$: hệ số tự cảm của vòng dây thứ l

101

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 4:

TRƯỜNG TỪ DÙNG

27-Apr-09

Lực từ:

- Lực Lorentz, lực Ampere:

$$d\vec{F} = dq\vec{v} \times \vec{B} = \vec{J}dV \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = \int_V (\vec{J}dV \times \vec{B})$$

- Vòng dây: $\vec{F} = \oint_C (\vec{I}dl \times \vec{B})$

102

Chương 5:

TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 5:

TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

- Trường điện từ biến thiên:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{div} \vec{D} = \rho$$

- Trong môi trường đẳng hướng:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{J} = \gamma \vec{E}$$

- Vector Poynting & công suất gửi qua mặt S:

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} \quad P = \int_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S}$$

27-Apr-09

CHƯƠNG 5:

TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

27-Apr-09

- Thế vector $\vec{A}$ và thế vô hướng φ :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \vec{A}) = -\text{rot}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \Rightarrow \text{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } \varphi \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi$$

- $\vec{A}$ & φ không đơn trị $\rightarrow$ điều kiện phụ Lorentz:

$$\text{div } \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

105

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 5:

TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

27-Apr-09

Các phương trình sóng của TĐT biến thiên:

Xét TĐT biến thiên gây ra bởi nguồn điện tích với mật độ ρ_s và mật độ dòng điện $\vec{J}_s$.

- Phương trình đối với $\vec{A}$:

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}_s$$

- Phương trình đối với φ :

$$\Delta \varphi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\rho_s / \varepsilon$$

106

CHƯƠNG 5:

TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

27-Apr-09

Trong môi trường điện môi lý tưởng $\epsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ không có dòng điện dẫn, điện tích tự do.

$$\Delta \vec{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad \Delta \vec{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \varphi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \Delta \vec{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

**Khi giải phương trình sóng, đối với bài toán cụ thể cần áp dụng các điều kiện ban đầu & điều kiện biên thích hợp.*

107

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 5:

TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

27-Apr-09

Các phương trình TĐT biến thiên dạng phức:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{i}_x E_{xm} \cos(\omega t + \psi_x) + \vec{i}_y E_{ym} \cos(\omega t + \psi_y) + \vec{i}_z E_{zm} \cos(\omega t + \psi_z)$$

Trong đó: các biên độ E_{xm} , E_{ym} , E_{zm} và các pha ban đầu ψ_x , ψ_y , ψ_z là những hàm của tọa độ không gian, không phụ thuộc thời gian t . ω là tần số góc

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \text{Re} \left\{ \vec{E}(x, y, z) e^{i\omega t} \right\}$$

Biên độ phức:

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{i}_x E_{xm} e^{i\psi_x} + \vec{i}_y E_{ym} e^{i\psi_y} + \vec{i}_z E_{zm} e^{i\psi_z}$$

108

CHƯƠNG 5:

TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

27-Apr-09

- Các phương trình Maxwell dạng phức:

$$\begin{array}{l|l} \vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J} + i\omega \vec{D} & \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{\text{rot}} \vec{E} = -i\omega \vec{B} & \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \text{div} \vec{B} = 0 & \vec{J} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{ng}) = \gamma \vec{E} + \vec{J}_{ng} \\ \text{div} \vec{D} = \rho & \end{array}$$

109

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 5:

TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

27-Apr-09

Giá trị trung bình của vector Pounting – Vector Pounting phức:

$$\begin{aligned} \vec{P}(t) &= \vec{E}(t) \times \vec{H}(t) \\ &= \text{Re}\{ \vec{E} e^{i\omega t} \} \times \text{Re}\{ \vec{H} e^{i\omega t} \} \\ &= \frac{1}{2} (\vec{E} e^{i\omega t} + \vec{E}^* e^{-i\omega t}) \times \frac{1}{2} (\vec{H} e^{i\omega t} + \vec{H}^* e^{-i\omega t}) \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H} e^{2i\omega t}) + \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \end{aligned}$$

Biến thiên hình sin tần số 2w

Không đổi

110

CHƯƠNG 5:

TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

27-Apr-09

Giá trị trung bình của vector Poynting – Vector Poynting phức:

$$\frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \langle \vec{P}(t) \rangle = \text{Re} \left(\frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \right)$$

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \quad \text{Vector Poynting phức}$$

$$\Rightarrow \langle \vec{P}(t) \rangle = \text{Re}(\vec{P}) \quad \text{Trị trung bình của vector Poynting}$$

111

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 5:

TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

27-Apr-09

Giá trị trung bình của w_e , w_m , p_{tt} :

$$w_e(t) = \frac{1}{2} \vec{E}(t) \cdot \vec{D}(t)$$

$$\langle w_e(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T w_e(t) dt = \text{Re} \left(\frac{1}{4} \vec{E} \cdot \vec{D}^* \right) = \text{Re} \left(\frac{1}{4} \epsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^* \right) = \frac{1}{4} \epsilon E_m^2$$

$$w_m(t) = \frac{1}{2} \vec{B}(t) \cdot \vec{H}(t)$$

$$\langle w_m(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T w_m(t) dt = \text{Re} \left(\frac{1}{4} \vec{H} \cdot \vec{B}^* \right) = \text{Re} \left(\frac{1}{4} \mu \vec{H} \cdot \vec{H}^* \right) = \frac{1}{4} \mu H_m^2$$

$$p_{tt}(t) = \vec{J}(t) \cdot \vec{E}(t)$$

$$\langle p_{tt}(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p_{tt}(t) dt = \frac{1}{2} \gamma E_m^2 = \frac{1}{2} \frac{J_m^2}{\gamma}$$

112

CHƯƠNG 5:

TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

27-Apr-09

○ Sóng điện từ phẳng đơn sắc trong môi trường đẳng hướng tuyến tính đồng nhất:

- Trường điện từ & năng lượng luôn truyền theo 1 phương vuông góc với mặt phẳng nhất định.
- Biên độ & pha của các vector trường $(\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{J})$ là như nhau trên mặt phẳng vuông góc với phương truyền.

113

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 5:

TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

27-Apr-09

○ Khảo sát sự lan truyền của sóng điện từ phẳng đơn sắc:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \vec{B} = \mu \vec{H}, \vec{J} = \gamma \vec{E}$$

- Chọn hệ tọa độ Descartes, trục z song song phương truyền sóng. Theo định nghĩa của sóng phẳng, trường điện từ không phụ

thuộc x, y: $\frac{\partial}{\partial x} = 0; \frac{\partial}{\partial y} = 0$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega \vec{B} = -i\omega\mu \vec{H}$$

114

CHƯƠNG 5:

TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

27-Apr-2020

- Khảo sát sự lan truyền của sóng điện từ phẳng đơn sắc:

$$\begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ 0 & 0 & \frac{d}{dz} \\ \vec{E}_x & \vec{E}_y & \vec{E}_z \end{vmatrix} = -\frac{d\vec{E}_y}{dz}\vec{i}_x + \frac{d\vec{E}_x}{dz}\vec{i}_y = -i\omega\mu(\vec{H}_x\vec{i}_x + \vec{H}_y\vec{i}_y + \vec{H}_z\vec{i}_z)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{E}_y}{dz} = i\omega\mu\vec{H}_x; \frac{d\vec{E}_x}{dz} = -i\omega\mu\vec{H}_y; 0 = -i\omega\mu\vec{H}_z$$

115

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 5:

TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

27-Apr-2020

- Khảo sát sự lan truyền của sóng điện từ phẳng đơn sắc:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + i\omega \vec{D} = \gamma \vec{E} + i\omega\epsilon \vec{E} = i\omega(\epsilon - i\frac{\gamma}{\omega}) \vec{E}$$

Độ thấm điện phức $\tilde{\epsilon}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{H}_y}{dz} = -i\omega\tilde{\epsilon}\vec{E}_x; \frac{d\vec{H}_x}{dz} = i\omega\tilde{\epsilon}\vec{E}_y; 0 = i\omega\tilde{\epsilon}\vec{E}_z$$

$$\Rightarrow \vec{E}_z = 0$$

116

CHƯƠNG 5:

TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

○ Khảo sát sự lan truyền của sóng điện từ phẳng đơn sắc:

$$\dot{E}_z = 0 \text{ \& } \dot{H}_z = 0 \rightarrow \vec{E} \text{ \& } \vec{H} \text{ vuông góc trục } z$$

Vector Pointing $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$ song song trục z

Xét sóng phân cực thẳng: Phương của $\vec{E}$ & $\vec{H}$ cố định, chọn trục x song song với $\vec{E}$:

$$\dot{E}_y = 0 \Rightarrow \dot{H}_x = 0 \rightarrow \vec{E} \text{ \& } \vec{H} \text{ vuông góc nhau \& vuông góc phương truyền}$$

→ Sóng điện từ ngang

$$\frac{d \dot{E}_x}{dz} = -i\omega\mu \dot{H}_y \Rightarrow \frac{d^2 \dot{E}_x}{dz^2} = -i\omega\mu \frac{d \dot{H}_y}{dz} = -\omega^2 \tilde{\epsilon} \mu \dot{E}_x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \dot{E}_x}{dz^2} + \omega^2 \tilde{\epsilon} \mu \dot{E}_x = 0 \quad \dot{E}_x = \dot{A}_1 e^{-kz} + \dot{A}_2 e^{+kz}$$

117

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 5:

TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

○ Khảo sát sự lan truyền của sóng điện từ phẳng đơn sắc:

$$\dot{E}_x = \dot{A}_1 e^{-kz} + \dot{A}_2 e^{+kz} \text{ với } k = \sqrt{-\omega^2 \tilde{\epsilon} \mu} = i\omega \sqrt{\tilde{\epsilon} \mu}$$

$$\text{Hệ số truyền: } k = i\omega \sqrt{\tilde{\epsilon} \mu} = \alpha + i\beta$$

Hệ số tắt $\alpha = \text{Re}\{k\}$ nep/m, hệ số pha $\beta = \text{Im}\{k\}$ rad/m

$$\dot{H}_y = -\frac{1}{i\omega\mu} \frac{d \dot{E}_x}{dz} = \frac{\dot{A}_1}{Z_c} e^{-kz} - \frac{\dot{A}_2}{Z_c} e^{+kz}$$

$$\text{Trở sóng phức: } Z_c = \frac{i\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{\epsilon}}} = z_c e^{i\varphi}$$

118

CHƯƠNG 5:

TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

◉ Khảo sát sự lan truyền của sóng điện từ phẳng đơn sắc:

Đặt $\vec{A}_1 = a_1 e^{i\psi_1}; \vec{A}_2 = a_2 e^{i\psi_2}$

$$\vec{E}_x = a_1 e^{i\psi_1} e^{-(\alpha+i\beta)z} + a_2 e^{i\psi_2} e^{+(\alpha+i\beta)z} = a_1 e^{-\alpha z} e^{i(-\beta z + \psi_1)} + a_2 e^{+\alpha z} e^{i(\beta z + \psi_2)}$$

$$E_x = a_1 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \psi_1) + a_2 e^{+\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \psi_2)$$

Tương tự:

$$H_y = \frac{a_1 e^{-\alpha z}}{Z_c} \cos(\omega t - \beta z + \psi_1 - \varphi) - \frac{a_2 e^{+\alpha z}}{Z_c} \cos(\omega t + \beta z + \psi_2 - \varphi)$$

$E_x^+ H_y^+$ mô tả sóng đơn sắc truyền theo phương & chiều dương trục z với vận tốc $\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}$, biên độ sóng tắt dần theo hàm mũ $e^{-\alpha z}$

$E_x^- H_y^-$ mô tả sóng đơn sắc truyền theo phương & chiều âm trục z với vận tốc $\frac{dz}{dt} = -\frac{\omega}{\beta}$, biên độ sóng tắt dần theo hàm mũ $e^{+\alpha z}$

119

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 5:

TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

◉ Khảo sát sự lan truyền của sóng điện từ phẳng đơn sắc:

$v_p = \frac{\omega}{\beta}$ Vận tốc pha, vận tốc dịch chuyển của mặt đẳng pha

$\alpha = \text{Re}\{k\}$ Hệ số tắt dần

$\beta = \text{Im}\{k\}$ Hệ số pha

$z_c = |Z_c|$ Tỉ số biên độ giữa cường độ trường điện & cường độ trường từ

$\varphi = \angle Z_c$ Góc lệch pha giữa $\vec{E}$ & $\vec{H}$

$\lambda = v_p T = \frac{2\pi}{\beta}$ Bước sóng

120

CHƯƠNG 5:

TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

○ Sóng điện từ phẳng đơn sắc trong môi trường lý tưởng:

Môi trường lý tưởng: $\gamma=0$. Điện môi thực $\gamma \ll \omega\epsilon$ có thể xem như môi trường lý tưởng $\tilde{\epsilon} = \epsilon - i\frac{\gamma}{\omega} \approx \epsilon$

$$k = i\omega\sqrt{\mu\tilde{\epsilon}} = i\omega\sqrt{\epsilon\mu} \Rightarrow \alpha = \text{Re}\{k\} = 0; \beta = \text{Im}\{k\} = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{\epsilon}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \Rightarrow z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Chân không:

$$\epsilon = \epsilon_0; \mu = \mu_0$$

$$\Rightarrow v_p = 3.10^8 \text{ m/s}; z_c = 377\Omega$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

$$\lambda = v_p T = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\epsilon\mu}}$$

121

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 5:

TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

○ Sóng điện từ phẳng đơn sắc trong môi trường lý tưởng:

$$\vec{E} = E_x \vec{i}_x \quad E_x = a_1 \cos(\omega t - \beta z + \psi_1) + a_2 \cos(\omega t + \beta z + \psi_2)$$

$$\vec{H} = H_y \vec{i}_y \quad H_y = \frac{a_1}{z_c} \cos(\omega t - \beta z + \psi_1) - \frac{a_2}{z_c} \cos(\omega t + \beta z + \psi_2)$$

- $\vec{E} \perp \vec{H}$, cả 2 vuông góc phương truyền: sóng ngang
- Vận tốc pha v_p không phụ thuộc tần số
- Tỷ số biên độ giữa $\vec{E}$ & $\vec{H}$ không phụ thuộc tần số
- Sóng điện & sóng từ cùng pha ($\phi=0$)
- Năng lượng trường điện từ phân bố đều ở 2 dạng điện & từ:

$$\frac{w_e(t)}{w_m(t)} = \frac{\frac{1}{2}\epsilon \vec{E}^2(t)}{\frac{1}{2}\mu \vec{H}^2(t)} = \frac{\epsilon}{\mu} z_c^2 = \frac{\epsilon}{\mu} \frac{\mu}{\epsilon} = 1$$

$$\langle w_e(t) \rangle = \langle w_m(t) \rangle = \frac{1}{4} \epsilon E_m^2 = \frac{1}{4} \mu H_m^2$$

122

CHƯƠNG 5:

TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

● Sóng điện từ phẳng đơn sắc trong môi trường dẫn tốt

Môi trường dẫn tốt: $\gamma \gg \omega\epsilon \Rightarrow \tilde{\epsilon} = \epsilon - i\frac{\gamma}{\omega} \approx -i\frac{\gamma}{\omega}$

$$k = i\omega\sqrt{\mu\tilde{\epsilon}} = \sqrt{\omega\gamma\mu} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \alpha = \text{Re}\{k\} = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu}{2}}; \beta = \text{Im}\{k\} = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu}{2}}$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{\epsilon}}} = \sqrt{\frac{\mu}{-i\frac{\gamma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z_c = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}; \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega\gamma\mu}{2}}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\gamma\mu}}; \lambda = v_p T = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega\gamma\mu}{2}}} = \sqrt{\frac{2\pi^2}{\omega\gamma\mu}}$$

123

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 5:

TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

● Sóng điện từ phẳng đơn sắc trong môi trường dẫn tốt

$$\vec{E} = E_x \vec{i}_x \quad E_x = a_1 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \psi_1) + a_2 e^{+\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \psi_2)$$

$$\vec{H} = H_y \vec{i}_y \quad H_y = \frac{a_1}{Z_c} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \psi_1 - 45^\circ) - \frac{a_2}{Z_c} e^{+\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \psi_2 - 45^\circ)$$

- $\vec{E}$ & $\vec{H}$, cả 2 vuông góc phương truyền: sóng ngang
- Vận tốc pha v_p phụ thuộc tần số
- Tỷ số biên độ giữa $\vec{E}$ & $\vec{H}$ phụ thuộc tần số
- Sóng điện & sóng từ lệch pha 45° ($\varphi=45^\circ$)
- Biên độ của sóng khi lan truyền bị tắt dần nhanh theo hàm mũ.
Trên khoảng cách bước sóng λ , biên độ sóng giảm $e^{2\pi}=535$

124

CHƯƠNG 5:

TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

○ Sóng điện từ phẳng đơn sắc trong môi trường dẫn tốt

27-Mar-09

• Hiệu ứng bề mặt: Ở tần số cao, sóng điện từ chỉ xâm nhập được vào 1 lớp mỏng ngay sát bề mặt vật dẫn tốt.

Độ xuyên sâu Δ : độ sâu tính từ bề mặt vật dẫn tốt, ở đó biên

độ sóng giảm e lần. $e^{\alpha\Delta} = e \Rightarrow \Delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu}}$

• Năng lượng trường điện từ tập trung chủ yếu ở dạng từ:

$$\frac{\langle w_m(t) \rangle}{\langle w_e(t) \rangle} = \frac{\frac{1}{4} \mu H_m^2}{\frac{1}{4} \varepsilon E_m^2} = \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{1}{z_c} = \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{\gamma}{\omega \mu} = \frac{\gamma}{\varepsilon \mu} \gg 1$$

125

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

Chương 0: GIẢI TÍCH VECTOR

Bài 1: Biểu diễn các thành phần A_x, A_y, A_z của vector $\vec{A}$ qua các thành phần A_r, A_ϕ, A_z trong hệ tọa độ trụ

Bài 2: Biểu diễn các thành phần A_r, A_θ, A_ϕ của vector $\vec{A}$ trong hệ tọa độ trụ qua các thành phần A_x, A_y, A_z

Bài 3: Cho hàm vô hướng $U=r^2\sin 2\phi$ trong hệ tọa độ trụ. Tìm tốc độ tăng của hàm này trong hướng của vector $\vec{A} = \vec{i}_r + \vec{i}_\phi$ tại điểm $P(2, \pi/4, 0)$

Bài 4: Cho hàm vô hướng $U=x^2y+yz^2+zy^2$. Tìm tốc độ tăng của hàm này trong hướng vuông góc với mặt $x^2y-yz+xz^2=5$ tại điểm $P(1,2,3)$.

Bài 5: Dùng định lý Divergence tính tích phân $\oint_S \vec{r} d\vec{S} = 0$ theo mặt kín S bất kỳ bao thể tích

V , $\vec{r}$ là vector vị trí.

Bài 6: Cho vector $\vec{A} = yz\vec{i}_x + zx\vec{i}_y + xy\vec{i}_z$. Dùng định lý Divergence chứng tỏ $\oint_S \vec{A} d\vec{S} = 0$

với S là mặt kín tùy ý.

Bài 7: Cho vector $\vec{A} = r \cos \phi \vec{i}_r - r \sin \phi \vec{i}_\phi$ trong hệ tọa độ trụ. Tính $\oint_S \vec{A} d\vec{S}$ với:

1. S là mặt kín bao hộp giới hạn bởi các mặt $z=0, z=L$ và $r=a$.
2. S là mặt kín bao hộp giới hạn bởi các mặt $x=0, y=0, z=0, z=L$ và mặt trụ $r=a$.

Bài 8: Tính Curl (Rotation) của vector sau đây:

1. $\vec{A} = xy\vec{i}_x + yz\vec{i}_y + zx\vec{i}_z$
2. $\vec{B} = 2r \cos \phi \vec{i}_r + r \vec{i}_\phi$
3. $\vec{C} = \frac{e^{-r}}{r} \vec{i}_\theta$

Bài 9: Cho vector $\vec{A} = yz\vec{i}_x + zx\vec{i}_y + xy\vec{i}_z$. Chứng tỏ rằng $\oint_C \vec{A} d\vec{l}$ với C là đường cong bất kỳ.

Bài 10: Tìm lưu số vector $\vec{F} = (x+y)\vec{i}_x + (x-z)\vec{i}_y + (y+z)\vec{i}_z$ theo chu vi tam giác $A(0,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$.

Chương 1: CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

Bài 1. Điện tích thử q chuyển động trong miền có trường điện từ với vận tốc $\vec{v} = \vec{i}_x + \vec{i}_y$ (m/s). Tìm cường độ trường điện $\vec{E}$ nếu biết trường từ có cảm ứng từ $\vec{B} = \vec{i}_x - 2\vec{i}_z$ (wb/m²) và lực của trường điện từ tác dụng lên điện tích thử bằng không.

ĐS: $\vec{E} = 2\vec{i}_x - 2\vec{i}_y + \vec{i}_z$

Bài 2. Trong môi trường đồng nhất tuyến tính, đẳng hướng có $\epsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $\gamma = 0$, không có điện tích tự do, tồn tại trường điện từ có $\vec{B} = a \sin(\omega t - Kx)\vec{i}_x + aKy \cos(\omega t - Kx)\vec{i}_y$ với K , a , ω là hằng số.

1. Tìm vector cường độ trường điện $\vec{E}$
2. Chứng tỏ $\vec{E}, \vec{B}$ thỏa hệ phương trình Maxwell nếu $K^2 = \epsilon\mu\omega^2$

ĐS: $\vec{E} = -\frac{aK^2 y}{\epsilon\mu\omega} \cos(\omega t - Kx)\vec{i}_z$

Bài 3. Trong môi trường $\epsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $\gamma = 0$ tồn tại trường điện từ có cường độ trường điện $\vec{E} = \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(\omega t)\vec{i}_z$ với k_x , k_y , ω là hằng số.

1. Tìm vector cường độ trường từ $\vec{H}$
2. Chứng tỏ $k_x^2 + k_y^2 = \omega^2 \epsilon\mu$

ĐS: $\vec{H} = -\left(\frac{k_y}{\omega\mu} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(\omega t)\right)\vec{i}_x + \left(\frac{k_x}{\omega\mu} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(\omega t)\right)\vec{i}_y$

Bài 4. Trong môi trường đồng nhất tuyến tính, đẳng hướng có $\epsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $\gamma = 0$, không có điện tích tự do, tồn tại trường điện từ biến thiên tần số góc ω $\vec{H} = \sin \beta_x x \sin \beta_y y \cos \omega t \vec{i}_z$ với β_x , β_y là hằng số.

1. Tìm vector cường độ trường từ $\vec{E}$
2. Chứng tỏ $\beta_x^2 + \beta_y^2 = \omega^2 \epsilon\mu$

ĐS: $\vec{E} = \left(\frac{\beta_y}{\omega\epsilon_0} \sin \beta_x x \cos \beta_y y \sin \omega t\right)\vec{i}_x - \left(\frac{\beta_x}{\omega\epsilon_0} \cos \beta_x x \sin \beta_y y \sin \omega t\right)\vec{i}_y$

Bài 5. Dây dẫn bằng đồng có độ dẫn điện $\mu = 5,8 \cdot 10^7$ (S/m), $\epsilon \approx \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ (F/m) dạng hình trụ đường kính $d = 1\text{mm}$ mang dòng điện hình sin biên độ 1A, tần số 50Hz. Tính

mật độ dòng điện dẫn và mật độ dòng điện dịch trong dây dẫn. Giả sử dòng điện phân bố đều theo tiết diện dây dẫn.

$$\text{ĐS: } |J_{\text{dan}}| = \frac{I_d}{S} = 1,28 \cdot 10^6 \sin(100\pi t), \quad |J_{\text{dich}}| = \left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| = 6,11 \cdot 10^{-11} \cos(100\pi t)$$

Bài 6. Cáp đồng trục, có bán kính lõi là a , bán kính vỏ là b . Trong không gian giữa lõi và vỏ tồn tại trường điện từ có các vector cho trong hệ trụ: $\vec{E} = \frac{E_0}{r} \vec{i}_r$, $\vec{H} = \frac{H_0}{r} \vec{i}_\phi$, với E_0, H_0 là hằng số. Tính công suất điện từ truyền dọc cáp?

$$\text{ĐS: } P = 2\pi E_0 H_0 \ln \frac{b}{a}$$

Bài 7. Tìm phân bố điện tích tự do khối, mặt gây ra trường điện có vector cảm ứng điện $\vec{D}$ cho trong hệ tọa độ cầu:

$$1. \quad \vec{D} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{K}{r^2} \vec{i}_r & r > R \end{cases} \quad K, R = \text{const}$$

$$2. \quad \vec{D} = \begin{cases} kr^2 \vec{i}_r & r < R \\ \frac{kR^4}{r^2} \vec{i}_r & r > R \end{cases} \quad K, R = \text{const}$$

$$\text{ĐS: } 1. \rho = 0 \text{ trong cả 2 miền, } \sigma(r=R) = \frac{K}{R^2}$$

$$2. \quad \rho = \begin{cases} 4kr & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}, \quad \sigma(r=R) = 0$$

Bài 8. Tìm phân bố điện tích tự do khối, mặt gây ra trường điện có vector cảm ứng điện $\vec{D}$ cho trong hệ tọa độ trụ:

$$1. \quad \vec{D} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{K}{r} \vec{i}_r & r > R \end{cases} \quad K, R = \text{const}$$

$$2. \quad \vec{D} = \begin{cases} kr^2 \vec{i}_r & r < R \\ \frac{kR^3}{r} \vec{i}_r & r > R \end{cases} \quad K, R = \text{const}$$

$$\text{ĐS: } 1. \rho = 0 \text{ trong cả 2 miền, } \sigma(r=R) = \frac{K}{R}$$

$$2. \quad \rho = \begin{cases} 3kr & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}, \quad \sigma(r=R) = 0$$

Bài 9. Tụ điện phẳng lấp đầy điện môi thực có độ thẩm điện ϵ , độ dẫn điện, diện tích cốt

tụ bằng S, khoảng cách giữa 2 cốt tụ bằng d, đặt dưới điện thế U_c biến thiên đủ chậm. Xác định:

1. Dòng điện dẫn và dòng điện dịch trong điện môi.
2. Dòng điện chảy trong dây nối tụ

$$\text{ĐS: } I_{dan} = \frac{U_c}{R}; R = \frac{d}{\gamma S}$$

$$I_{dich} = C \frac{dU_c}{dt}; C = \frac{\epsilon S}{d}$$

$$i = I_{dan} + I_{dich} = \frac{U_c}{R} + C \frac{dU_c}{dt}$$

Bài 10. Khung dây chữ nhật cạnh a, b nằm trong mặt phẳng yz, hai cạnh dài b song song với trục z, và cách trục này khoảng cách bằng y_0, y_0+a . Khung chuyển động trong trường từ có cảm ứng $\vec{B}$ với vận tốc $\vec{v} = v_0 \vec{i}_y$ với $v_0 = \text{const}$. Xác định sức điện động cảm ứng trong

khung dây biết $\vec{B} = \frac{B_0}{r} \vec{i}_\phi$ (tọa độ trụ) với $B_0 = \text{const}$.

$$\text{ĐS: } \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{B_0 ab v_0}{y_0(y_0 + a)}$$

Bài 11. Hai môi trường phân cách bởi mặt phẳng có phương trình $x+y=1$ (hệ tọa độ Descartes) miền 1 chứa gốc tọa độ có độ thẩm điện $\epsilon_1=4\epsilon_0$, miền 2 có $\epsilon_2=8\epsilon_0$. Cường độ điện trường trong miền 1 tại mặt phân cách là $\vec{E}_1 = 2\vec{i}_y + 3\vec{i}_z$. Tìm cường độ trường điện $\vec{E}_2$ trong miền 2 tại mặt phân cách. Giả sử trên mặt phân cách không có điện tích tự do.

$$\text{ĐS: } \vec{E}_2 = -0.5\vec{i}_x + 1.5\vec{i}_y + 3\vec{i}_z$$

Chương 2: TRƯỜNG ĐIỆN TÍNH

Bài 1. Thế điện φ của trường điện tĩnh phân bố như sau:

$$\text{a. } \varphi = \begin{cases} a & r < R \\ \frac{aR}{r} & r > R \end{cases} \quad (\text{tọa độ cầu})$$

$$\text{b. } \varphi = \begin{cases} a \ln \frac{d}{R} & r < R \\ a \ln \frac{d}{r} & r > R \end{cases} \quad (\text{tọa độ trụ})$$

Với a, d, R là các hằng số.

Tính phân bố cường độ trường điện trong không gian của 2 trường hợp trên.

ĐS: a, $\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{aR}{r^2} \vec{i}_r & r > R \end{cases}$ b, $\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{a}{r} \vec{i}_r & r > R \end{cases}$

Bài 2. Thế điện φ của trường điện tĩnh phân bố như sau:

$$\text{a. } \varphi = \begin{cases} \frac{b}{2R}(3-r^2/R) & r < R \\ \frac{b}{r} & r > R \end{cases} \quad (\text{tọa độ cầu})$$

$$\text{b. } \varphi = \begin{cases} a(3R-2r)r \cos \phi & r < R \\ (aR^3/r) \cos \phi & r > R \end{cases} \quad (\text{tọa độ trụ})$$

Với a, b, R là những hằng số. Tìm phân bố điện tích tự do trong 2 trường hợp trên. Môi trường có $\epsilon = \text{const}$.

ĐS: a, $\rho = \begin{cases} \frac{3\epsilon b}{R^2} & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$ b, $\rho = \begin{cases} 6a\epsilon \cos \phi & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$

Bài 3. Trong miền không khí ($\epsilon = \epsilon_0$) giới hạn bởi các mặt dẫn gồm các nửa mặt $x=0, y>0$; $y=0, x>0$ và mặt cong $xy=2$. Giả sử trong miền không khí này thế điện phân bố theo quy luật $\varphi(x,y)=50xy$ (V). Tìm mật độ điện tích mặt trên các mặt dẫn trên.

ĐS: $\vec{E} = -\text{grad} \varphi; \sigma = \vec{D} \cdot \vec{n} = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n}$

Trên mặt phẳng $xy=2$: $\vec{n} = \frac{-\text{grad} \varphi}{|\text{grad} \varphi|} = \frac{-(y\vec{i}_x + x\vec{i}_y)}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, \quad \sigma = \frac{50\epsilon_0}{x}(x^4 + 4)^{1/2}$

Bài 4. Giữa 2 điện cực phẳng song song cách nhau khoảng $x=d$, dài $y=a$, rộng $z=b$, cường độ trường điện biến thiên theo quy luật: $E_x = E_0(1 - \frac{x^2}{2d^2}), E_y = 0, E_z = 0$. Cho $d \ll a$ và b .

- Xác định mật độ điện tích khối và hiệu điện thế giữa 2 điện cực.
- Cường độ trường điện thay đổi như thế nào nếu nối hai điện cực với nguồn điện thế U_0 .

ĐS: a, $\rho = -(\epsilon_0 E_0 / d_2)x; U = \frac{5}{6} E_0 d$

b, $E_x = E_0(1 - \frac{x^2}{2d^2}) + \frac{U_0 - U}{d}$

Bài 5. Hai điện cực là hai tấm kim loại phẳng hình vuông cạnh $l=0,1\text{m}$ đặt song song cách nhau khoảng $d=0,5 \cdot 10^{-2}\text{ m}$. Giữa hai điện cực là chân không có thể điện biến đổi theo quy luật: $\varphi=ax^3+bx^2+cx$, với $a=-6,28 \cdot 10^8\text{ V/m}^3$, $b=-9,24 \cdot 10^5\text{ V/m}^2$, $c=-12 \cdot 10^2\text{ V/m}$. Bỏ qua hiệu ứng mép, tìm điện tích khối toàn phần giữa 2 điện cực.

ĐS: $Q = -\epsilon_0 l^2 (3ad^2 + 2bd)$

Bài 6. Xác định cường độ trường điện $\vec{E}$, thế điện trong chân không bên trên mặt dẫn phẳng rất rộng, mặt trên mang điện tích mặt phân bố đều với mật độ $\sigma=\text{const}$.

ĐS: $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{i}_z, \varphi = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} z$ chọn $\varphi=0$ tại $z=0$.

Bài 7. Xác định thế điện và cường độ trường điện gây ra bởi điện tích tự do phân bố đều với mật độ mặt $\sigma=\text{const}$ trên mặt phẳng $z=0$. Môi trường chung quanh có $\epsilon=\epsilon_0$.

ĐS: $\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i}_z & z>0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i}_z & z<0 \end{cases} \quad \varphi = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z & z>0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z & z<0 \end{cases}$

Bài 8. Giữa 2 cốt tụ điện phẳng là không khí, người ta đặt tấm kim loại phẳng dày d_1 song song với 2 cốt tụ và cách cốt tụ thứ nhất một khoảng bằng d_2 , cốt tụ thứ nhất có thế điện φ_1 , cốt tụ thứ hai có thế điện φ_2 , khoảng cách giữa 2 cốt tụ là d . Tính thế điện của tấm kim loại.

ĐS: $\varphi = [\varphi_1(d - d_1) - (\varphi_1 - \varphi_2)d_2] / (d - d_1)$

Bài 9. Tính điện dung của tụ điện phẳng nhét đầy 2 lớp điện môi ϵ_1, ϵ_2 , có bề dày d_1, d_2 song song với cốt tụ. Diện tích cốt tụ là S .

ĐS: $C = \epsilon_1 \epsilon_2 S / (\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2)$

Bài 10. Giữa một cốt của tụ điện phẳng và điện môi có 1 khe hẹp không khí dày $0,1\text{cm}$, bề dày của điện môi ($\epsilon=4.3\epsilon_0$) bằng $0,5\text{cm}$. diện tích cốt tụ bằng 200cm^2 , cường độ chọc thủng của điện môi bằng $15 \cdot 10^3\text{KV/m}$. của không khí bằng $3 \cdot 10^3\text{KV/m}$.

- Tính hiệu điện thế chọc thủng của tụ Uct.
- Tụ được đặt dưới hiệu điện thế $U=0.5U_{ct}$. Tìm $\vec{E}, \vec{D}, \varphi, \vec{P}$ (vector phân cực điện) .
- Tính điện dung của tụ.

Bài 11. Giữa 2 cốt tụ điện phẳng là giấy có bề dày 1mm, diện tích 0.01mm^2 . Giữa cốt tụ và giấy có khe hẹp không khí bề dày trung bình 0.02mm. Tính điện dung tụ điện và hiệu điện thế chọc thủng U_{ct} trong 2 trường hợp:

- Kể đến ảnh hưởng 2 khe hở không khí.
- Không kể đến ảnh hưởng 2 khe hở không khí.

Cường độ chọc thủng của giấy $50 \cdot 10^6 \text{ V/m}$, của không khí $5 \cdot 10^6 \text{ V/m}$, độ thấm điện $\epsilon = 3.5\epsilon_0$.

ĐS: a, $C = 2,71 \cdot 10^{-9} \text{ F}$, $U_{ct} = 1,63 \text{ KV}$

b, $C = 3,08 \cdot 10^{-9} \text{ F}$, $U_{ct} = 50 \text{ KV}$

Bài 12. Tụ điện phẳng lấp đầy điện môi có độ thấm điện tuyệt đối biến thiên theo quy luật $\epsilon = \epsilon_1 + (\epsilon_2 - \epsilon_1)x/d$, với ϵ_1, ϵ_2 là hằng số. Cốt tụ thứ nhất ($x=0$) có thế điện 0, cốt tụ thứ 2 ($x=d$) có thế điện U . Diện tích mỗi cốt tụ là S . Tìm:

- Điện dung tụ điện.
- Phân bố điện tích tự do, liên kết trong điện môi và trên bề mặt tiếp xúc hai cốt tụ.
- Phân bố thế điện.
- Phân bố cường độ điện trường giữa 2 cốt tụ.

ĐS: a, $C = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)S}{d \ln(\epsilon_2 / \epsilon_1)}$

b, $\rho = 0, \sigma(x=d) = -\sigma(x=0) = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)U}{d \ln(\epsilon_2 / \epsilon_1)}$

c, $\varphi = \frac{U}{\ln(\epsilon_2 / \epsilon_1)} \ln \frac{\epsilon_1 d + (\epsilon_2 - \epsilon_1)x}{\epsilon_1 d}$

d, $\vec{E} = -\frac{U}{\ln(\epsilon_2 / \epsilon_1)} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 d + (\epsilon_2 - \epsilon_1)x} \vec{i}_x$

Bài 13. Tụ điện trụ có bán kính cốt tụ trong R_1 , bán kính cốt tụ ngoài R_2 , điện môi trong tụ có độ thấm điện $\epsilon = \text{const}$. Tụ điện đặt dưới điện thế $U = \text{const}$ (thế cốt ngoài bằng 0). Xác định phân bố φ , $\vec{E}$, $\vec{D}$ của trong điện môi. Tính điện dung của 1 đơn vị dài của tụ, phân bố khối và mặt của điện tích tự do, điện tích liên kết.

ĐS: $\varphi = U \ln \frac{R_2}{r} / \ln \frac{R_2}{R_1}, \vec{E} = U / (r \ln \frac{R_2}{R_1}) \vec{i}_r, C_0 = 2\pi\epsilon / \ln \frac{R_2}{R_1}$

Bài 14. Tụ điện trụ hai lớp điện môi ϵ_1, ϵ_2 chồng lên nhau, mặt phân chia hai điện môi vuông góc với cốt tụ, bề cao lớp điện môi thứ nhất là h_1 , lớp thứ 2 là h_2 , bán kính cốt tụ trong R_1 , bán kính cốt tụ ngoài R_2 . Tụ được đặt dưới điện thế U . Xác định sự phân bố trường điện, thế điện giữa 2 cốt tụ, mật độ điện tích tự do, liên kết tại các mặt phân cách 2 môi trường, điện dung tụ điện.

ĐS: $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \frac{U}{r \ln(R_2 / R_1)} \vec{i}_r; \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{U \ln(R_2 / r)}{\ln(R_2 / R_1)}$

$C = 2\pi\epsilon_1 h_1 / \ln(R_2 / R_1) + 2\pi\epsilon_2 h_2 / \ln(R_2 / R_1)$

Bài 15. Xác định thế và cường độ trường điện bên trong và bên ngoài hình trụ rất dài bán

kính tiết diện bằng a, điện tích bên trong bố đều trong hình trụ với mật độ khối ρ bằng cách:

- Giải phương trình Laplace-Poisson
- Áp dụng định luật Gauss

ĐS:
$$E = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\epsilon_0} & r < a \\ \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} & r > a \end{cases} \quad \varphi = \begin{cases} -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} & r < a \\ \frac{\rho a^2}{4\epsilon_0} \ln \frac{a}{r} - \frac{\rho a^2}{4\epsilon_0} & r > a \end{cases}$$

Bài 16. Xác định thế và cường độ trường điện bên trong và bên ngoài mặt cầu **mang điện tích Q** bán kính a bằng cách:

- Giải phương trình Laplace-Poisson
- Áp dụng định luật Gauss

ĐS:
$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{i}_r & r > a \end{cases} \quad \varphi = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & r > a \end{cases}$$

Bài 17. Xác định thế điện φ trong các miền gây ra bởi điện tích phân bố khối với mật độ:

a.
$$\rho = \begin{cases} \rho = \text{const} & a < r < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{Hệ tọa độ trụ, chọn } \varphi(0)=0).$$

b.
$$\rho = \begin{cases} \rho_0 r / a & 0 < r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad (\text{Hệ tọa độ cầu})$$

ĐS: a,
$$\varphi = \begin{cases} \frac{\rho_0(b^2 - a^2)}{2\epsilon} & 0 < r < a \\ -\frac{\rho_0(r^2 + 2a^3)/(r - 3b^2)}{6\epsilon} & a < r < b \\ \frac{\rho_0(b^3 - a^3)}{3\epsilon r} & r > b \end{cases}$$

b,
$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0 a} \vec{i}_r & r < a \\ \frac{\rho_0 a^3}{4\epsilon_0 r^2} \vec{i}_r & r > a \end{cases}$$

Bài 18. Xác định cường độ trường điện $\vec{E}$, thế điện φ bên trong và bên ngoài đám mây electron hình cầu bán kính $R=0.5\text{cm}$ có mật độ điện tích khối $\rho=-2,5 \cdot 10^{-9} \text{ C/cm}^3$.

ĐS:
$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \rightarrow E = \begin{cases} -9,4 \cdot 10^3 r & r < R \\ -\frac{11,8 \cdot 10^2}{r^2} & r > R \end{cases} \quad (\text{V/cm})$$

$$\varphi = \begin{cases} 4,7.10^3 r^2 - 3,535.10^3 & r < R \\ -\frac{11,8.10^2}{r} & r > R \end{cases} \quad (V)$$

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

Chương 3: TRƯỜNG ĐIỆN DỪNG

Bài 1. Thế điện trong môi trường dẫn ($\gamma=10^{-4}$ S/m) biến đổi theo quy luật $\varphi = ax^2 - ay^2 + b$ với $a=1\text{V/m}^2$, $b=2\text{V}$.

1. Tính mật độ dòng điện dẫn $\vec{J}$, nghiệm lại $\text{div}\vec{J} = 0$
2. Tính cường độ dòng điện chảy qua diện tích hình vuông cạnh $y_0=50\text{cm}$, $z_0=50\text{cm}$ nằm song song và cách mặt phẳng zoy một khoảng $x_0=10\text{cm}$.

ĐS: $J = -2.10^{-4}(xi_x - yi_y) \text{ A/m}^2$
 $I = 5.10^{-6} \text{ A}$

Bài 2. Tụ điện phẳng lấp đầy điện môi thực $\varepsilon=(5-3x)\varepsilon_0$, $\gamma = 10^{-10} \text{ S/cm}$. Khoảng cách giữa 2 cốt tụ $d=1\text{cm}$, tụ điện đặt dưới hiệu điện thế $U=1\text{KV}$. Xác định mật độ dòng điện chảy giữa 2 cốt tụ, mật độ khối điện tích tự do và liên kết trong điện môi.

ĐS: 10^{-7} A/cm^2 , $\rho_{td} = -265.10^{-12} \text{ C/cm}^3$, $\rho_{lk} = 265.10^{-12} \text{ C/cm}^3$

Bài 3. Tụ điện phẳng lấp đầy bởi điện môi thực có $\gamma = 10^{-10} \text{ S/cm}$, $\varepsilon=4\varepsilon_0 d/(x+d)$ đặt dưới hiệu điện thế $U=1\text{KV}$. Xác định:

1. Mật độ điện tích tự do, liên kết khối
2. Công suất tổn hao trong điện môi.
3. Tính dòng điện chảy qua cốt tụ

Cho diện tích cốt tụ $S=4\text{cm}^2$, khoảng cách 2 cốt tụ là $d=2\text{mm}$.

ĐS: $\rho_{td} = -\rho_{lk} = \frac{-354.10^{-12}}{(0.2+x)^2} \text{ C/cm}^3$, $P_{tt} = 2.10^{-3} \text{ W}$

Bài 4. Giữa 2 cốt tụ điện phẳng là điện môi thực có $\varepsilon=\varepsilon_0(a+bx)$, $\gamma=\gamma_0(a+bx)$ với γ_0, a, b là hằng số. Tụ được đặt dưới hiệu điện thế U . Khoảng cách 2 cốt tụ bằng d . Xác định cường độ trường điện, mật độ điện tích tự do, liên kết trong điện môi.

ĐS: $E = \frac{bU}{(a+bx)\ln[(a+bd)/a]}$; $\rho = 0$; $\rho_{lk} = \frac{-\varepsilon_0 b^2 U}{(a+bx)^2 \ln[(a+bd)/a]}$

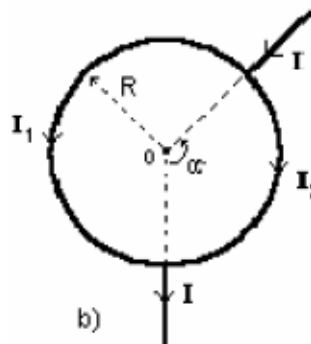
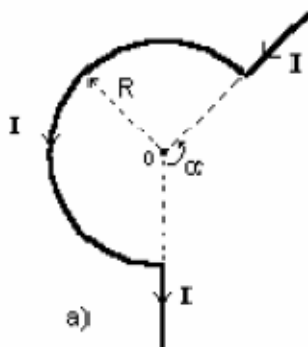
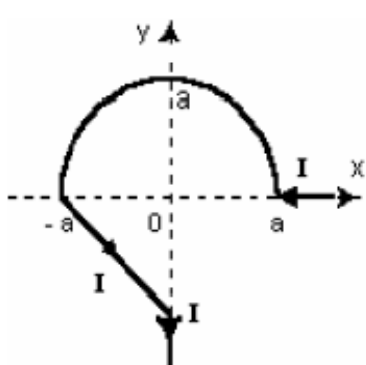
Bài 5. Cáp đồng trục bán kính lõi a , bán kính vỏ b , dài L , giữa lõi và vỏ là lớp cách điện có, hiệu điện thế giữa lõi và vỏ là U . Tính:

Cường độ trường điện trong lớp cách điện, dòng điện rò chảy qua cách điện, điện trở cách điện của cáp.

1. Mật độ công suất tổn hao, công suất tổn hao trên 1 đơn vị dài của cáp.
2. Mật độ điện tích khối tự do, liên kết trong lớp cách điện. Cho biết lớp cách điện có độ thẩm điện $\varepsilon=\text{const}$.

Chương 4: TRƯỜNG TỪ DÙNG

Bài 1. Tính vector cảm ứng từ tại O biết $\mu=\mu_0$.



ĐS: a, $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (2 + \pi) \vec{i}_z$

b, $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{3R} \vec{i}_z$

c, $\vec{B} = 0$

Bài 2. Lõi cáp đồng trục đặc, bán kính a, mang dòng I phân bố đều theo tiết diện, và vỏ trụ bán kính b, mang dòng điện I phân bố đều theo chu vi vỏ. Tính vector cảm ứng từ tại các miền? (Độ thâm từ μ)

ĐS: $\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu I r}{2\pi a^2} \vec{i}_\phi & 0 < r < a \\ \frac{\mu I}{2\pi r} \vec{i}_\phi & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$

Bài 3. Lõi trục đặc, dài vô hạn, bán kính $a=2\text{mm}$, mang dòng với vector mật độ khối:

$\vec{J} = 6r \vec{i}_z \text{ (A/m}^2\text{)}$ r: bán kính hướng trục

a, Tìm vector cường độ trường từ bên trong và ngoài lõi.

b, Tính $\text{rot} \vec{H}$ ở cả 2 miền.

ĐS: $\vec{H} = \begin{cases} 2r^2 \vec{i}_\phi & r < a \\ \frac{2a^3}{r} \vec{i}_\phi & r > a \end{cases}$

Bài 4. Môi trường $\mu = \mu_0$ và vector mật độ dòng khối cho trong hệ trụ:

$$\vec{J} = \begin{cases} 0 & 0 < r < a \\ J_0 \vec{i}_z & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

Tìm vector cảm ứng từ trong mỗi miền.

$$\text{ĐS: } \vec{B} = \begin{cases} 0 & 0 < r < a \\ \frac{\mu_0 J_0}{2} \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \vec{i}_\phi & a < r < b \\ \frac{\mu_0 J_0}{2} \left(\frac{b^2 - a^2}{r} \right) \vec{i}_\phi & r > b \end{cases}$$

Bài 5. Cáp đồng trục bán kính lõi R_1 , bán kính trong của vỏ là R_2 , bán kính ngoài của vỏ là R_3 . Dòng điện chảy trong lõi và vỏ theo phương song song trục cáp có cùng cường độ I nhưng ngược chiều nhau. Lõi và vỏ có độ thấm từ μ_0 , điện môi giữa lõi và vỏ có độ thấm từ μ . Xác định phân bố của thế vector, cảm ứng từ trong lõi, vỏ, điện môi giữa lõi và vỏ. Chọn $\vec{A} = 0$ tại $r = R_1$.

$$\text{ĐS: } A = \begin{cases} A_1 = \frac{\mu_0 I (R_1^2 - r^2)}{4\pi R_1^2} & 0 < r < R_1 \\ A_2 = -\frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{r}{R_1} & R_1 < r < R_2 \\ A_3 = \frac{I}{2\pi} \left[\frac{\mu_0 R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \ln \frac{R_2}{r} + \mu \ln \frac{R_1}{R_2} + \frac{\mu_0 (r^2 - R_2^2)}{2(R_3^2 - R_2^2)} \right] & R_2 < r < R_3 \\ A_4 = \frac{I}{2\pi} \left[\frac{\mu_0 R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \ln \frac{R_2}{R_3} + \mu \ln \frac{R_1}{R_2} + \frac{\mu_0}{2} \right] & R_3 < r \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} & 0 < r < R_1 \\ B_2 = \frac{\mu I}{2\pi r} & R_1 < r < R_2 \\ B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right) & R_2 < r < R_3 \\ B_4 = 0 & R_3 < r \end{cases}$$

Chương 5: TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

Bài 1. Sóng điện từ đơn sắc trong môi trường ($\gamma = 0, \epsilon_r = 1, \mu_r = 1$) có vector cường độ trường điện:

$$\vec{E} = 3,77 \cos(6\pi \cdot 10^8 t + 2\pi y) \vec{i}_z \quad (V/m)$$

a, Tìm tần số f , bước sóng λ và hướng truyền sóng.

b, Tìm vector cường độ trường từ của sóng.

ĐS: a, $f=300\text{MHz}$, $\lambda=1\text{m}$, hướng $-y$

b, $\vec{H}(y,t) = -0,01 \cos(6\pi \cdot 10^8 t + 2\pi y) \vec{i}_x \quad (A/m)$

Bài 2. Sóng điện từ đơn sắc trong môi trường ($\gamma = 0, \epsilon_r = 1, \mu_r = 1$) có vector cường độ trường điện:

$$\vec{E}(z,t) = 50 \cos(\omega t - \beta z) \vec{i}_x \quad (V/m)$$

Tìm công suất trung bình truyền qua diện tích hình tròn, bán kính 2,5m; nằm trong mặt phẳng $z=\text{const}$.

ĐS: 65,1W

Bài 3. Sóng điện từ đơn sắc truyền trong môi trường ($\gamma = 0, \epsilon_r = \text{const}, \mu_r = 1$) có vector

cường độ trường điện: $\vec{E}(x,t) = 10 \cos(2\pi \cdot 10^7 t - 0,1\pi x) \vec{i}_y [V/m]$

Tìm vector cường độ trường từ & vector mật độ dòng công suất điện từ trung bình.

ĐS: $\vec{H}(x,t) = \frac{1}{8\pi} \cos(2\pi \cdot 10^7 t - 0,1\pi x) \vec{i}_z [A/m]$; $\langle \vec{P} \rangle = \frac{5}{8\pi} \vec{i}_x [W/m^2]$

Bài 4. Sóng phẳng đơn sắc truyền theo chiều $+z$, trong môi trường ($\gamma = 3 \cdot 10^{-3} S/m, \epsilon = 3\epsilon_0, \mu = \mu_0$), có vector cường độ trường điện:

$$\vec{E}(z=0,t) = 100 \cos(3 \cdot 10^7 t + 60^\circ) \vec{i}_x \quad (V/m)$$

Tìm: a, Hệ số truyền, trở sóng, vận tốc pha, bước sóng

b, Vector Poynting tức thời, trung bình, phức và mật độ năng lượng điện từ trung bình tại $z=0,5\text{m}$.

$$\Gamma = 0,212 + j0,274[m^{-1}]; Z_C = 109\angle 37,5^\circ[\Omega]$$

$$v_p = 10,95.10^7[m/s]; \lambda = 23[m]$$

ĐS: $\vec{P} = [28,3 + 35,75 \cos(6.10^7 t + 66,78^\circ)]\vec{i}_z [W/m^2]$

$$\langle \vec{P} \rangle = 28,3\vec{i}_z [W/m^2]; \langle w \rangle = 2,577.10^{-7} [J/m^3]$$

Bài 5. Sóng phẳng đơn sắc truyền trong môi trường ($\gamma = 0, \varepsilon = \text{const}, \mu = \mu_0$) có trường từ:

$$\vec{H}(y,t) = \sin(\pi.10^6 t - 0,02\pi.y - 45^\circ)\vec{i}_x [A/m]$$

- Tìm
- Tần số, bước sóng, vận tốc pha, độ thẩm điện tương đối ε_r .
 - Phương, chiều lan truyền sóng.
 - Vector cường độ trường điện.
 - Vector pounting tức thời.

ĐS: $\vec{E} = 20\pi \sin(\pi.10^6 t - 0,02\pi.y - 45^\circ)\vec{i}_z [V/m]$

$$\vec{P} = 20\pi \sin^2(\pi.10^6 t - 0,02\pi.y - 45^\circ)\vec{i}_y [W/m^2]$$

Bài 6. Sóng phẳng đơn sắc truyền trong môi trường ($\mu = \mu_0$) có trường điện:

$$\vec{E}(z,t) = 8 \sin(2\pi.10^7 t + 0,1\pi.z)\vec{i}_y [V/m]$$

- Tìm
- Phương, chiều lan truyền sóng, vận tốc pha, độ dài sóng, trở sóng.
 - Vector pounting tức thời.
 - Vector pounting phức.

MỘT SỐ CÔNG THỨC CƠ BẢN TRONG CÁC BÀI TẬP TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

$\text{grad}\varphi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \vec{i}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \vec{i}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} \vec{i}_3$	$\text{rot}\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{i}_1 & h_2 \vec{i}_2 & h_3 \vec{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$	Hệ	h₁	h₂	h₃
$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_2 h_3 A_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial (h_1 h_3 A_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 A_3)}{\partial u_3} \right]$		Đề các	1	1	1
$\Delta \varphi = \text{div}(\text{grad}\varphi) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \right) + \dots \right]$		Trụ	1	r	1
		Cầu	1	r	r sinθ
	$\Delta \vec{A} = \text{grad}(\text{div}\vec{A}) - \text{rot}(\text{rot}\vec{A})$	$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$	$\vec{B} = \mu \vec{H}$		$\vec{J} = \gamma \vec{E}$
$d\vec{S} = \pm h_2 h_3 du_2 du_3 \vec{i}_1 \pm h_1 h_3 du_1 du_3 \vec{i}_2 \pm h_1 h_2 du_1 du_2 \vec{i}_3$	$d\vec{\ell} = h_1 du_1 \vec{i}_1 + h_2 du_2 \vec{i}_2 + h_3 du_3 \vec{i}_3$	$dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$			

$\oint_s \vec{D} d\vec{S} = q^*$	$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$	$\vec{E} = -\text{grad } \varphi$	$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} (\text{F/m})$	$C = \left \frac{Q}{U} \right $	$W_c = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \vec{E} \cdot \vec{D} dV = \frac{1}{2} C U^2$	$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$
$\oint_L \vec{H} d\vec{\ell} = I^*$	$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J}$	$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$	$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} (\text{H/m})$	$L = \frac{\Phi}{I}$	$W_m = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \vec{H} \cdot \vec{B} dV = \frac{1}{2} L I^2$	$\sigma_{lk} = -\vec{n}(\vec{P}_1 - \vec{P}_2)$
$\alpha = \frac{\omega \sqrt{\mu \epsilon}}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega \epsilon} \right)^2} - 1}$	$\beta = \frac{\omega \sqrt{\mu \epsilon}}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega \epsilon} \right)^2} + 1}$	$Z_c = \sqrt{\frac{j\omega \mu}{\gamma + j\omega \epsilon}}$	$K = \sqrt{j\omega \mu (\gamma + j\omega \epsilon)}$	$\vec{\beta} = -\text{grad } \varphi = \beta \vec{i}_s$	$P_j = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV$	$\rho_{lk} = -\text{div } \vec{P}$

Hệ phương trình Maxwell		$\vec{E} = Z_c \left[\dot{\vec{H}} \times \vec{i}_s \right]$	$\dot{\vec{H}} = \frac{1}{Z_c} \left[\vec{i}_s \times \dot{\vec{E}} \right]$	TĐT của nguyên tố anten thẳng	
$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$	$\dot{\vec{E}} = Z_c \left[\dot{\vec{H}} \times \vec{i}_s \right]$	$\dot{\vec{H}} = \frac{1}{Z_c} \left[\vec{i}_s \times \dot{\vec{E}} \right]$	$\dot{H}_\phi = \frac{\ell k^2 \sin \theta}{4\pi} \left(\frac{j}{kr} + \frac{1}{k^2 r^2} \right) \cdot e^{-jkr}$	
$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$	$P_z = \frac{1}{2} \int_S \text{Re} \{ \dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}} \}_z dS_z$	$V_p = \omega / \beta$	$\dot{E}_r = \frac{-j\ell k^3 \cos \theta}{2\pi \omega \epsilon} \left(\frac{j}{k^2 r^2} + \frac{1}{k^3 r^3} \right) \cdot e^{-jkr}$	
$\text{div } \vec{D} = \rho$	$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma$	$P_{bx} = \oint_s < P_r > dS$	$\lambda = 2\pi / \beta$	$\dot{E}_\theta = \frac{-j\ell k^3 \sin \theta}{4\pi \omega \epsilon} \left(\frac{-1}{kr} + \frac{j}{k^2 r^2} + \frac{1}{k^3 r^3} \right) \cdot e^{-jkr}$	
$\text{div } \vec{B} = 0$	$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$	$R_{bx} = 2P_{bx} / I_m^2$	$\Delta = 1 / \alpha$	$D = \frac{4\pi u_{n\max}}{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n \sin \theta d\theta d\phi} = \frac{4\pi u_{\max}}{P_{bx}}$	
$\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$	$\vec{n} \cdot (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$	$R_0 = \frac{\text{Re}(Z_c)}{2\pi a}; L_0 = \frac{\text{Im}(Z_c)}{2\pi a\omega}$	$\tilde{\epsilon} = \epsilon_0 (\epsilon_r - j \frac{\gamma}{\omega \epsilon_0})$		

$\dot{E}_x = \frac{1}{K_c} \left(-K \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} - j\omega \mu \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right)$	$\dot{E}_y = \frac{1}{K_c} \left(-K \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} + j\omega \mu \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right)$	$\dot{H}_x = \frac{1}{K_c} \left(-K \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} + j\omega \epsilon \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} \right)$	$\dot{H}_y = \frac{1}{K_c} \left(-K \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - j\omega \epsilon \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} \right)$
$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial y^2} + K_c^2 \dot{E}_z = 0$	$\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial y^2} + K_c^2 \dot{H}_z = 0$	$\alpha_w = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\gamma}} \left(\frac{\oint_{C_{ng}} H_{iz} d\ell}{\int_S (\dot{E}_x \dot{H}_y - \dot{E}_y \dot{H}_x) dS} \right); \alpha_d = \frac{\omega \mu \gamma}{2\beta}$	

Kiểu sóng tới TE_{mn}	Kiểu sóng tới TM_{mn}	Các thông số
$\dot{H}_z = C \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cdot e^{-j\beta z}$	$\dot{E}_z = C \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cdot e^{-j\beta z}$	$f_{th} = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} = \frac{\omega_{th}}{2\pi}$
$\dot{H}_x = \frac{j\beta C}{K_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cdot e^{-j\beta z}$	$\dot{E}_x = -\frac{j\beta C}{K_c^2} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cdot e^{-j\beta z}$	$K_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = -\beta^2 + \omega^2 \mu \epsilon$
$\dot{H}_y = \frac{j\beta C}{K_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cdot e^{-j\beta z}$	$\dot{E}_y = -\frac{j\beta C}{K_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cdot e^{-j\beta z}$	$\beta = \beta_{mn} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$
$\dot{E}_z = 0; \dot{E}_x = Z_{TE} \dot{H}_y; \dot{E}_y = -Z_{TE} \dot{H}_x$	$\dot{H}_z = 0; \dot{E}_x = Z_{TM} \dot{H}_y; \dot{E}_y = -Z_{TM} \dot{H}_x$	$Z_{TE} = \frac{\omega \mu}{\beta}; Z_{TM} = \frac{\beta}{\omega \epsilon}; K = j\beta$

Kiểu sóng TE_{mnp}	Kiểu sóng TM_{mnp}
$\dot{H}_z = A \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{c} z\right)$	$\dot{E}_z = A \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{c} z\right)$
$\dot{H}_x = -\frac{A}{K_c^2} \frac{p\pi}{c} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{c} z\right)$	$\dot{E}_x = -\frac{A}{K_c^2} \frac{p\pi}{c} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{c} z\right)$
$\dot{H}_y = -\frac{A}{K_c^2} \frac{p\pi}{c} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{c} z\right)$	$\dot{E}_y = -\frac{A}{K_c^2} \frac{p\pi}{c} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{c} z\right)$
$\dot{E}_x = \frac{A}{K_c^2} j\omega \mu \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{c} z\right)$	$\dot{H}_x = \frac{A}{K_c^2} j\omega \epsilon \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{c} z\right)$
$\dot{E}_y = -\frac{A}{K_c^2} j\omega \mu \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{c} z\right)$	$\dot{H}_y = -\frac{A}{K_c^2} j\omega \epsilon \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{c} z\right)$

$W = W_e + W_m = \text{const}; f_{mnp} = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}$
