

# CƠ LÝ THUYẾT (Theoretical Mechanics)

Trương Quang Tri, Ts.

[tri.truongquang@gmail.com](mailto:tri.truongquang@gmail.com)

Office: Phòng 201B4 – PTN Cơ học Ứng dụng – BM Cơ Kỹ Thuật  
Khoa Khoa học Ứng dụng – Đại học Bách Khoa Tp.HCM

2016.04.26  
(updated)

1

## ĐỘNG LỰC HỌC

### Mục tiêu:

Nghiên cứu qui luật chuyển động của: chất điểm, hệ chất điểm, vật rắn tuyệt đối dưới tác dụng của lực.

### Nội dung:

1. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm và hệ chất điểm
2. Nguyên lý D'Alembert
3. Các định lý tổng quát động lực học
4. Nguyên lý di chuyển khả dĩ
5. Phương trình tổng quát động lực học và phương trình Lagrange loại II

2

# ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM (1)

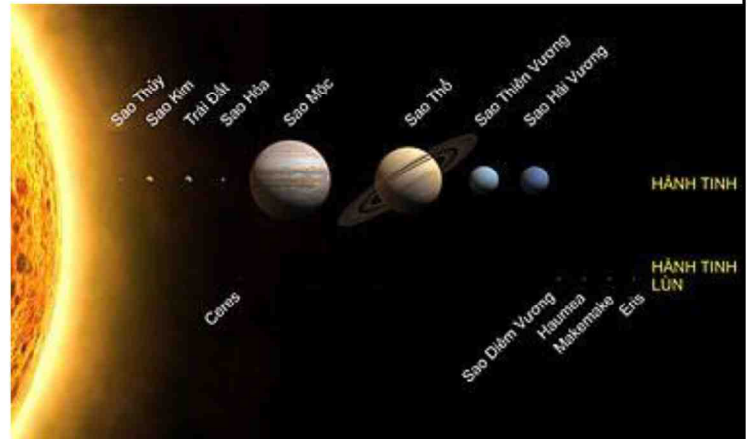
## Một số khái niệm

**1. Chất điểm:** Là điểm hình học có khối lượng

Khi kích thước của vật rắn không đáng kể so với không gian chuyển động của nó thì trong chuyển động đó, vật rắn có thể được xem như là chất điểm.

VD:

- Bán kính trái đất:  $r \sim 6,400 \text{ km}$
- Khoảng cách từ trái đất đến mặt trời:  $R \sim 150 \times 10^6 \text{ km}$  (1 AU, astronomical unit).
- $r/R \sim 4.27 \times 10^{-5}$



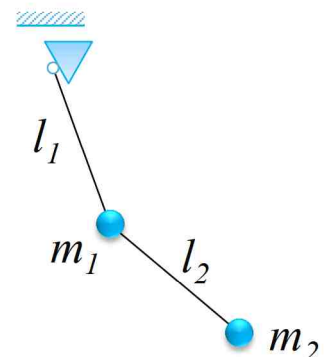
3

# ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM (2)

## Một số khái niệm

**2. Cơ hệ:** Là tập hợp các chất điểm mà chuyển động của chúng phụ thuộc lẫn nhau.

- **Cơ hệ tự do:** Các chất điểm trong cơ hệ chỉ chịu tương tác với nhau thông qua lực.
- **Cơ hệ không tự do:** Các chất điểm của cơ hệ không chỉ chịu tương tác với nhau bằng lực mà còn chịu một số ràng buộc về hình học, động học.



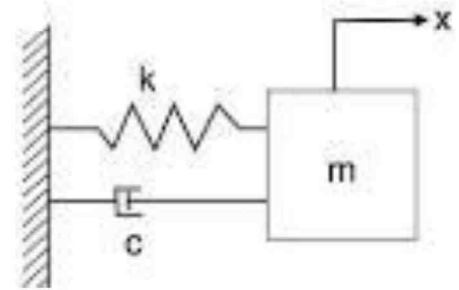
4

## ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM (3)

### Một số khái niệm

**3. Vật rắn tuyệt đối:** Là cơ hệ đặc biệt, có khoảng cách giữa hai chất điểm bất kỳ luôn không đổi.

**4. Lực:** Trong bài toán động lực học, lực thường là đại lượng thay đổi theo thời gian, vị trí và vận tốc.



**5. Hệ quy chiếu quán tính:** Là hệ quy chiếu mà trong đó các tiên đề Newton được nghiệm đúng.

*Trong kỹ thuật, quả đất và các vật rắn chuyển động thẳng đều đối với quả đất thường được chọn làm hệ quy chiếu quán tính.*

5

## ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM (4)

### 1. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm

a. Dạng vector:

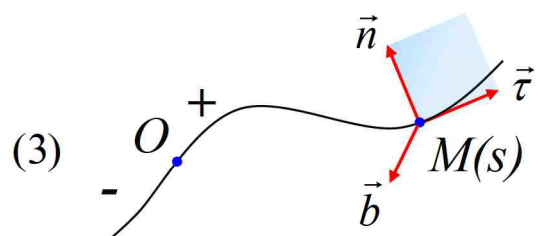
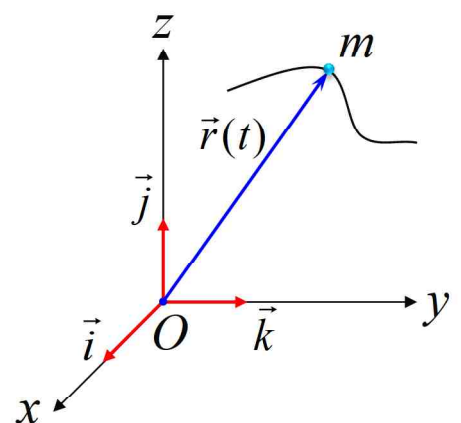
$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad (1)$$

b. Dạng tọa độ Decartes:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases} \quad (2)$$

c. Dạng tọa độ tự nhiên:

$$\begin{cases} mW_\tau = m\ddot{s} = F_\tau \\ mW_n = m\frac{V^2}{\rho} = m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n \\ 0 = F_b \end{cases} \quad (3)$$



6

## ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM (5)

### 2. Phương trình vi phân chuyển động của hệ chất điểm

Xét hệ có  $n$  chất điểm, phương trình chuyển động của hệ có dạng:

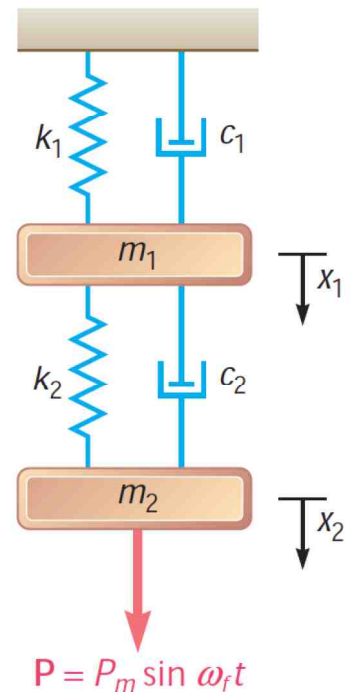
$$m_k \vec{W}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i \quad (1)$$

Hay

$$m_k \vec{W}_k = \vec{F}_k + \vec{R}_k \quad (2)$$

Trong đó, các lực tác dụng lên chất điểm  $m_k$  được định nghĩa như sau:

- $\vec{F}_k^e$  : **Lực ngoài**, còn gọi là lực hoạt động (kí hiệu là  $\vec{F}_k$ )
- $\vec{F}_k^i$  : **Lực nội**, còn gọi là phản lực liên kết (kí hiệu là  $\vec{R}_k$ )



7

## BÀI TOÁN ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM (6)

**Bài toán 1:** Cho biết chuyển động của chất điểm, yêu cầu xác định lực tác dụng lên chất điểm.

**Bài toán 2:** Cho biết các lực tác dụng lên chất điểm và các điều kiện đầu của chuyển động, yêu cầu xác định chuyển động của chất điểm đó.

8

## BÀI TOÁN ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM (7)

### 1) Mô tả chuyển động: HQC

### 2) Áp dụng các định luật vật lý thiết lập EOM (Equation of Motion)

- Newton laws:  $\rightarrow$  FBD (Free Body Diagram)
  - Biểu diễn các lực đã biết theo hướng mà nó tác dụng
  - Giả sử chiều dương của chuyển động (vị trí, vận tốc)
  - Biểu diễn vector và độ lớn của các lực phụ thuộc theo vị trí, vận tốc (nhớ quy ước dấu)
  - Viết phương trình vi phân chuyển động

#### ▪ Các định lý tổng quát động lực học

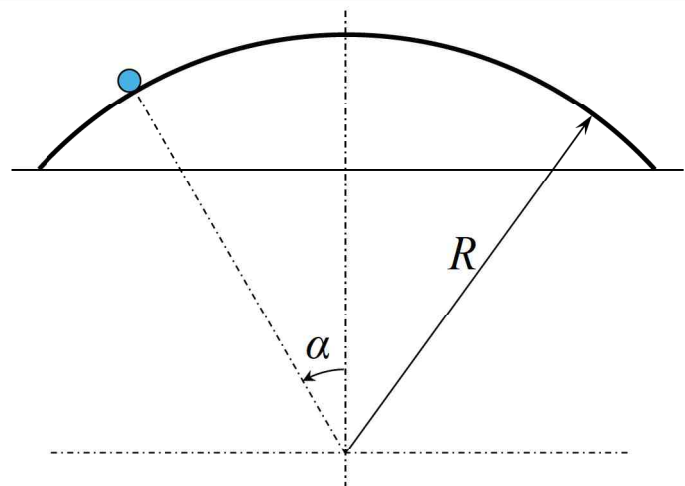
▪ ....

### 3) Áp dụng toán học để giải EOM

9

## ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM (8)

**VD1:** Xem xe như một chất điểm trong chuyển động qua cầu cong, bán kính cong của cầu là  $R$ . Giả sử xe có khối lượng  $m$  và tại vị trí đang xét trên hình vẽ, xe di chuyển với vận tốc  $V$ .



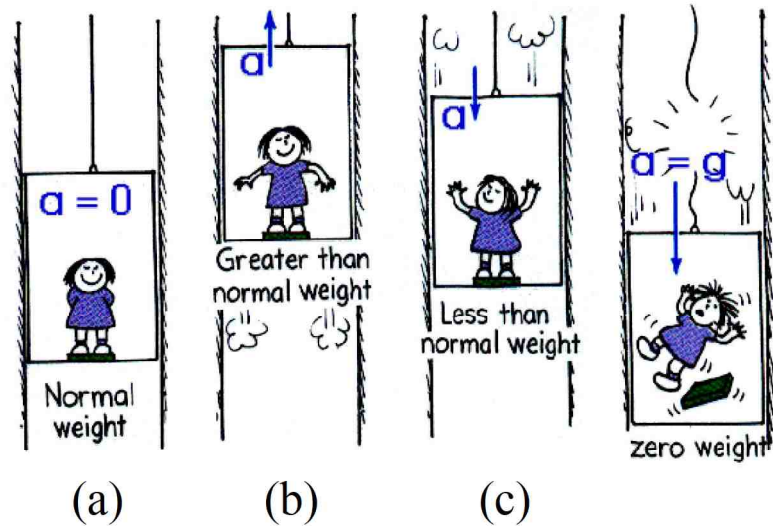
- a) Xác định áp lực của xe tác động lên cầu theo vị trí góc  $\alpha$ ,  $m$ ,  $R$ ,  $V$ .
- b) Tốc độ tối đa của xe để xe không bị nhấc bổng khỏi mặt cầu.

10

## ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM (9)

**VD2:** Một người có khối lượng bằng 45 kg đang đứng trong thang máy. Thang di chuyển với gia tốc  $a$ . Xác định phản lực của sàn thang máy tác dụng lên chân của người đó trong các trường hợp sau:

- a)  $a = 0 \text{ m/s}^2$ .
- b)  $a = 1.19 \text{ m/s}^2$ , hướng lên.
- c)  $a = 1.81 \text{ m/s}^2$ , hướng xuống



11

## ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM (10)

**VD3:** Cho cơ hệ như hình vẽ, bỏ qua ma sát và khối lượng của lò xo. Kéo vật ra khỏi vị trí cân bằng tĩnh một đoạn nhỏ  $+x_m$  rồi buông nhẹ không vận tốc đầu. Viết phương trình chuyển động của vật.

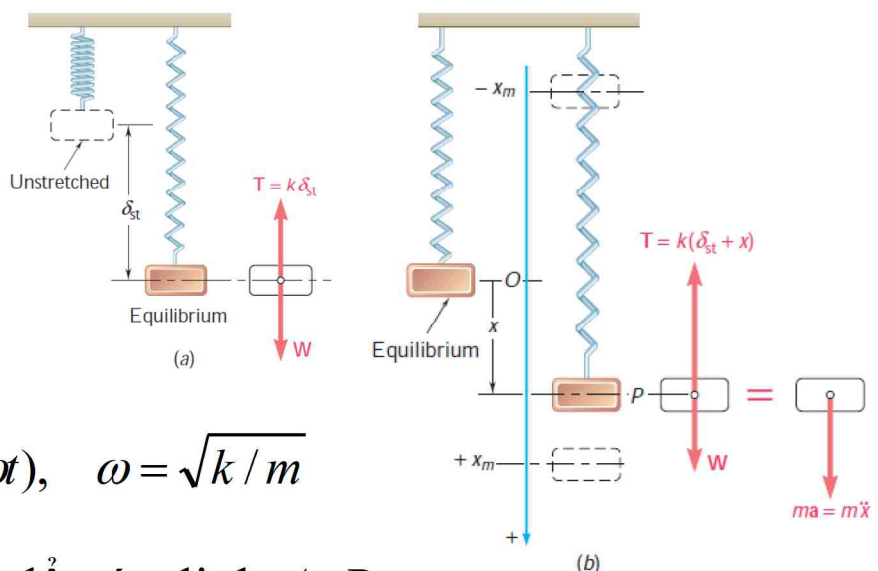
Phương trình vi phân chuyển động:

$$m\ddot{x} = F_x = W - k(\delta_{st} + x)$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\Rightarrow x = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t), \quad \omega = \sqrt{k/m}$$

Sử dụng điều kiện đầu để xác định  $A, B$



12

## ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM (11)

**VD4:** Cho cơ hệ như hình vẽ, bỏ qua ma sát và khối lượng của dây. Biết dây luôn căng và có chiều dài không đổi là  $l$ , giả sử kích thước của quả nặng  $m$  rất nhỏ so với  $l$ , viết phương trình chuyển động của quả nặng  $m$ .

Phương trình vi phân chuyển động:

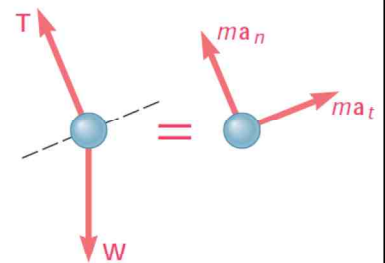
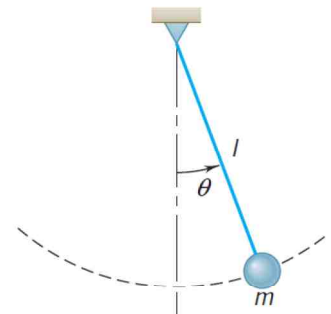
$$mW_\tau = F_\tau \Rightarrow -mg \sin \theta = m(l\ddot{\theta})$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Nếu biên độ dao động nhỏ,  $\sin \theta \sim \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

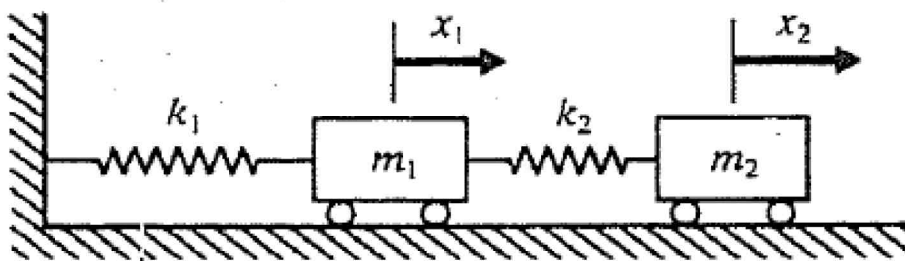
$$\Rightarrow \theta = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \quad \omega = \sqrt{g/l}$$



13

## ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM (12)

**VD5:** Cho cơ hệ và các thông số như hình vẽ. Chọn gốc tọa độ của  $x_1, x_2$  tại vị trí hai lò xo không bị biến dạng. Kéo hai chất điểm  $m_1, m_2$  lệch ra khỏi vị trí cân bằng các đoạn tương ứng là  $X_1, X_2$  rồi buông nhẹ không vận tốc đầu. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ chất điểm  $m_1, m_2$ .



17

## BÀI TOÁN ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM (12)

### 1) Mô tả chuyển động: HQC

### 2) Áp dụng các định luật vật lý thiết lập EOM (Equation of Motion)

- Newton laws: → FBD (Free Body Diagrams)
  - Biểu diễn các lực đã biết theo hướng mà nó tác dụng
  - Giả sử chiều dương của chuyển động (vị trí, vận tốc)
  - Biểu diễn vector và độ lớn của các lực phụ thuộc theo vị trí, vận tốc (nhớ quy ước dấu)
  - Viết phương trình vi phân chuyển động

### ▪ Các định lý tổng quát động lực học

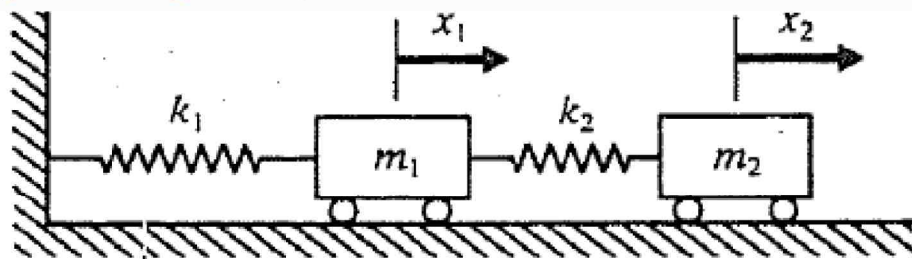
▪ ....

### 3) Áp dụng toán học để giải EOM

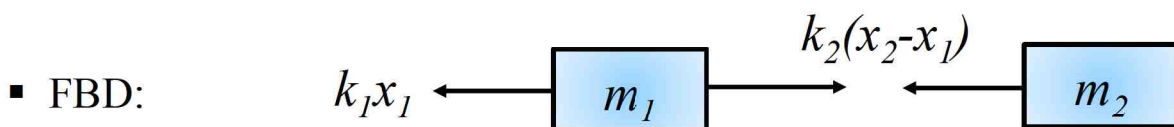
18

## ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM (13)

### 1) Mô tả chuyển động - HQC



### 2) Áp dụng the 2<sup>nd</sup> Newton law of motion



▪ EOM:  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\begin{cases} -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) = m_1\ddot{x}_1 \\ -k_2(x_2 - x_1) = m_2\ddot{x}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0 \end{cases}$$

➤ Để tránh nhầm lẫn dấu → Nên cho các li độ dương

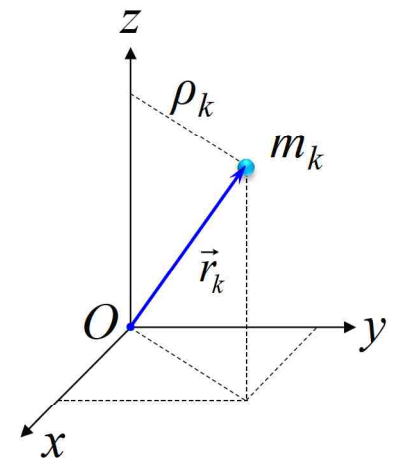
19

# CÁC ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA CƠ HỆ VÀ VẬT RẮN

## I. Khối tâm của cơ hệ

## II. Moment quán tính

- Moment quán tính của vật rắn đối với 1 trục
- Moment quán tính tích
- Moment quán tính của vật rắn đối với điểm  $O$
- Bán kính quán tính của vật rắn đối với trục  $z$
- Trục quán tính chính
- Trục quán tính chính trung tâm

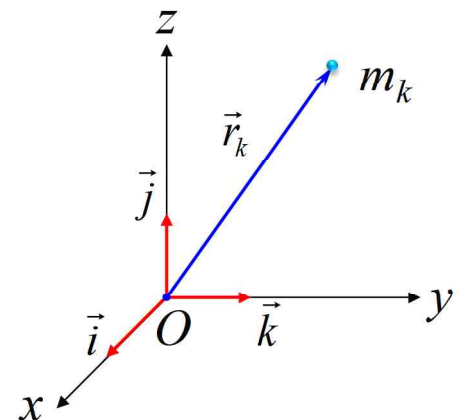


23

# CÁC ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA CƠ HỆ VÀ VẬT RẮN

## I. Khối tâm của cơ hệ

| Chất điểm | Khối lượng | Vị trí |
|-----------|------------|--------|
| $M_1$     | $m_1$      | $r_1$  |
| $M_2$     | $m_2$      | $r_2$  |
| ...       | ...        | ...    |
| $M_N$     | $m_N$      | $r_N$  |



Vị trí khối tâm của cơ hệ:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k}{M}, \text{ trong đó } M = \sum_{k=1}^N m_k \text{ là khối lượng của cơ hệ.}$$

Hay:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^N m_k x_k}{M}; \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^N m_k y_k}{M}; \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^N m_k z_k}{M}$$

24

# CÁC ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA CƠ HỆ VÀ VẬT RẮN

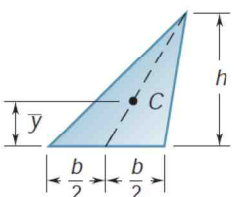
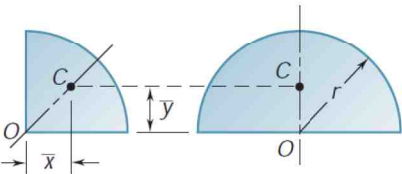
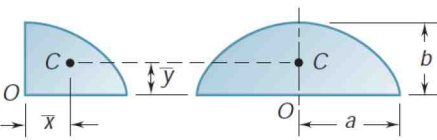
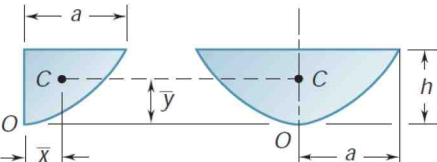
## I. Khối tâm của cơ hệ

|             | Vận tốc của khối tâm                                                                                                                                                                                            | Gia tốc của khối tâm                                                                                                                                                                                                  |
|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Dạng vector | $\vec{V}_C = \dot{\vec{r}}_C = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \dot{\vec{r}}_k}{M}$                                                                                                                                      | $\vec{a}_C = \ddot{\vec{r}}_C = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \ddot{\vec{r}}_k}{M}$                                                                                                                                          |
| Dạng đại số | $\begin{cases} V_{Cx} = \dot{x}_C = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \dot{x}_k}{M} \\ V_{Cy} = \dot{y}_C = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \dot{y}_k}{M} \\ V_{Cz} = \dot{z}_C = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \dot{z}_k}{M} \end{cases}$ | $\begin{cases} a_{Cx} = \ddot{x}_C = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \ddot{x}_k}{M} \\ a_{Cy} = \ddot{y}_C = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \ddot{y}_k}{M} \\ a_{Cz} = \ddot{z}_C = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \ddot{z}_k}{M} \end{cases}$ |

25

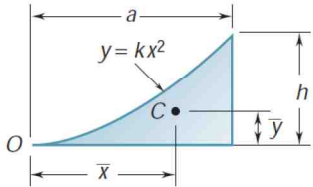
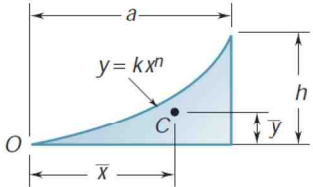
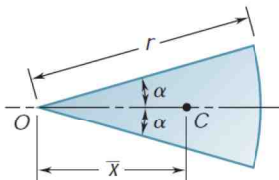
## I. KHỐI TÂM CỦA VẬT RẮN (1)

❑ Khối tâm C của một số tám đồng chất

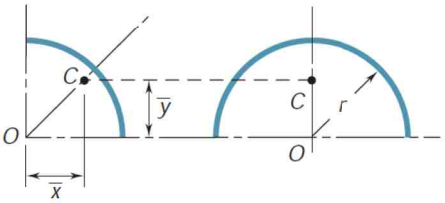
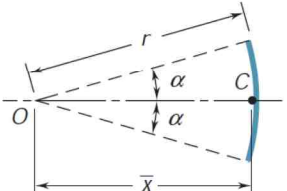
| Shape                   |                                                                                     | $\bar{x}$         | $\bar{y}$         | Area                |
|-------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|-------------------|---------------------|
| Triangular area         |  |                   | $\frac{h}{3}$     | $\frac{bh}{2}$      |
| Quarter-circular area   |  | $\frac{4r}{3\pi}$ | $\frac{4r}{3\pi}$ | $\frac{\pi r^2}{4}$ |
| Semicircular area       |                                                                                     | 0                 | $\frac{4r}{3\pi}$ | $\frac{\pi r^2}{2}$ |
| Quarter-elliptical area |  | $\frac{4a}{3\pi}$ | $\frac{4b}{3\pi}$ | $\frac{\pi ab}{4}$  |
| Semielliptical area     |                                                                                     | 0                 | $\frac{4b}{3\pi}$ | $\frac{\pi ab}{2}$  |
| Semiparabolic area      |  | $\frac{3a}{8}$    | $\frac{3h}{5}$    | $\frac{2ah}{3}$     |
| Parabolic area          |                                                                                     | 0                 | $\frac{3h}{5}$    | $\frac{4ah}{3}$     |

# I. KHỐI TÂM CỦA VẬT RẮN (2)

❑ Khối tâm  $C$  của một số tấm đồng chất

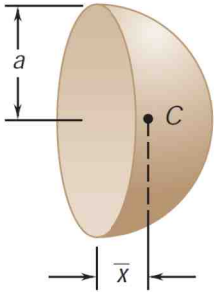
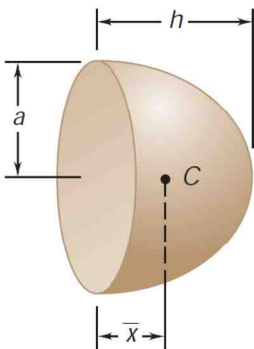
| Shape              |                                                                                   | $\bar{x}$                        | $\bar{y}$           | Area             |
|--------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|---------------------|------------------|
| Parabolic spandrel |  | $\frac{3a}{4}$                   | $\frac{3h}{10}$     | $\frac{ah}{3}$   |
| General spandrel   |  | $\frac{n+1}{n+2}a$               | $\frac{n+1}{4n+2}h$ | $\frac{ah}{n+1}$ |
| Circular sector    |  | $\frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$ | 0                   | $\alpha r^2$     |

# I. KHỐI TÂM CỦA VẬT RẮN (3)

| Shape                |                                                                                     | $\bar{x}$                      | $\bar{y}$        | Length            |
|----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|------------------|-------------------|
| Quarter-circular arc |  | $\frac{2r}{\pi}$               | $\frac{2r}{\pi}$ | $\frac{\pi r}{2}$ |
| Semicircular arc     |                                                                                     | 0                              | $\frac{2r}{\pi}$ | $\pi r$           |
| Arc of circle        |  | $\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$ | 0                | $2\alpha r$       |

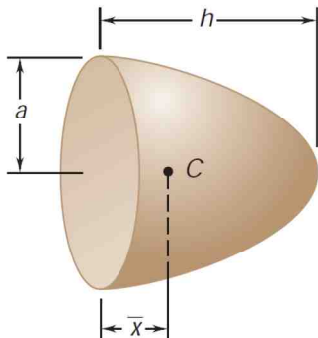
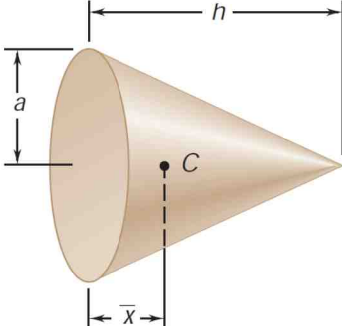
# I. KHỐI TÂM CỦA VẬT RẮN (4)

## ❑ Khối tâm $C$ của một số vật rắn đồng chất

| Shape                       |                                                                                   | $\bar{x}$      | Volume                 |
|-----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------|------------------------|
| Hemisphere                  |  | $\frac{3a}{8}$ | $\frac{2}{3}\pi a^3$   |
| Semiellipsoid of revolution |  | $\frac{3h}{8}$ | $\frac{2}{3}\pi a^2 h$ |

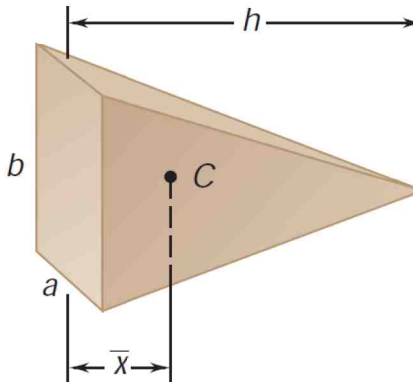
# I. KHỐI TÂM CỦA VẬT RẮN (5)

## ❑ Khối tâm $C$ của một số vật rắn đồng chất

| Shape                    |                                                                                      | $\bar{x}$     | Volume                 |
|--------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------|------------------------|
| Paraboloid of revolution |   | $\frac{h}{3}$ | $\frac{1}{2}\pi a^2 h$ |
| Cone                     |  | $\frac{h}{4}$ | $\frac{1}{3}\pi a^2 h$ |

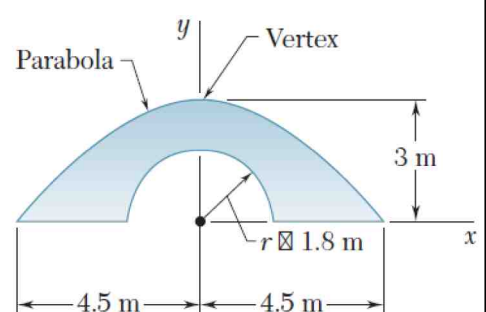
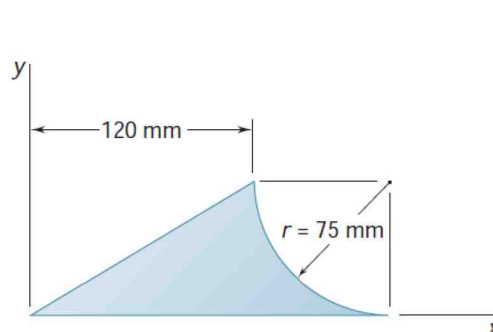
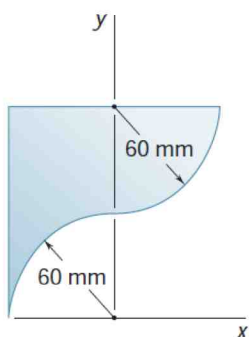
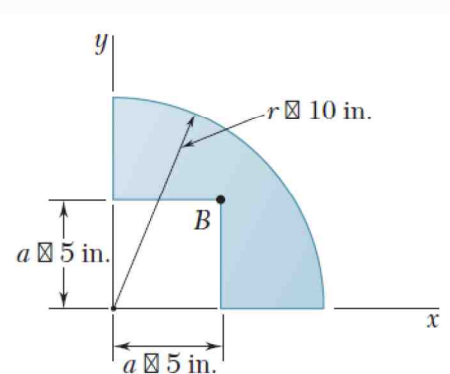
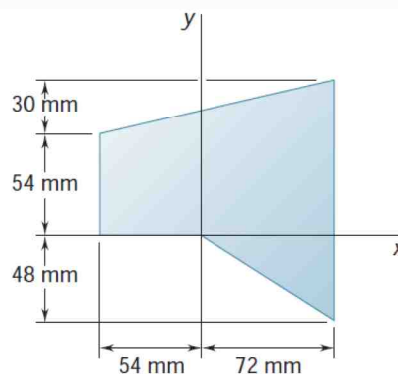
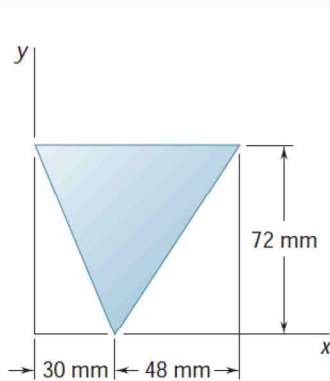
# I. KHỐI TÂM CỦA VẬT RẮN (6)

❑ Khối tâm  $C$  của một số vật rắn đồng chất

| Shape   |                                                                                    | $\bar{x}$     | Volume           |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------|---------------|------------------|
| Pyramid |  | $\frac{h}{4}$ | $\frac{1}{3}abh$ |

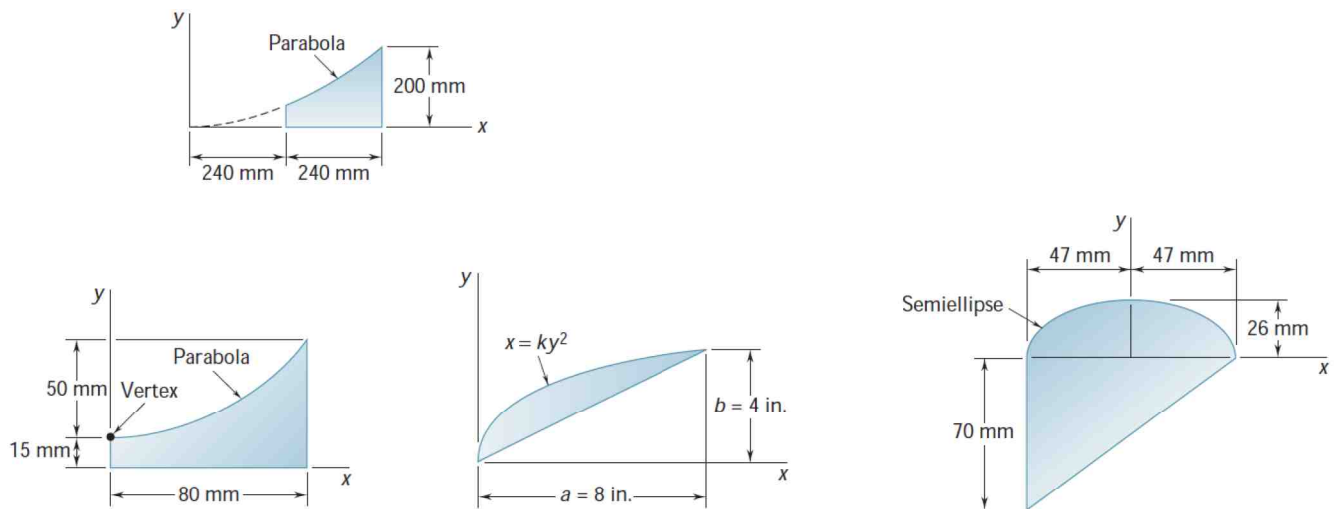
# I. KHỐI TÂM CỦA VẬT RẮN (7)

**VD:** Xác định khối tâm của các tấm phẳng đồng chất sau:



# I. KHỐI TÂM CỦA VẬT RẮN (8)

**VD:** Xác định khối tâm của các tấm phẳng đồng chất sau:

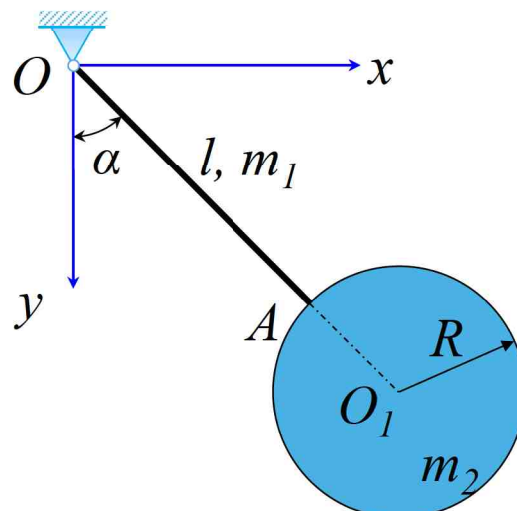


F. Beer, E. R. Johnston Jr., D. Mazurek, *Vector of Mechanics for Engineers, Statics & Dynamics*, McGraw-Hill, 2013

33

## VÍ DỤ

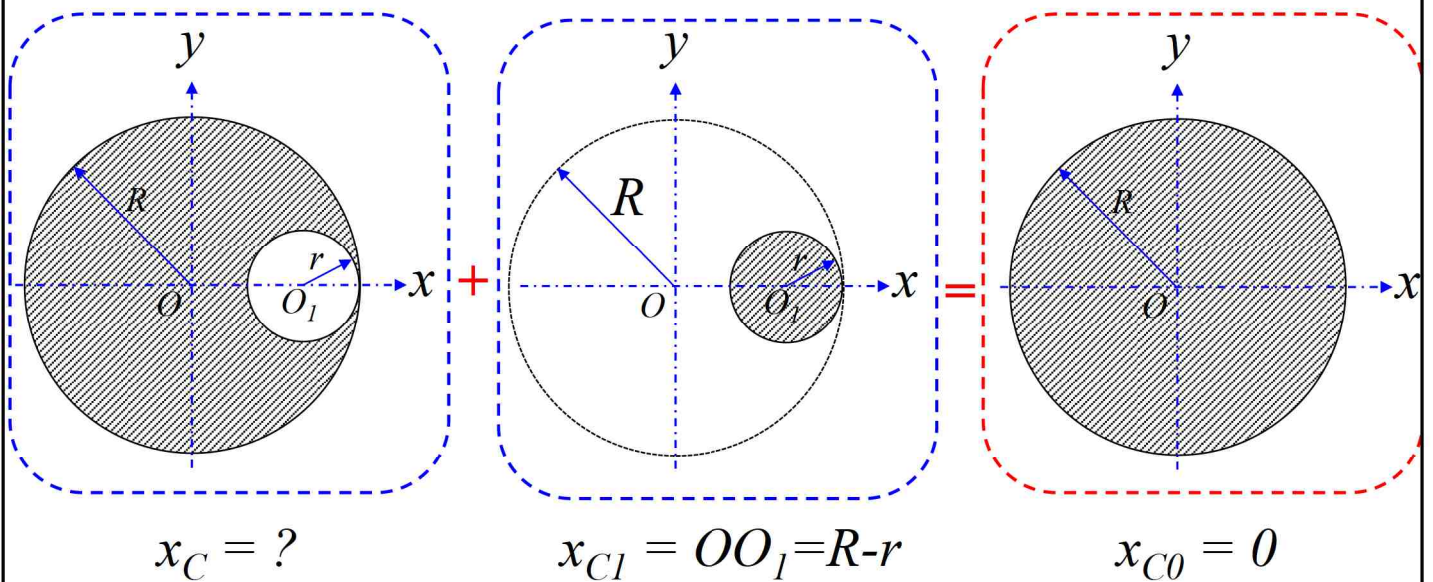
**VD1:** Thanh thẳng mảnh  $OA$  đồng chất khối lượng phân bố đều, chiều dài  $l$ , khối lượng  $m_1$ . Đĩa  $O_1$  đồng chất, khối lượng phân bố đều, bán kính  $R$  và khối lượng  $m_2$ . Đường kéo dài của  $OA$  đi qua  $O_1$ . Xác định khối tâm của cơ hệ đối với hệ trục  $Oxy$  như hình vẽ.



34

## VÍ DỤ

**VD2:** Xác định khối tâm của đĩa tròn đồng chất có khối lượng riêng là  $\rho$ . Đĩa bị khoét 1 lỗ tròn như hình vẽ. Biết khối lượng phân bố đều và kích thước như hình vẽ.



35

## CÁC ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA CƠ HỆ VÀ VẬT RẮN

### II. Moment quán tính của vật rắn đối với 1 trục (1)

- Moment quán tính của vật rắn đối với trục  $z$  là đại lượng vô hướng được xác định bởi:

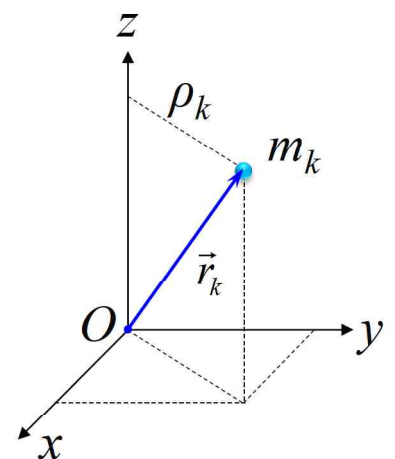
$$J_z = \sum_{k=1}^N m_k \rho_k^2$$

Trong đó,  $\rho_k$  là khoảng cách từ chất điểm  $M_k$  có khối lượng  $m_k$  đến trục  $z$ .

- Trong hệ tọa độ  $Oxyz$ :

$$J_z = \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2); \quad J_x = \sum_{k=1}^N m_k (y_k^2 + z_k^2); \quad J_y = \sum_{k=1}^N m_k (z_k^2 + x_k^2)$$

Trong đó  $(x_k, y_k, z_k)$  là tọa độ của chất điểm  $M_k$ .

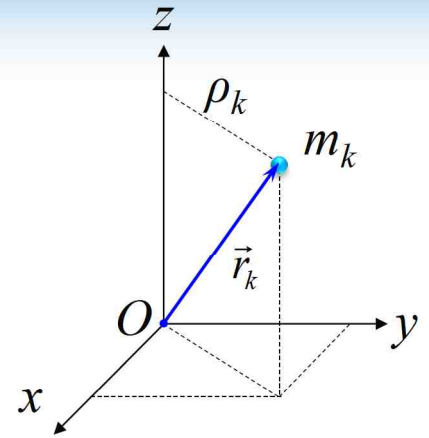


36

## II. MOMENT QUÁN TÍNH CỦA VẬT RẮN ĐỐI VỚI 1 TRỤC (2)

- Moment quán tính tích:

$$\begin{aligned} J_{xy} &= J_{yx} = \sum_{k=1}^N m_k x_k y_k; \\ J_{yz} &= J_{zy} = \sum_{k=1}^N m_k y_k z_k; \\ J_{zx} &= J_{xz} = \sum_{k=1}^N m_k z_k x_k; \end{aligned}$$



- Moment quán tính của vật rắn đối với điểm O:

$$J_O = \sum_{k=1}^N m_k r_k^2 = \frac{1}{2} (J_x + J_y + J_z)$$

- Bán kính quán tính của vật rắn đối với trục z:

$$\rho_z^2 = \frac{J_z}{M} \quad \begin{cases} J: \text{ kg.m}^2 \\ \rho: \text{ m} \end{cases}$$

37

## II. MOMENT QUÁN TÍNH CỦA VẬT RẮN ĐỐI VỚI 1 TRỤC (3)

- *Trục quán tính chính*: Trục Oz được gọi là **trục quán tính chính tại O** nếu thỏa mãn các điều kiện:  $J_{yz} = J_{zx} = 0$ .
  - Tại mỗi điểm của vật rắn tồn tại 3 *trục quán tính chính* vuông góc nhau.
  - Nếu 2 trục là quán tính chính tại O thì trục thứ 3 vuông góc với chúng cũng là trục quán tính chính
- *Trục quán tính chính trung tâm*: Là trục quán tính chính đi qua khối tâm của cơ hệ.

39

## II. MOMENT QUÁN TÍNH CỦA VẬT RẮN ĐỐI VỚI 1 TRỤC (4)

### Một số định lý:

**Định lý 1:** *Trục quán tính chính* của vật rắn tại điểm  $O$ , không đi qua khối tâm của vật chỉ là **trục quán tính chính của vật tại điểm  $O$** .

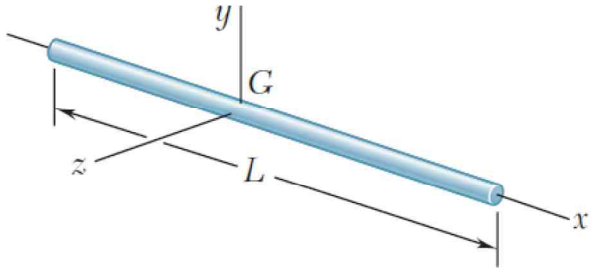
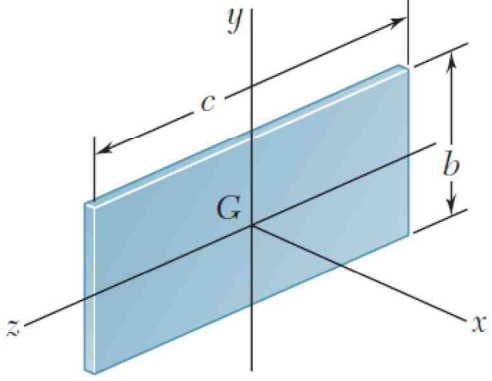
**Định lý 2:** *Trục quán tính chính trung tâm* của vật là *trục quán tính chính* đối với mọi điểm thuộc trục ấy.

**Định lý 3:** Nếu một vật rắn đồng chất có một *trục đối xứng* thì trục đó là *trục quán tính chính trung tâm*.

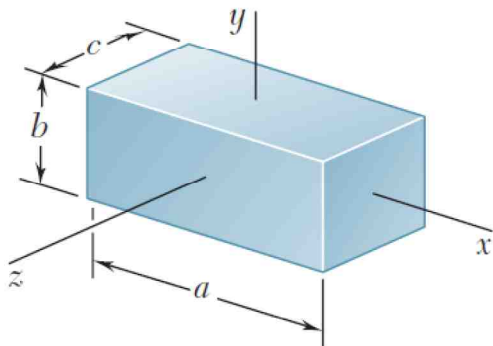
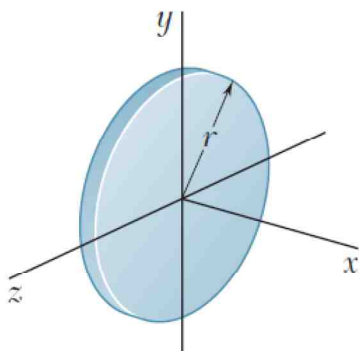
**Định lý 4:** Nếu một vật rắn đồng chất có một *mặt phẳng đối xứng* thì trục thẳng góc với mặt phẳng đối xứng là *trục quán tính chính tại giao điểm của mặt phẳng đối xứng và trục*.

40

## II. MOMENT QUÁN TÍNH CỦA VẬT RẮN ĐỐI VỚI 1 TRỤC (5)

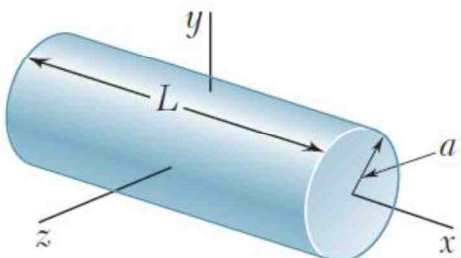
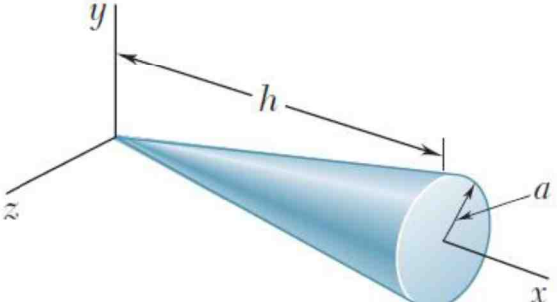
|                                                                                                              |                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| Slender rod<br>$I_y = I_z = \frac{1}{12}mL^2$                                                                |  |
| Thin rectangular plate<br>$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}mc^2$ $I_z = \frac{1}{12}mb^2$ |  |

## II. MOMENT QUÁN TÍNH CỦA VẬT RẮN ĐỐI VỚI 1 TRỤC (5)

|                                                                                                                             |                                                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Rectangular prism</p> $I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$ |  |
| <p>Thin disk</p> $I_x = \frac{1}{2}mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4}mr^2$                                                      |  |

F. Beer, E. R. Johnston Jr., D. Mazurek, *Vector of Mechanics for Engineers, Statics & Dynamics*, McGraw-Hill, 2013, 42

## II. MOMENT QUÁN TÍNH CỦA VẬT RẮN ĐỐI VỚI 1 TRỤC (6)

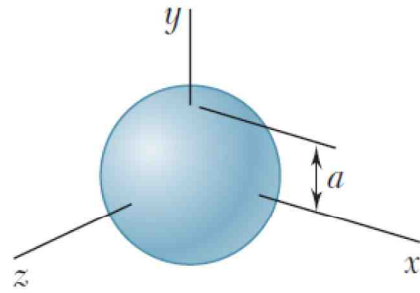
|                                                                                                |                                                                                      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Circular cylinder</p> $I_x = \frac{1}{2}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$       |  |
| <p>Circular cone</p> $I_x = \frac{3}{10}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5}m(\frac{1}{4}a^2 + h^2)$ |  |

F. Beer, E. R. Johnston Jr., D. Mazurek, *Vector of Mechanics for Engineers, Statics & Dynamics*, McGraw-Hill, 2013, 43

## II. MOMENT QUÁN TÍNH CỦA VẬT RẮN ĐỐI VỚI 1 TRỤC (7)

Sphere

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}ma^2$$

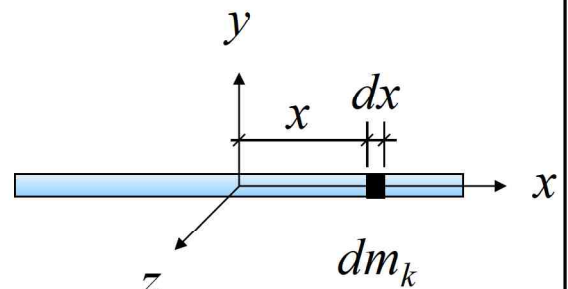


$$J_z = \sum_{k=1}^N m_k \rho_k^2$$

$$dm_k = \frac{m}{L} dx$$

$$\rho_k = x$$

$$J_z = \int_{-L/2}^{L/2} dm_k \rho_k^2 = \frac{m}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{1}{12} mL^2$$



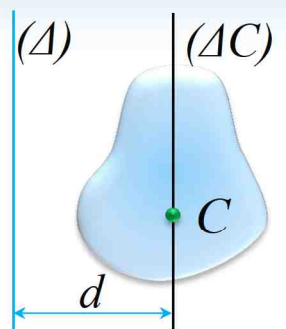
F. Beer, E. R. Johnston Jr., D. Mazurek, *Vector of Mechanics for Engineers, Statics & Dynamics*, McGraw-Hill, 2013, 44

## II. MOMENT QUÁN TÍNH CỦA VẬT RẮN ĐỐI VỚI 1 TRỤC (8)

- Định lý dời trục song song:

$$J_{\Delta} = J_{\Delta C} + Md^2$$

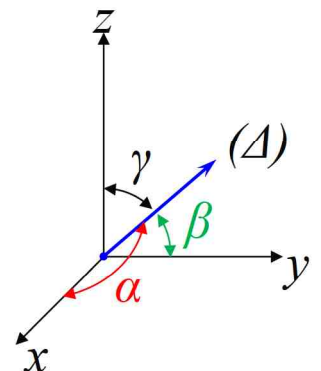
- Lưu ý:** Trục  $\Delta C$  phải đi qua khối tâm  $C$



**Nhận xét:** Đối với các trục cùng phương, moment quán tính của vật rắn đối với trục qua khối tâm có giá trị nhỏ nhất.

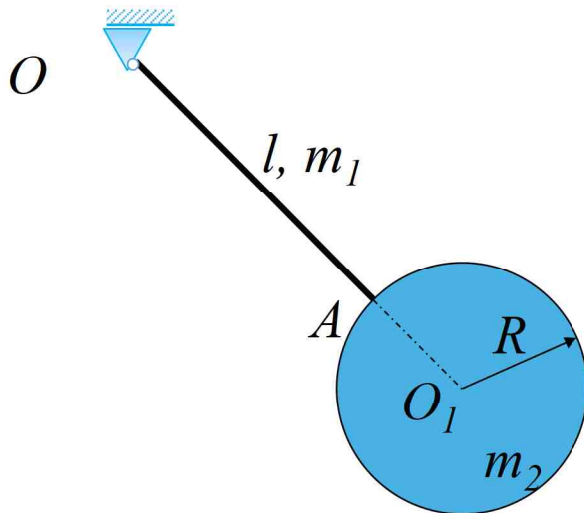
- Định lý xoay trục:

$$J_{\Delta} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{xz} \cos \gamma \cos \alpha$$



## VÍ DỤ

**VD1:** Thanh  $OA$  đồng chất khối lượng phân bố đều, chiều dài  $l$ , khối lượng  $m_1$ . Đĩa  $O_1$  đồng chất, khối lượng phân bố đều, bán kính  $R$  và khối lượng  $m_2$ . Xác định moment quán tính của cơ hệ đối với trục quay tại khớp bản lề  $O$ .



$$J_O = J_{OA/O} + J_{O_1/O}$$

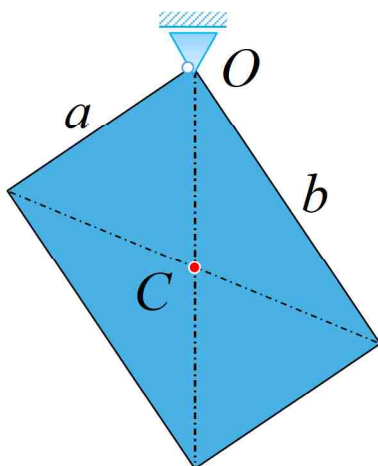
$$J_{OA/O} = J_{OA/C_1} + m_1(OC_1)^2$$

$$J_{O_1/O} = J_{O_1/O_1} + m_2(OO_1)^2$$

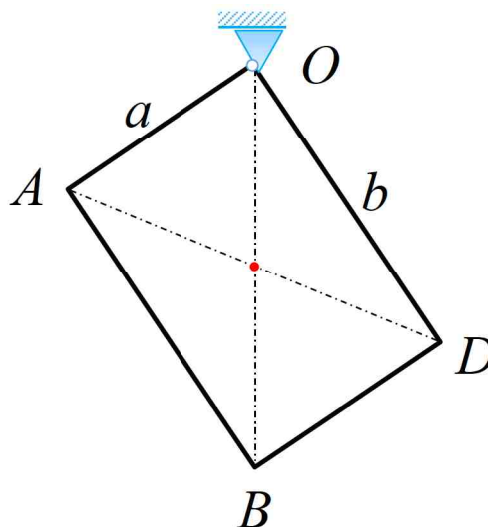
46

## VÍ DỤ

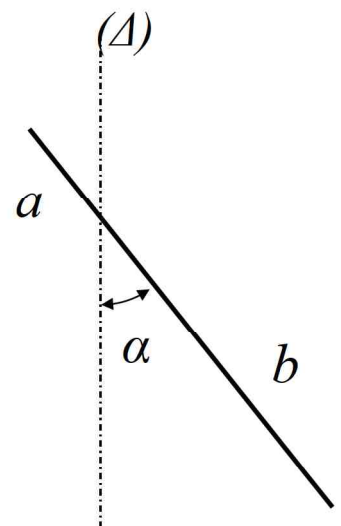
**VD2:** Xác định moment quán tính của vật rắn: (a&b) quanh trục qua  $O$  và vuông góc với mp hình vẽ; (c) quanh trục  $\Delta$ .



(a)



(b)



(c)

47

## VÍ DỤ

(a) Nhận xét:

- $C$  là vị trí khối tâm của tấm phẳng mỏng hình chữ nhật (khối lượng của cả tấm là  $m$ )
- Sử dụng định lý dời trục song song:

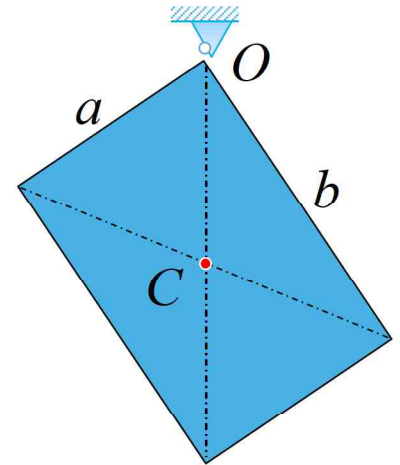
$$J_O = J_C + m(CO)^2$$

$$\bullet J_C = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$$

$$\bullet OC^2 = \left[ \left( \frac{a}{2} \right)^2 + \left( \frac{b}{2} \right)^2 \right] = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow J_O = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2) + m \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow J_O = \frac{1}{3}m(a^2 + b^2)$$



48

## VÍ DỤ

(b) Nhận xét:

- $C_1, C_2, C_3$  lần lượt là vị trí **khối tâm của các thanh**  $OA, AB, BD$  (khối lượng của cả khung hình chữ nhật là  $m$ , phân bố đều)

- Theo định nghĩa:

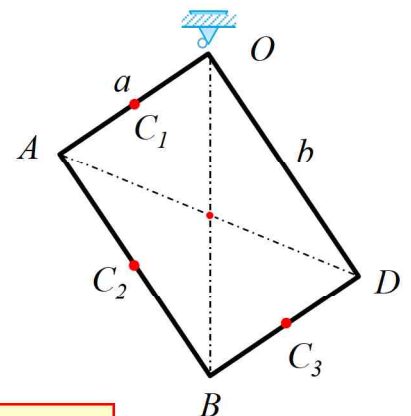
$$J_O = J_{OA/O} + J_{AB/O} + J_{BD/O} + J_{OD/O}$$

- Sử dụng định lý dời trục song song:

$$\bullet J_{OA/O} = J_{OA/C_1} + m_{OA}(OC_1)^2$$

$$= \frac{1}{12}m_{OA}a^2 + m_{OA}\left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow J_{OA/O} = \frac{1}{3}m_{OA}a^2$$

$$\bullet J_{OD/O} = \frac{1}{3}m_{OD}b^2$$



49

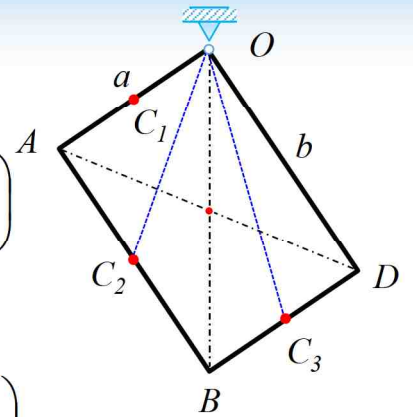
## VÍ DỤ

### ■ Sử dụng định lý dời trục song song (tt):

$$\begin{aligned} \bullet J_{AB/O} &= J_{AB/C_2} + m_{AB}(OC_2)^2 \\ &= \frac{1}{12} m_{AB} b^2 + m_{AB} \left[ a^2 + \left( \frac{b}{2} \right)^2 \right] = m_{AB} \left( \frac{1}{3} b^2 + a^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet J_{BD/O} &= J_{BD/C_3} + m_{BD}(OC_3)^2 \\ &= \frac{1}{12} m_{BD} a^2 + m_{BD} \left[ \left( \frac{a}{2} \right)^2 + b^2 \right] = m_{BD} \left( \frac{1}{3} a^2 + b^2 \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J_O = \frac{1}{3} m_{OA} a^2 + m_{AB} \left( \frac{1}{3} b^2 + a^2 \right) + m_{BD} \left( \frac{1}{3} a^2 + b^2 \right) + \frac{1}{3} m_{OD} b^2$$



### ■ Khối lượng phân bố đều

$$\Rightarrow m_{OA} = m_{BD} = \frac{a}{2(a+b)} m; \quad m_{AB} = m_{OD} = \frac{b}{2(a+b)} m \Rightarrow J_O = \dots$$

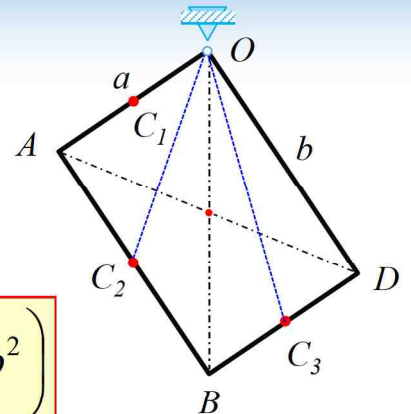
50

## VÍ DỤ

### ■ Sử dụng định lý dời trục song song (tt):

$$\begin{aligned} \bullet J_{AB/O} &= J_{AB/C_2} + m_{AB}(OC_2)^2 \\ &= \frac{1}{12} m_{AB} b^2 + m_{AB} \left[ a^2 + \left( \frac{b}{2} \right)^2 \right] \\ &= m_{AB} \left( \frac{1}{3} b^2 + a^2 \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J_{AB/O} = m_{AB} \left( a^2 + \frac{1}{3} b^2 \right)$$



### Ⓢ “DỄ THẤY”:

$$J_{AB/O} = m_{AB} \left( a^2 + \frac{1}{3} b^2 \right) = \frac{1}{3} m_{AB} b^2 + m_{AB} a^2 = J_{AB/A} + m_{AB} (OA)^2 \Rightarrow J_{AB/O} = J_{AB/A} + m_{AB} (OA)^2$$

**VẬY trục lấy moment quán tính bên vế phải trong công thức dời trục song song (trục  $\Delta C$ ) không cần phải đi qua khối tâm của thanh???**

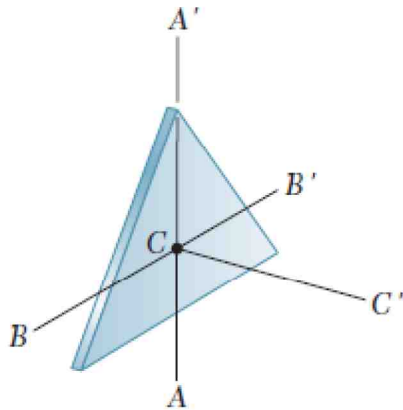
**Đây chỉ là trường hợp đặc biệt !!!**



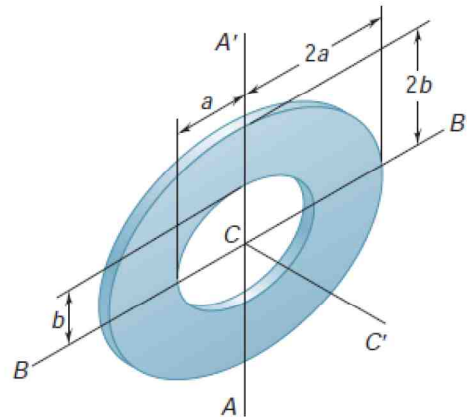
51

## VÍ DỤ

**VD3:** Tấm mỏng hình tam giác đều cạnh  $a$  như hình vẽ có khối lượng  $m$ . Xác định moment quán tính (khối lượng) của nó đối với trục: (a)  $AA'$  và  $BB'$ ; (b)  $CC'$



**VD4:** Một tấm mỏng có khối lượng  $m$  hình nhẫn elipse như hình vẽ, tấm có khối lượng phân bố đều. Xác định moment quán tính khối lượng của tấm đối với trục: (a)  $BB'$ ; (b)  $CC'$

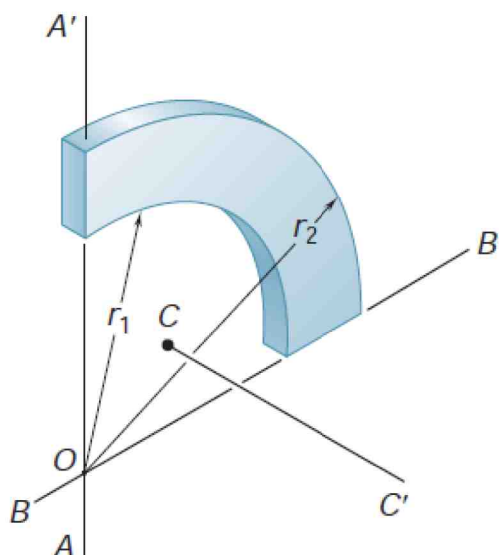


F. Beer, E. R. Johnston Jr., D. Mazurek, *Vector of Mechanics for Engineers, Statics & Dynamics*, McGraw-Hill, 2013, 52

## VÍ DỤ

**VD5:**

The quarter ring shown has a mass  $m$  and was cut from a thin, uniform plate. Knowing that  $r_1 = \frac{3}{4}r_2$ , determine the mass moment of inertia of the quarter ring with respect to (a) the axis  $AA'$ , (b) the centroidal axis  $CC'$  that is perpendicular to the plane of the quarter ring.



F. Beer, E. R. Johnston Jr., D. Mazurek, *Vector of Mechanics for Engineers, Statics & Dynamics*, McGraw-Hill, 2013, 53

## VÍ DỤ

### VD 6-7:

The machine part shown is formed by machining a conical surface into a circular cylinder. For  $b = \frac{1}{2}h$ , determine the mass moment of inertia and the radius of gyration of the machine part with respect to the  $y$  axis.

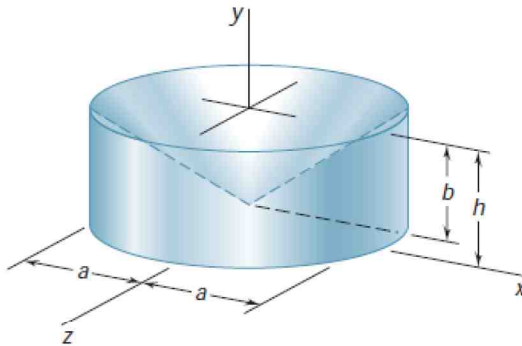


Fig. P9.129

Given the dimensions and the mass  $m$  of the thin conical shell shown, determine the mass moment of inertia and the radius of gyration of the shell with respect to the  $x$  axis. (Hint: Assume that the shell was formed by removing a cone with a circular base of radius  $a$  from a cone with a circular base of radius  $a + t$ , where  $t$  is the thickness of the wall. In the resulting expressions, neglect terms containing  $t^2$ ,  $t^3$ , etc. Do not forget to account for the difference in the heights of the two cones.)

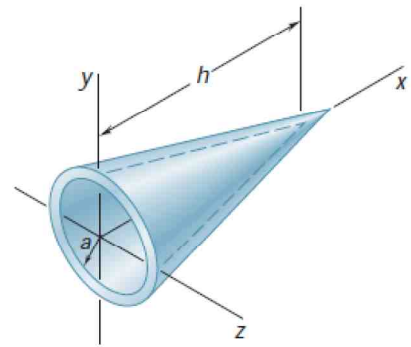
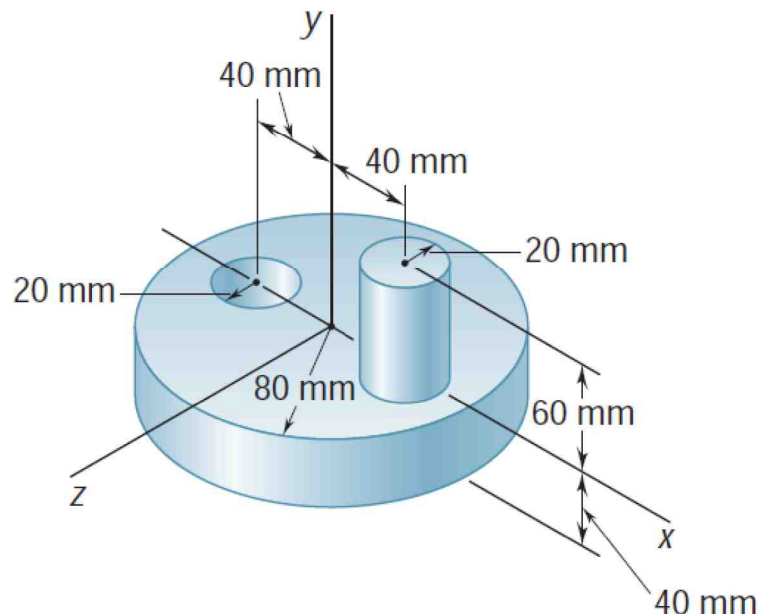


Fig. P9.130

F. Beer, E. R. Johnston Jr., D. Mazurek, *Vector of Mechanics for Engineers, Statics & Dynamics*, McGraw-Hill, 2013, 54

## VÍ DỤ

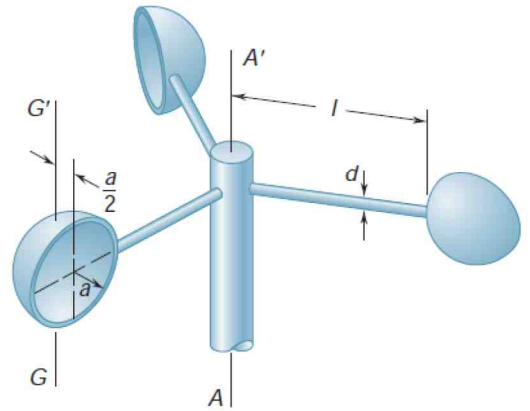
**VD 8:** Một chi tiết máy như hình vẽ được làm bằng thép ( $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ ). Xác định moment quán tính khối lượng của chi tiết đối với trục: (a)  $x$ ; (b)  $y$ ; (c)  $z$



F. Beer, E. R. Johnston Jr., D. Mazurek, *Vector of Mechanics for Engineers, Statics & Dynamics*, McGraw-Hill, 2013, 55

## VÍ DỤ

**VD 9:** Các chén và tay đòn của thiết bị máy đo gió hình chén được mô tả như hình vẽ được làm bằng vật liệu có khối lượng riêng  $\rho$ . Biết moment quán tính khối lượng của chén mỏng (bề dày  $t$ )  $\frac{1}{2}$  hình cầu khối lượng  $m$  đối với trục quán tính chính GG' là  $5ma^2/12$ .



(a) Xác định moment quán tính khối lượng của thiết bị đối với trục  $AA'$ ; (b) Xác định tỉ số  $a/l$  để moment quán tính chính của các chén bằng 1% moment quán tính của chúng đối với trục quay  $AA'$ . (3 thanh mảnh hình trụ tròn, đường kính  $d$ , dài  $l$ )

*Thiết bị máy đo gió hình chén được phát minh bởi Ts. John Thomas Romney Robinson (1792-1882), nhà thiên văn, nhà vật lý người Ireland.*

F. Beer, E. R. Johnston Jr., D. Mazurek, *Vector of Mechanics for Engineers, Statics & Dynamics*, McGraw-Hill, 2013.<sup>56</sup>

## CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT ĐỘNG LỰC HỌC

## I. Định lý chuyển động của khối tâm

Khối tâm của cơ hệ chuyển động như một chất điểm mang khối lượng của toàn hệ chịu tác dụng của vector chính ngoại lực tác dụng lên hệ.

## II. Định lý biến thiên động lượng

Đạo hàm theo thời gian vector động lượng  $\mathbf{Q}$  của cơ hệ bằng vector chính của ngoại lực tác dụng lên hệ

### III. Định lý biến thiên moment động lượng

*Đạo hàm theo thời gian moment động lượng của cơ hệ đối với một tâm (trục) bằng moment chính của ngoại lực tác dụng lên cơ hệ đối với tâm (trục) đó.*

#### IV. Định lý động năng

*Đạo hàm động năng của cơ hệ bằng tổng công suất ngoại và nội lực đặt vào cơ hệ.*

# I. ĐỊNH LÝ CHUYỂN ĐỘNG CỦA KHỐI TÂM (1)

## Định lý:

Khối tâm của cơ hệ chuyển động như một chất điểm mang khối lượng của toàn hệ chịu tác dụng của vector chính ngoại lực tác dụng lên hệ.

$$M\vec{W}_C = \sum \vec{F}_k^e$$

- $W_C$  : Gia tốc của khối tâm  $C$  của hệ
- $M$  : Khối lượng của toàn hệ
- $F_k^e$  : **Ngoại lực** thứ  $k$  tác dụng lên cơ hệ

▪ Trường hợp  $\sum \vec{F}_k^e = 0 \rightarrow \vec{W}_C = 0 \rightarrow \vec{V}_C = \text{const}$

*Tổng ngoại lực tác dụng lên hệ bằng 0 thì khối tâm của hệ đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều.*

58

# I. ĐỊNH LÝ CHUYỂN ĐỘNG CỦA KHỐI TÂM (2)

▪ Trường hợp  $\sum \vec{F}_{kx}^e = 0$

$$M\vec{W}_C = \sum \vec{F}_k^e \rightarrow M\vec{W}_{Cx} = \sum \vec{F}_{kx}^e = 0 \rightarrow \vec{V}_{Cx} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k \vec{V}_{kx} = \text{const}$$

→ Theo phương  $x$ , khối tâm  $C$  của hệ đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều; nếu ban đầu khối tâm đứng yên  $V_{Cx}(t=0) = 0$ :

$$\Rightarrow \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k x_k(t) = \text{const}_1 = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k x_k(0)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^N m_k (x_k(t) - x_k(0)) = 0 \quad \text{hay} \quad \sum_{k=1}^N m_k \xi_k = 0$$

- $x_k(t)$ ,  $x_k(0)$  tương ứng là tọa độ  $x$  của chất điểm (hoặc trọng tâm của vật) thứ  $k$  tại thời điểm  $t$  bất kỳ và thời điểm  $t = 0$ .
- $\xi_k$  là độ dịch chuyển tuyệt đối của chất điểm (hoặc trọng tâm của vật) thứ  $k$  theo trục  $x$ .

59

## VD – ĐỊNH LÝ CHUYỂN ĐỘNG CỦA KHỐI TÂM (3)

### Bài toán:

**Bài toán 1:** Biết dịch chuyển của một số vật rắn thuộc cơ hệ, tìm dịch chuyển của các vật rắn còn lại

(Cơ lý thuyết: VD 12.1; Cơ học: 2.9,

**Bài toán 2:** Biết các lực tác dụng lên cơ hệ, tìm phương trình vi phân chuyển động của khối tâm

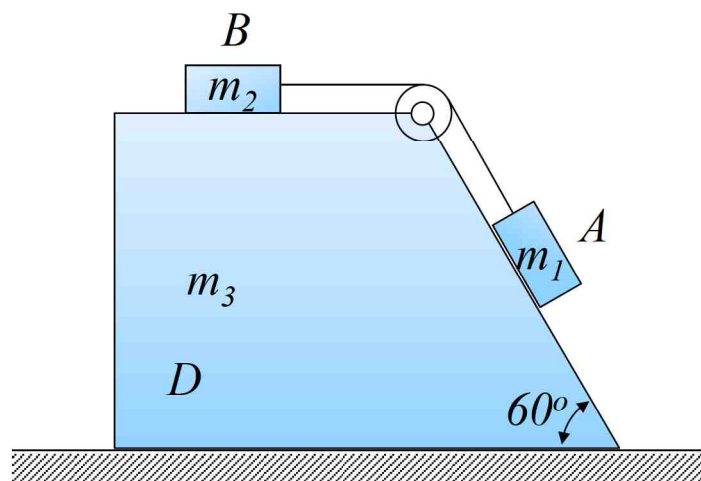
**Bài toán 3:** Biết chuyển động của khối tâm, xác định lực (phản lực) tác dụng lên cơ hệ.

**Bài toán 4:** Bài toán tổng hợp

60

## VD – ĐỊNH LÝ CHUYỂN ĐỘNG CỦA KHỐI TÂM (1)

**VD 1:** Hai vật nặng  $A, B$  có khối lượng lần lượt là  $m_1, m_2$  nối với nhau bằng dây mềm khối lượng không đáng kể và không giãn như hình vẽ. Lăng trụ  $D$  tựa trên mặt sàn nằm ngang và nhẵn. Ban đầu cơ hệ đứng yên. Tìm di chuyển của lăng trụ  $D$  khi vật  $A$  trượt xuống theo mặt nghiêng 1 quãng đường  $s$ . <sup>[1]</sup>



61

## VD – ĐỊNH LÝ CHUYỂN ĐỘNG CỦA KHỐI TÂM (2)

Xét cơ hệ gồm 3 vật:  $m_1, m_2, m_3$ .

Ngoại lực tác dụng lên cơ hệ:  $P_1, P_2, P_3, N$

$\sum \vec{F}_{kx}^e = 0$ , ban đầu hệ đứng yên

$\rightarrow x_C$  của hệ không đổi.

$$m_1: \xi_{1x} = s \cos 60^\circ + \xi_{3x}$$

$$m_2: \xi_{2x} = s + \xi_{3x}$$

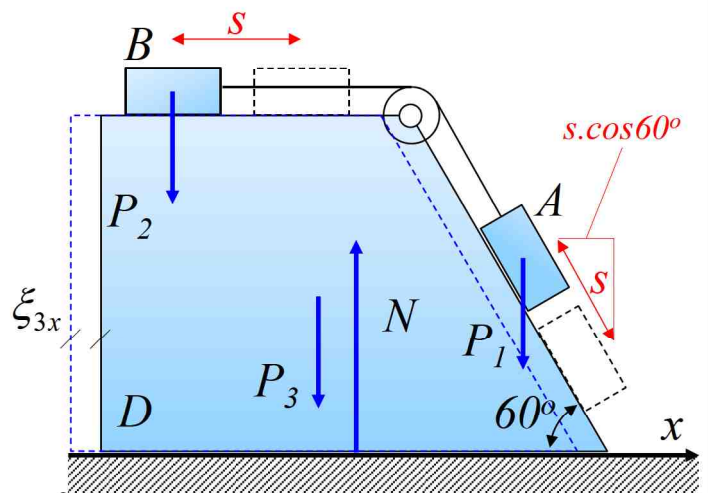
$$m_3: \xi_{3x}$$

$$\sum_{k=1}^3 m_k \xi_{kx} = 0$$

$$\Leftrightarrow m_1(s \cos 60^\circ + \xi_{3x}) + m_2(s + \xi_{3x}) + m_3 \xi_{3x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (m_1 + m_2 + m_3) \xi_{3x} = -(m_1 \cos 60^\circ + m_2)s$$

$$\Leftrightarrow \xi_{3x} = -\frac{m_1 \cos 60^\circ + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} s \rightarrow \text{Trái dấu với } s \rightarrow m_3 \text{ dịch sang trái}$$

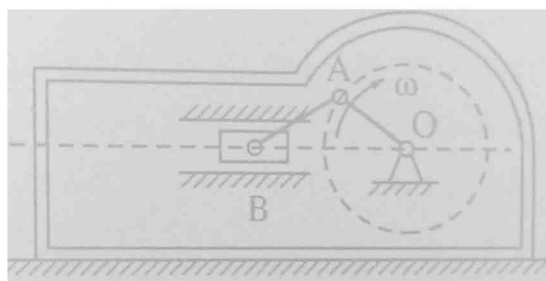


62

## VD – ĐỊNH LÝ CHUYỂN ĐỘNG CỦA KHỐI TÂM (3)

**VD 2:** Sàn nằm ngang nhẵn,  $A, B$  có khối lượng lần lượt là  $m_1, m_2$ .  $OA = AB = r$ , vỏ động cơ có khối lượng  $m_3$ . Biết tay quay  $OA$  quay đều quanh  $O$  với vận tốc góc  $\omega$ . Biết ban đầu hệ đứng yên và piston ở vị trí xa nhất về bên trái.

- Xác định chuyển động ngang của vỏ động cơ.
- Nếu động cơ được bắt vít chặt xuống nền, tìm áp lực của động cơ lên nền và lực cắt ngang của bulong, bỏ qua lực căng ban đầu của bulong.



63

## VD – ĐỊNH LÝ CHUYỂN ĐỘNG CỦA KHỐI TÂM (4)

### VD 2: Dạng bài toán 1 (câu a) và 3 (câu b)

Các ngoại lực tác động lên cơ hệ:  $P_1, P_2, P_3, N$ .

Gọi  $x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{C0}$  lần lượt là vị trí khối tâm của  $m_1, m_2, m_3$  và của cả hệ tại thời điểm  $t = 0$ .

Tại thời điểm  $t$ :

$$\varphi = \omega t$$

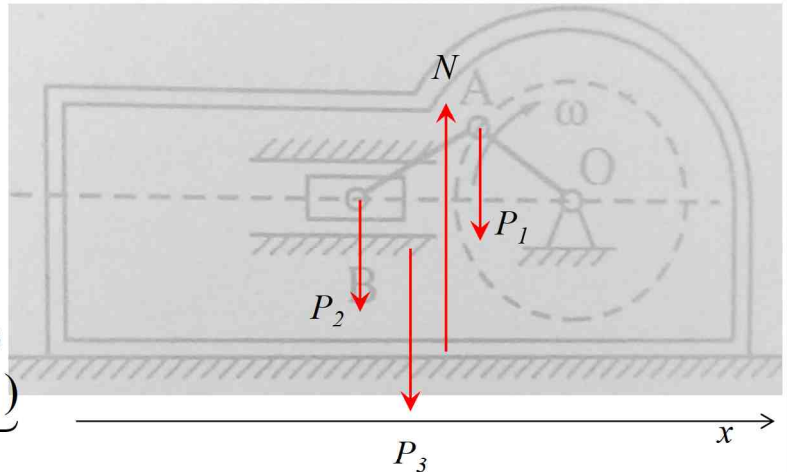
$$x_1 = x_{01} + r(1 - \cos \varphi) + \underbrace{(x_3 - x_{03})}_{\zeta_3}$$

$$\Rightarrow \zeta_1 = x_1 - x_{01} = r(1 - \cos \varphi) + \zeta_3$$

$$x_2 = x_{02} + 2r(1 - \cos \varphi) + \underbrace{(x_3 - x_{03})}_{\zeta_3}$$

$$\Rightarrow \zeta_2 = x_2 - x_{02} = 2r(1 - \cos \varphi) + \zeta_3$$

$$x_3 = x_{03} + \zeta_3 \Rightarrow \zeta_3 = x_3 - x_{03}$$



64

## VD – ĐỊNH LÝ CHUYỂN ĐỘNG CỦA KHỐI TÂM (5)

### VD 2: Dạng bài toán 1 (câu a) và 3 (câu b)

Tại thời điểm  $t$ :

$$\sum_{k=1}^N m_k \xi_k = 0$$

$$\Rightarrow m_1[r(1 - \cos \varphi) + \zeta_3] + m_2[2r(1 - \cos \varphi) + \zeta_3] + m_3 \zeta_3 = 0$$

$$\Rightarrow \zeta_3(m_1 + m_2 + m_3) = r(\cos \varphi - 1)(m_1 + 2m_2)$$

$$\Rightarrow \zeta_3 = \frac{r(m_1 + 2m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}(\cos \varphi - 1)$$

$$\Rightarrow \zeta_3 = \frac{r(m_1 + 2m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}(\cos(\omega t) - 1)$$

Đây chính là phương trình chuyển động ngang của vỏ động cơ (gốc của tọa độ  $\zeta_3$  tại vị trí khối tâm của vỏ động cơ lúc  $t = 0$  s).

65

## VD – ĐỊNH LÝ CHUYỂN ĐỘNG CỦA KHỐI TÂM (6)

### VD 2: Dạng bài toán 1 (câu a) và 3 (câu b)

b) Khi vỏ động cơ được cố định:  $\zeta_3 = 0$

Tại thời điểm  $t$ :

$$\varphi = \omega t$$

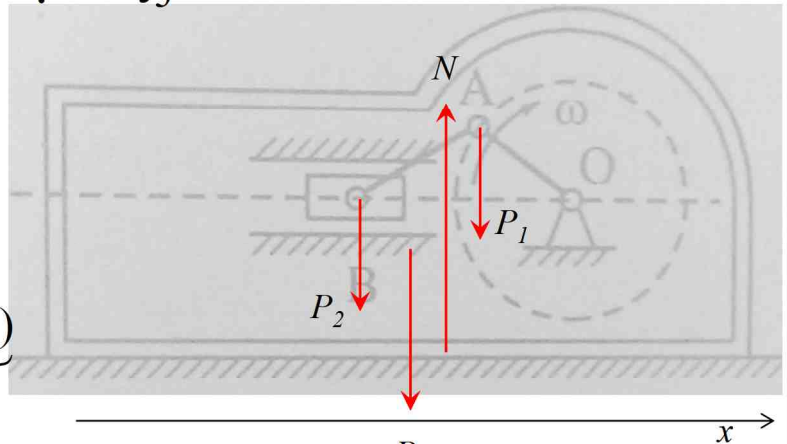
$$x_1 = x_{01} + r(1 - \cos \varphi) + \underbrace{(x_3 - x_{03})}_{\zeta_3}$$

$$x_2 = x_{02} + 2r(1 - \cos \varphi) + \underbrace{(x_3 - x_{03})}_{\zeta_3}$$

$$x_3 = x_{03} + \zeta_3 \Rightarrow x_3 = x_{03}$$

$$\Rightarrow x_C = \frac{m_1(x_{01} + r(1 - \cos \varphi)) + m_2(x_{02} + 2r(1 - \cos \varphi)) + m_3 x_{03}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\Rightarrow x_C = \frac{m_1 x_{01} + m_2 x_{02} + m_3 x_{03}}{m_1 + m_2 + m_3} + \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 + m_2 + m_3} r(1 - \cos \varphi)$$



66

## VD – ĐỊNH LÝ CHUYỂN ĐỘNG CỦA KHỐI TÂM (7)

### VD 2: Dạng bài toán 1 (câu a) và 3 (câu b)

b) Khi vỏ động cơ được cố định:  $\zeta_3 = 0$

Tại thời điểm  $t$ :

$$\varphi = \omega t$$

$$x_1 = x_{01} + r(1 - \cos \varphi) + \underbrace{(x_3 - x_{03})}_{\zeta_3}$$

$$x_2 = x_{02} + 2r(1 - \cos \varphi) + \underbrace{(x_3 - x_{03})}_{\zeta_3}$$

$$x_3 = x_{03} + \zeta_3 \Rightarrow x_3 = x_{03}$$

$$\Rightarrow x_C = \frac{m_1(x_{01} + r(1 - \cos \varphi)) + m_2(x_{02} + 2r(1 - \cos \varphi)) + m_3 x_{03}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\Rightarrow x_C = \frac{m_1 x_{01} + m_2 x_{02} + m_3 x_{03}}{m_1 + m_2 + m_3} + \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 + m_2 + m_3} r(1 - \cos \varphi)$$

67

## VD – ĐỊNH LÝ CHUYỂN ĐỘNG CỦA KHỐI TÂM (8)

### VD 2: Dạng bài toán 1 (câu a) và 3 (câu b)

b) Khi vỏ động cơ được cố định:  $\zeta_3 = 0$

Tại thời điểm  $t$ :

$$\Rightarrow \ddot{x}_C = \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 + m_2 + m_3} r \frac{d^2}{dt^2} (1 - \cos \omega t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_C = \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 + m_2 + m_3} r \omega^2 \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_C = \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 + m_2 + m_3} r \frac{d^2}{dt^2} (1 - \cos \omega t)$$

$$MW_{Cx} = \sum F_{kx}^e \Rightarrow M\ddot{x}_C = T \Rightarrow (m_1 + m_2 + m_3) \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 + m_2 + m_3} r \omega^2 \cos(\omega t) = T$$

$$\Rightarrow T = (m_1 + 2m_2) r \omega^2 \cos(\omega t)$$

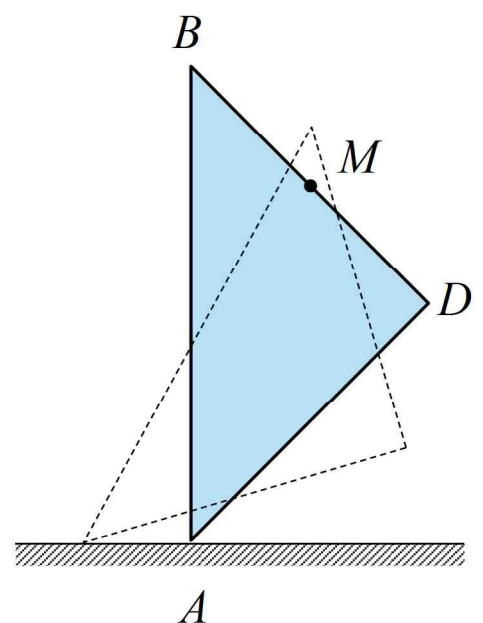
**Giải hoàn toàn tương tự cho phương y để tìm  $N$ !**  $\sum F_{ky}^e = M\ddot{y}_C$

68

## VD – ĐỊNH LÝ CHUYỂN ĐỘNG CỦA KHỐI TÂM (9)

### VD 3:

Một tấm đồng chất  $ABD$  có hình dạng là tam giác vuông cân (cạnh  $AB = 12$  cm) được đặt thẳng đứng tựa đỉnh  $A$  trên mặt ngang nhẵn không ma sát. Người ta thả cho tấm phẳng đổ xuống dưới tác dụng của trọng lực. Hãy xác định quỹ đạo của điểm  $M$  nằm chính giữa cạnh bên  $BC$ . Chú ý, trong suốt thời gian chuyển động, điểm  $A$  luôn tựa trên mặt ngang.



69

# CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT ĐỘNG LỰC HỌC

## I. Định lý chuyển động của khối tâm

- ☑ Khối tâm của cơ hệ chuyển động như một chất điểm mang khối lượng của toàn hệ chịu tác dụng của vector chính ngoại lực tác dụng lên hệ.

## II. Định lý biến thiên động lượng

Đạo hàm theo thời gian vector động lượng  $\vec{Q}$  của cơ hệ bằng vector chính của ngoại lực tác dụng lên hệ

## III. Định lý biến thiên moment động lượng

Đạo hàm theo thời gian moment động lượng của cơ hệ đối với một tâm (trục) bằng moment chính của ngoại lực tác dụng lên cơ hệ đối với tâm (trục) đó.

## IV. Định lý động năng

Đạo hàm động năng của cơ hệ bằng tổng công suất ngoại và nội lực đặt vào cơ hệ.

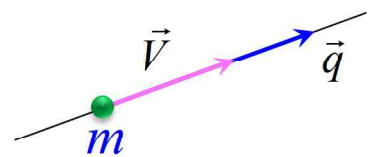
70

## II. ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN ĐỘNG LƯỢNG (1)

### 1. Một số khái niệm và định nghĩa:

- Động lượng của chất điểm:

$$\vec{q} = m\vec{V}$$



- Động lượng của cơ hệ:

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^N m_k \vec{V}_k$$

- Sử dụng vận tốc của khối tâm C ( $\underline{V_C}$ )

$$\vec{Q} = M\vec{V}_C = \sum_{k=1}^N m_k \vec{V}_k$$

- $M$ : Khối lượng của cơ hệ
- $V_C$ : Vận tốc khối tâm của cơ hệ

71

## II. ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN ĐỘNG LƯỢNG (2)

### 2. Định lý:

Đạo hàm theo thời gian vector động lượng  $\mathbf{Q}$  của cơ hệ bằng vector chính của ngoại lực tác dụng lên hệ:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e$$

Hay (dạng hữu hạn):

$$\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0 = \sum \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_k^e dt$$

Trong đó:

$\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1$ : Tương ứng là động lượng của cơ hệ tại thời điểm  $t_0$  và  $t_1$ .

$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_k^e dt$ : Xung của lực  $\mathbf{F}_k^e$

72

## II. ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN ĐỘNG LƯỢNG (3)

### ❖ Nhận xét:

- Không có mặt của nội lực  $\rightarrow$  Chọn cơ hệ thích hợp!

| Định lý biến thiên động lượng                                                                                                                                                                                                                                                        | Định lý CĐ của khối tâm                                                                                                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e$<br>$\mathbf{Q} = M\vec{V}_C = \sum_{k=1}^N m_k \vec{V}_k$                                                                                                                                                                                | $M\vec{W}_C = \sum \vec{F}_k^e$                                                                                                                                                              |
| <ul style="list-style-type: none"><li>Khối lượng của cơ hệ có thể không đổi hoặc thay đổi trong quá trình chuyển động</li><li>Bài toán va chạm</li><li>Bài toán liên quan đến chuyển động của chất lỏng</li><li>Lực tác dụng là không đổi hoặc chỉ phụ thuộc vào thời gian</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>Trường hợp riêng của Định lý biến thiên động lượng</li><li>Khối lượng của cơ hệ không đổi</li><li>Bài toán chuyển động tịnh tiến của vật rắn</li></ul> |

74

## VD - ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN ĐỘNG LƯỢNG (2)

**VD1:** Hai người  $A$  và  $B$  đang đứng ở hai góc của chiếc bè, khối lượng của mỗi người lần lượt là  $m_A = 85$  kg và  $m_B = 55$  kg. Ban đầu tất cả đều đứng yên. Khi họ nhận thấy bè bị đứt neo, người  $A$  lập tức đi về phía người  $B$  với vận tốc  $0.6$  m/s so với bè. Biết khối lượng của bè là  $140$  kg, xác định: a) Vận tốc của bè nếu người  $B$  đứng yên; b) Vận tốc của người  $B$  phải đi về phía người  $A$  là bao nhiêu để bè đứng yên. (Bỏ qua sức cản của nước)



## VD - ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN ĐỘNG LƯỢNG (3)

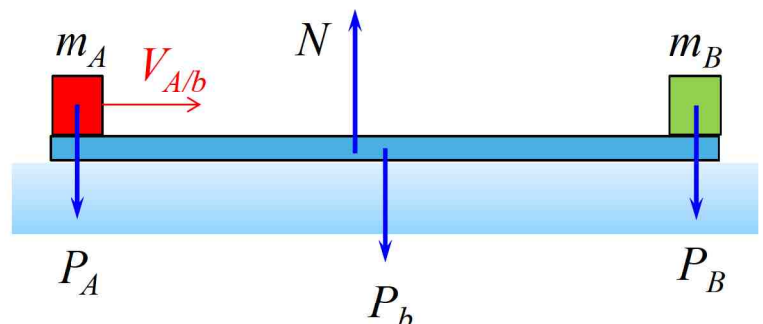
**VD1:**  $m_A = 85$  kg;  $m_B = 55$  kg;  $V_{A/b} = 0.6$  m/s.

a)  $V_{B/b} = 0$ ,  $V_b = ?$ ;

b)  $V_b = 0$ ,  $V_B = ?$

Ngoại lực tác dụng:

$$P_A, P_B, P_b, N$$



$$\sum \vec{F}_{kx}^e = \vec{0} \rightarrow \text{Động lượng theo phương } x \text{ được bảo toàn.}$$

○ Ban đầu hệ đứng yên:  $Q_{0x} = \sum m_k V_{kx} = 0$

○ Khi chuyển động:  $Q_{1x} = \sum m_k V_{kx} = m_A V_{Ax} + m_B V_{Bx} + m_b V_{bx} = Q_{0x} = 0$

a)

$$V_{Ax} = V_{A/b} + V_{bx}; \quad V_{Bx} = \cancel{V_{B/b}} + V_{bx} \Rightarrow m_A (V_{A/b} + V_{bx}) + m_B V_{bx} + m_b V_{bx} = 0$$

$$\Rightarrow (m_A + m_B + m_b) V_{bx} = -m_A V_{A/b} \Rightarrow V_{bx} = -\frac{m_A}{(m_A + m_B + m_b)} V_{A/b}$$

## VD - ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN ĐỘNG LƯỢNG (4)

**VD1:**  $m_A = 85 \text{ kg}$ ;  $m_B = 55 \text{ kg}$ ;  $V_{A/b} = 0.6 \text{ m/s}$ .

b)  $V_b = 0$ ,  $V_B = ?$

$$m_A V_{Ax} + m_B V_{Bx} + m_b V_{bx} = 0$$

$$\Rightarrow m_A (V_{A/b} + V_{bx}) + m_B (V_{B/b} + V_{bx}) + m_b V_{bx} = 0$$

$$\Rightarrow m_A V_{A/b} + m_B V_{B/b} = 0$$

$$V_{B/b} = -\frac{m_A}{m_B} V_{A/b} = -\frac{85}{55} 0.6 = -0.927 \text{ m/s}$$

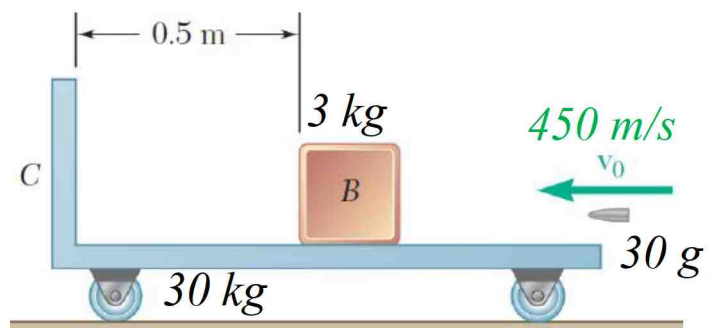
Dấu (-) chỉ hướng chuyển động của người B ngược với người A.

77

## VD - ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN ĐỘNG LƯỢNG (3)

**VD2:** Một viên đạn nặng 30 gam đang bay theo phương ngang với vận tốc 450 m/s thì găm vào khối B có khối lượng 3 kg. Sau khi va chạm, khối B trượt trên xe trượt C đến khi nó chạm vào vách cuối của xe. Biết va chạm giữa B và C là va chạm mềm, hệ số ma sát động giữa B và C là 0.2. Giả thiết thời gian va chạm giữa A và B là rất ngắn có thể bỏ qua xung của lực ma sát giữa B và C trong giai đoạn va chạm này. Bỏ qua ma sát giữa xe và sàn. Xác định:

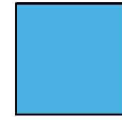
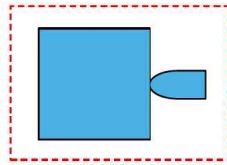
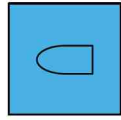
- Vận tốc của A & B sau va chạm lần 1
- Xác định vận tốc của cả 3 vật A, B, và C.



## VD - ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN ĐỘNG LƯỢNG (6)

a) Vận tốc của  $A$  &  $B$  ngay sau va chạm:

$$(m_A + m_B)V_1$$

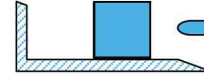
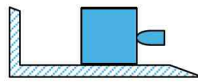
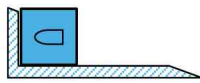


$$m_A V_0$$



$$m_A V_0 + 0 = (m_A + m_B)V_1 \Rightarrow V_1 = \frac{m_A}{m_A + m_B} V_0 = \frac{0.03}{0.03 + 3} 450 = 4.46 \text{ m/s}$$

b) Vận tốc cuối cùng của cả hệ:



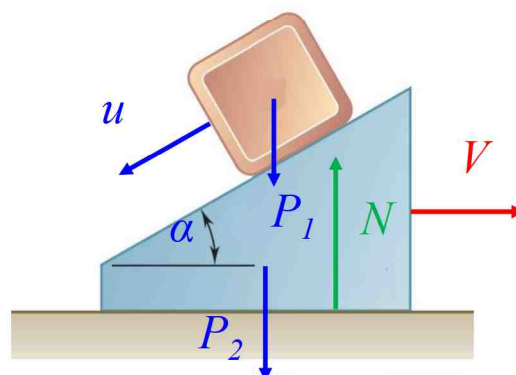
$$(m_A + m_B)V_1 = (m_A + m_B + m_C)V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{m_A + m_B}{m_A + m_B + m_C} V_1$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{0.03 + 3}{0.03 + 3 + 30} 4.46 = 0.41 \text{ m/s}$$

79

## VD - ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN ĐỘNG LƯỢNG (4)

**VD3:** Cho cơ hệ gồm vật có trọng lượng  $P_1$  đặt trên mặt phẳng nghiêng của lăng trụ có trọng lượng  $P_2$ . Góc nghiêng của mặt lăng trụ với mặt ngang là  $\alpha$ . Ban đầu vật  $P_1$  nằm yên tương đối trên mặt lăng trụ, trong khi lăng trụ thì trượt sang phải với vận tốc  $V_0$ . Bất chợt vật  $P_1$  trượt xuống với vận tốc  $\underline{u} = \underline{at}$  so với lăng trụ. Xác định vận tốc  $V$  của lăng trụ. Bỏ qua ma sát giữa lăng trụ và mặt ngang.



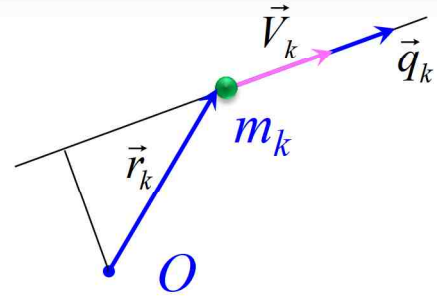
80

### III. ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN MOMENT ĐỘNG LƯỢNG (1)

#### 1. Một số khái niệm và định nghĩa:

Xét chất điểm  $M_k$  có:

- Khối lượng :  $m_k$
- Vị trí :  $\vec{r}_k$
- Vận tốc :  $\vec{V}_k$



➤ Moment động lượng của chất điểm đối với 1 tâm (tâm  $O$ )

$$\vec{L}_{kO}(\vec{q}_k) = \vec{r}_k \times \vec{q}_k = m_k \vec{r}_k \times \vec{V}_k \quad \checkmark \vec{L}_{kO} \text{ tùy thuộc vào vị trí tâm } O$$

➤ Moment động lượng của chất điểm đối với 1 trục

$$\vec{L}_{kx}(\vec{q}_k) = \pm |M_O(\vec{q}_k^{yz})|, \quad \vec{q}_k^{yz} = hc_{yz}(\vec{q}_k)$$

$$\vec{L}_{ky}(\vec{q}_k) = \pm |M_O(\vec{q}_k^{zx})|, \quad \vec{q}_k^{zx} = hc_{zx}(\vec{q}_k)$$

$$\vec{L}_{kz}(\vec{q}_k) = \pm |M_O(\vec{q}_k^{xy})|, \quad \vec{q}_k^{xy} = hc_{xy}(\vec{q}_k)$$

82

### III. ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN MOMENT ĐỘNG LƯỢNG (2)

#### 1. Một số khái niệm và định nghĩa (cont'd):

➤ Moment động lượng của cơ hệ đối 1 tâm

$$\vec{L}_O = \sum \vec{L}_{kO}(\vec{q}_k)$$

➤ Moment động lượng của cơ hệ đối với 1 trục

$$\begin{aligned} \vec{L}_x &= \sum \vec{L}_{kx}(\vec{q}_k) \\ \vec{L}_\Delta &= \sum \vec{L}_{k\Delta}(\vec{q}_k) \quad \text{hay} \quad \vec{L}_y = \sum \vec{L}_{ky}(\vec{q}_k) \\ \vec{L}_z &= \sum \vec{L}_{kz}(\vec{q}_k) \end{aligned}$$

✓ *Vật rắn quay quanh trục cố định:*

$$\vec{L}_\Delta = J_\Delta \vec{\omega}$$

83

### III. ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN MOMENT ĐỘNG LƯỢNG (3)

#### 2. Định lý:

Đạo hàm theo thời gian moment động lượng của cơ hệ đối với một **tâm (trục)** bằng moment chính của ngoại lực tác dụng lên cơ hệ đối với **tâm (trục)** đó.

▪ Dạng vi phân:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum M_O(\vec{F}_k^e)$$

$$\frac{d\vec{L}_\Delta}{dt} = \sum M_\Delta(\vec{F}_k^e)$$

▪ Dạng tích phân:

$$\int_{t_0}^{t_1} d\vec{L}_O = \sum \int_{t_0}^{t_1} M_O(\vec{F}_k^e) dt$$

$$\int_{t_0}^{t_1} d\vec{L}_\Delta = \sum \int_{t_0}^{t_1} M_\Delta(\vec{F}_k^e) dt$$

✓ Vật rắn quay quanh trục cố định

$$\vec{L}_\Delta = J_\Delta \vec{\omega} \rightarrow \frac{d\vec{L}_\Delta}{dt} = J_\Delta \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

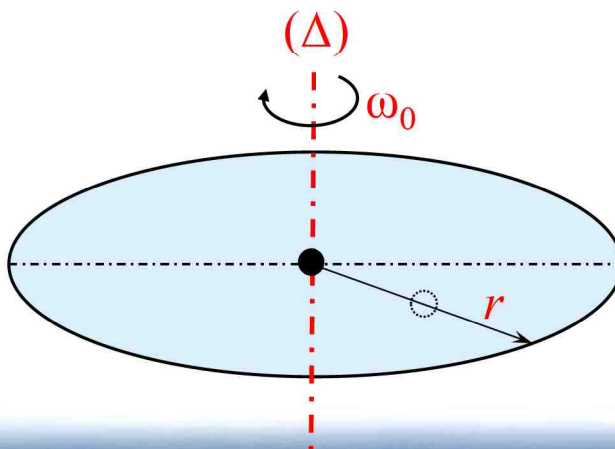
$$\rightarrow J_\Delta \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \sum M_{k\Delta}(\vec{F}_k^e)$$

→ Phương trình vi phân chuyển động quay của vật rắn quanh trục cố định.

84

### VD – ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN MOMENT ĐỘNG LƯỢNG (1)

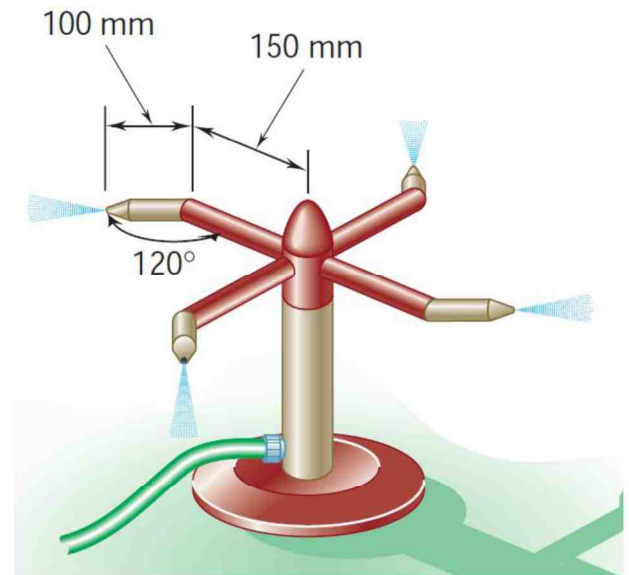
**VD 1:** Một đĩa tròn phẳng, đặc, đồng chất có khối lượng  $m_1$  và bán kính  $r$ . Tại tâm đĩa có một chất điểm có khối lượng  $m_2$ . Ban đầu cơ hệ đang quay đều với vận tốc góc  $\omega_0$  quanh trục ( $\Delta$ ) qua tâm  $O$  của đĩa và vuông góc với mặt đĩa. Sau đó, chất điểm  $m_2$  di chuyển theo phương bán kính của đĩa và dừng lại ở trung điểm của bán kính đó. Xác định vận tốc góc của cơ hệ tại thời điểm trên.



85

## VD – ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN MOMENT ĐỘNG LƯỢNG (2)

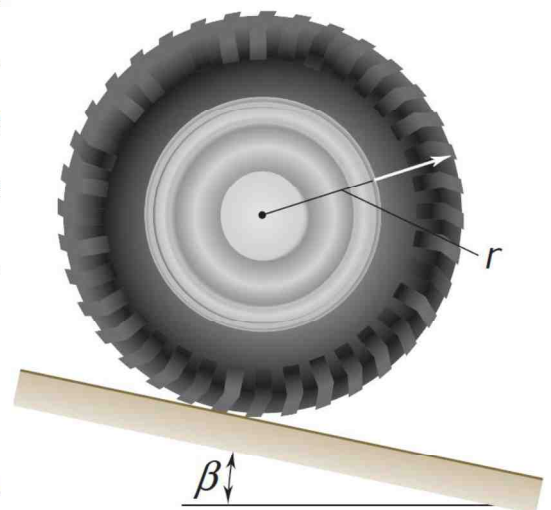
**VD 2:** A garden sprinkler has four rotating arms, each of which consists of two horizontal straight sections of pipe forming an angle of  $120^\circ$  with each other. Each arm discharges water at a rate of 20 L/min with a velocity of 18 m/s relative to the arm. Knowing that the friction between the moving and stationary parts of the sprinkler is equivalent to a couple of magnitude  $M=0.375$  N.m, determine the constant rate at which the sprinkler rotates.



## VD – ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN MOMENT ĐỘNG LƯỢNG (3)

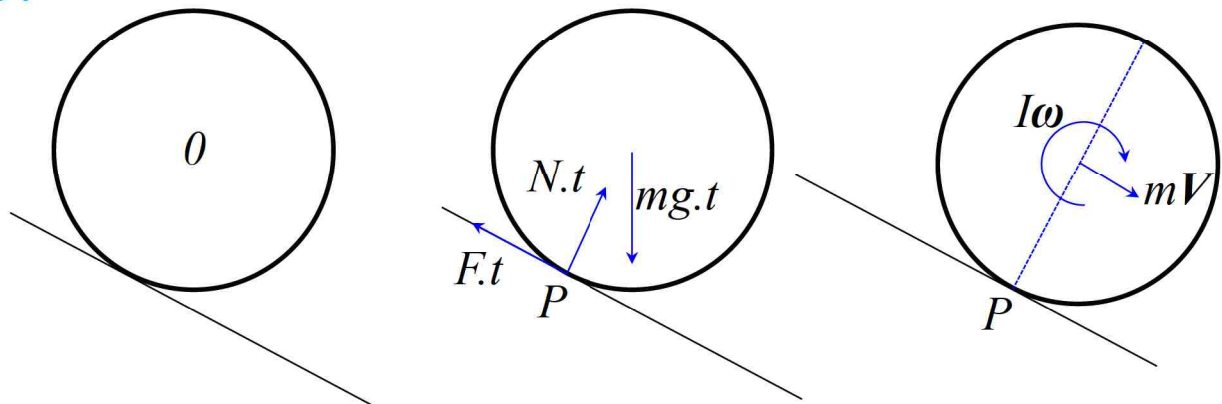
**VD 3:** A wheel of radius  $r$  and centroidal radius of gyration  $k$  is released from rest on the incline shown at time  $t=0$ . Assuming that the wheel rolls without sliding, determine:

- (a) the velocity of its center at time  $t$ ,
- (b) the coefficient of static friction required to prevent slipping.



## VD – ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN MOMENT ĐỘNG LƯỢNG (4)

### VD 3:



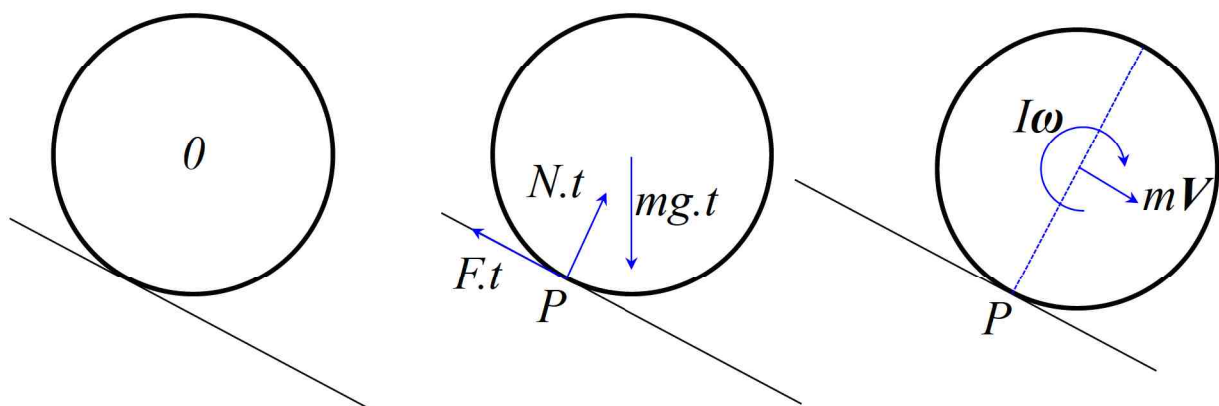
$$P: [(mV)r + I\omega]_{@t} - [0]_{@t=0} = (mgt)(r \sin \beta)$$

$$\rightarrow (mV)r + (mk^2) \frac{V}{r} = (mgt)(r \sin \beta)$$

$$\rightarrow V = \frac{r^2 g \sin \beta}{r^2 + k^2} t$$

## VD – ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN MOMENT ĐỘNG LƯỢNG (4)

### VD 3: Động lượng thẳng dọc theo mp nghiêng



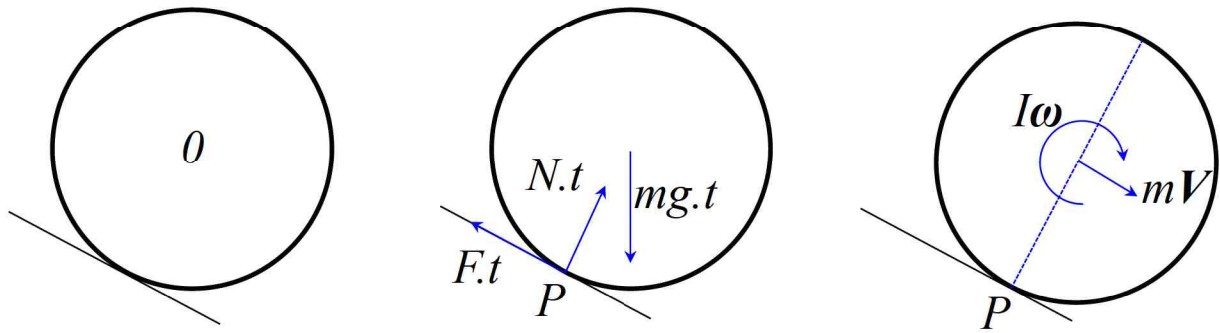
$$[mV]_{@t} - [0]_{@t=0} = (mgt) \sin \beta - Ft$$

$$\rightarrow Ft = (mgt) \sin \beta - m \frac{r^2 g \sin \beta}{r^2 + k^2} t$$

$$\rightarrow Ft = (mgt) \sin \beta \left( 1 - \frac{r^2}{r^2 + k^2} \right) \rightarrow Ft = \frac{mgk^2 \sin \beta}{r^2 + k^2} t$$

## VD – ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN MOMENT ĐỘNG LƯỢNG (4)

### VD 3: Động lượng thẳng vuông góc với mp nghiêng



$$[0]_{@t} - [0]_{@t=0} = Nt - (mgt) \cos \beta$$

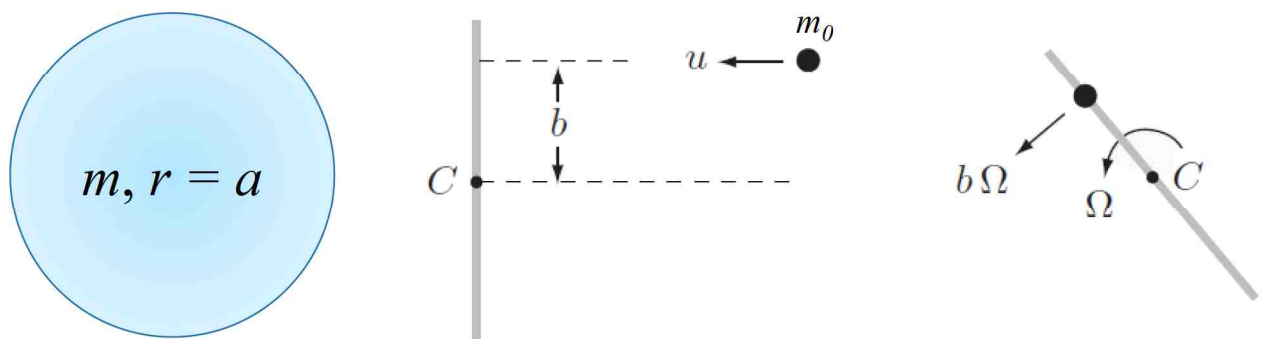
$$\rightarrow Nt = (mgt) \cos \beta$$

$$\rightarrow \frac{F}{N} = \frac{Ft}{Nt} = \frac{k^2 mgt \sin \beta}{r^2 + k^2} \frac{1}{mgt \cos \beta} = \frac{k^2}{r^2 + k^2} \tan \beta$$

➤ Lăn không trượt:  $\rightarrow \frac{F}{N} \leq f_s \rightarrow f_s \geq \frac{k^2}{r^2 + k^2} \tan \beta$

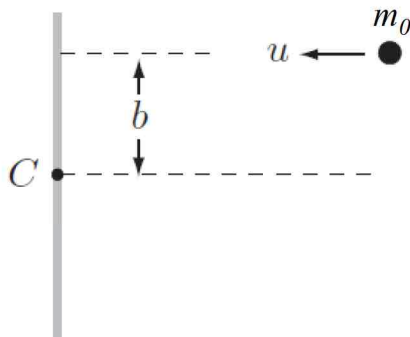
## VD – ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN MOMENT ĐỘNG LƯỢNG (4)

### VD 4:

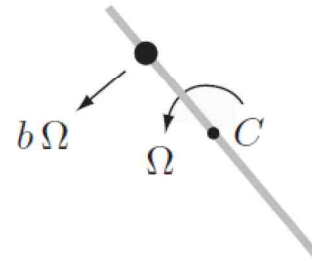


## VD – ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN MOMENT ĐỘNG LƯỢNG (4)

### VD 4:



$$m_0 b u$$



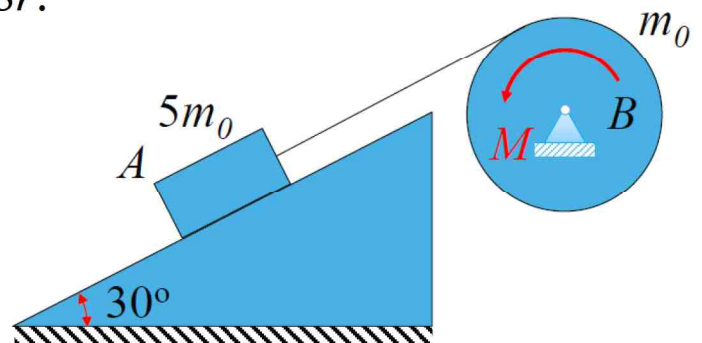
$$m_0 b (b\Omega) + \left(\frac{1}{4} m a^2\right) \Omega$$

$$m_0 b u = m_0 b (b\Omega) + \left(\frac{1}{4} m a^2\right) \Omega \rightarrow u = \frac{4m_0 b^2 + m a^2}{4m_0 b} \Omega$$

## VD – ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN MOMENT ĐỘNG LƯỢNG (4)

**VD 5:** Cho cơ hệ và các thông số như hình vẽ. Dây mềm luôn căng, khối lượng không đáng kể, không giãn và không trượt trên ròng rọc. Hệ số ma sát trượt động giữa vật  $A$  và mặt nêm là  $f_d = \sqrt{3}/2$ . Ròng rọc cố định có khối lượng  $m_0$ , bán kính  $r$  và bán kính quán tính đối với trục quay của nó là  $0.8r$ .

Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ, xác định gia tốc của vật  $A$  sức căng dây  $T$ . Bỏ qua ma sát tại trục quay của ròng rọc.



Vật  $A$  có thật sự tự trượt xuống được không?

Tham khảo: Ví dụ 12.6 ~ 12.8 trong giáo trình [1]

# CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT ĐỘNG LỰC HỌC

## I. Định lý chuyển động của khối tâm

- ☑ Khối tâm của cơ hệ chuyển động như một chất điểm mang khối lượng của toàn hệ chịu tác dụng của vector chính ngoại lực tác dụng lên hệ.

## II. Định lý biến thiên động lượng

- ☑ Đạo hàm theo thời gian vector động lượng  $\mathbf{Q}$  của cơ hệ bằng vector chính của ngoại lực tác dụng lên hệ

## III. Định lý biến thiên moment động lượng

- ☑ Đạo hàm theo thời gian moment động lượng của cơ hệ đối với một tâm (trục) bằng moment chính của ngoại lực tác dụng lên cơ hệ đối với tâm (trục) đó.

## IV. Định lý động năng

Đạo hàm động năng của cơ hệ bằng tổng công suất ngoại và nội lực đặt vào cơ hệ.

98

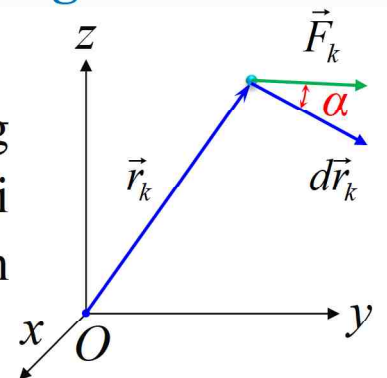
## IV. ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG (1)

### 1. Các định nghĩa và các kết quả thường dùng:

#### a. Công của lực:

Xét lực  $\mathbf{F}_k$  tác dụng tại điểm  $K$ , trong khoảng thời gian vô cùng bé điểm  $K$  dịch chuyển 1 vi phân  $d\mathbf{r}_k$ . Khi đó, công của lực  $\mathbf{F}_k$  trong dịch chuyển này là đại lượng vô hướng:

$$dA(\vec{F}_k) = \vec{F}_k d\vec{r}_k = F_k dr \cos \alpha \quad (\text{công nguyên tố, đơn vị là Joule, J})$$



#### b. Công của moment:

Xét vật rắn chịu tác động của moment  $M$  và trong khoảng  $dt$  vật rắn quay 1 góc  $d\varphi$ . Khi đó, công nguyên tố của moment  $M$  trong dịch chuyển này là:  $dA(M) = \pm |M d\varphi|$

Dấu (+) nếu  $M$  và  $d\varphi$  cùng chiều; dấu (-)  $M$  và  $d\varphi$  ngược chiều.

99

## IV. ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG (2)

### 1. Các định nghĩa và các kết quả thường dùng (cont'd):

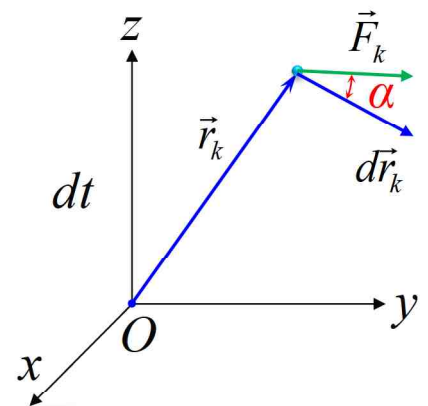
c) Công suất: Là công do lực hoặc moment sinh ra trong 1 đơn vị thời gian, đơn vị của công suất là Watt (W).

- Công suất của lực:

$$P(\vec{F}_k) = \frac{dA(\vec{F}_k)}{dt} = \frac{\vec{F}_k d\vec{r}_k}{dt} = \vec{F}_k \vec{V}_k = F_{kx}\dot{x} + F_{ky}\dot{y} + F_{kz}\dot{z}$$

- Công suất của moment:

$$P(M) = \frac{dA(M)}{dt} = \pm \frac{|Md\varphi|}{dt} = \pm |M\omega|$$



100

## IV. ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG (3)

### 1. Các định nghĩa và các kết quả thường dùng (cont'd):

d) Công của một số lực/moment phổ biến:

- Công của trọng lực:

$$A(P) = P(z_0 - z_1)$$

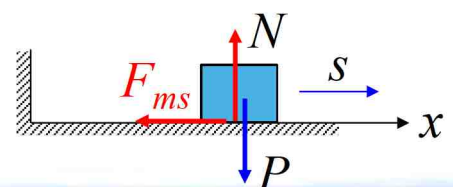
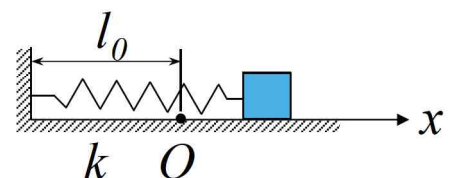
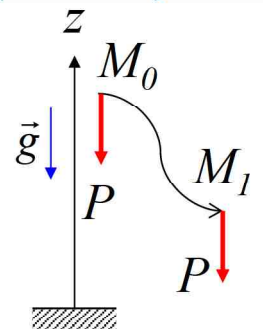
- Công của lực đàn hồi:

$$A(F_{lx}) = \frac{1}{2}k(x_0^2 - x^2)$$

(Dịch chuyển từ  $x_0$  đến  $x$ , gốc  $O$  tại vị trí lò xo không bị biến dạng)

- Công của lực ma sát trượt:

$$A(F_{ms}) = -(f_d N)s$$



101

## IV. ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG (4)

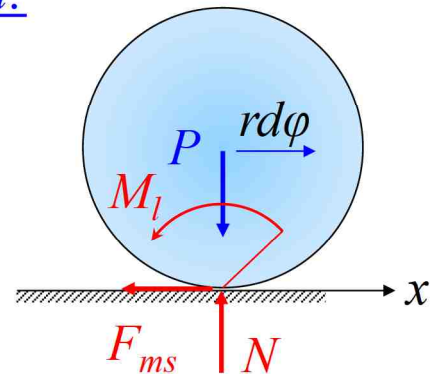
### 1. Các định nghĩa và các kết quả thường dùng (cont'd):

#### d) Công của một số lực/moment phổ biến:

- Lăn không trượt:

$$A(F_{ms}) = 0$$

$$A(M_l) = -M_l d\varphi$$



#### e) Công của nội lực của vật rắn:

Tổng công nội lực của vật rắn trên mọi dịch chuyển bằng 0.

(\*) Nhớ lại xung của các ngoại lực trong định lý động lượng/moment động lượng!

103

## IV. ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG (5)

### 2. Động năng

#### a) Động năng của hệ chất điểm

$$T = \frac{1}{2} \sum m_k V_k^2$$

#### b) Động năng của vật rắn chuyển động tịnh tiến

$$T = \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} M V_C^2$$

#### c) Động năng của vật rắn quay quanh trục cố định

$$T = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2$$

#### e) Động năng của vật rắn chuyển động song phẳng

$$T = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta C} \omega^2, \Delta \text{ qua khối tâm và vuông góc mặt phẳng quỹ đạo}$$

104

## IV. ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG (6)

### 2. Động năng

*f) Động năng của vật rắn chuyển động tổng quát*

$$T = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta C} \omega^2 \text{ là trục quay tức thời qua } C \text{ (có đối phương)}$$

### 3. Định lý động năng

- *Dạng vi phân:* Vi phân động năng cơ hệ bằng tổng công nguyên tố của nội lực và ngoại lực tác dụng vào cơ hệ.

$$dT = \sum dA_k^i + \sum dA_k^e$$

- *Dạng hữu hạn:* Biến thiên động năng của cơ hệ trên độ dời nào đó bằng tổng công hữu hạn nội và ngoại lực tác động vào cơ hệ trên cùng độ dời đó:

$$\Delta T = T_1 - T_0 = \sum A_k^i + \sum A_k^e$$

105

## IV. ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG (7)

### 3. Định lý động năng (cont'd):

- *Dạng đạo hàm:* Đạo hàm động năng của cơ hệ bằng tổng công suất ngoại và nội lực đặt vào cơ hệ:

$$\frac{dT}{dt} = \sum P(\vec{F}_k^i) + \sum P(\vec{F}_k^e)$$

### 4. Định luật bảo toàn cơ năng

- *Thế năng:* Thế năng của cơ hệ tại vị trí  $M$  là tổng công của các lực thế đặt vào cơ hệ trên độ dời từ vị trí  $M$  đến vị trí  $O$  được chọn (tùy ý) làm mốc.

✓ Thế năng chỉ phụ thuộc vào vị trí:  $\Pi = \Pi(M)$

- *Định luật:* Cơ hệ chuyển động trong trường lực thế có cơ năng (tổng của động năng và thế năng) không đổi.

106

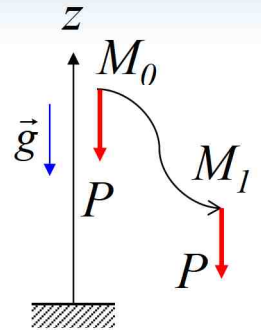
## IV. ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG (7)

### 4. Định luật bảo toàn cơ năng

- Thế năng trọng trường của vật có trọng lượng  $P$ :

- ✓ Gốc thế năng tại  $M_0$
- ✓ Thế năng của vật ở  $M_1$

$$\Pi(M) = A(P) \Big|_{M \rightarrow M_0} = \int_z^{z_0} -Pdz = -Pz \Big|_z^{z_0} = P(z - z_0)$$



- Thế năng của lực đàn hồi lò xo:

- ✓ Gốc  $O$  của trục  $Ox$  tại vị trí lò xo không bị biến dạng
- ✓ Gốc thế năng tại  $M_0$  (li độ  $x_0$ )
- ✓ Thế năng của vật ở  $M$  (li độ  $x$ )

$$\Pi(M) = A(F_{lx}) \Big|_{M \rightarrow M_0} = \int_x^{x_0} -kxdx = -\frac{1}{2}kx^2 \Big|_x^{x_0} = \frac{1}{2}k(x^2 - x_0^2)$$

- » Nếu chọn gốc thế năng của lò xo tại vị trí lò xo không bị biến dạng (tức là  $x_0 = 0$ ), khi đó  $x$  chính là độ biến dạng dài của lò xo và thế năng đàn hồi của lò xo là:  $\Pi_{lò xo} = \frac{1}{2}kx^2$

107

## YÊU CẦU TỰ LUYỆN Ở NHÀ

(Các định lý tổng quát của động lực học)

Xem các ví dụ (Giáo trình Cơ lý thuyết – Vũ Duy Cường)

- Định lý chuyển động khối tâm

Ví dụ: 12.1, 12.2

- Định lý biên thiên động lượng

Ví dụ: 12.3, 12.4, 12.5

- Định lý biên thiên moment động lượng

Ví dụ: 12.6, 12.7, 12.8

- Định lý động năng

Ví dụ: 12.9, 12.10, 12.11, 12.12, 12.13, 12.14, 12.15, 12.16

118

## VÍ DỤ

**VD 1:** Định lý động năng (chuyển động tịnh tiến + quay quanh trục cố định): *Tính động năng, công của ngoại lực, tìm gia tốc.*

**VD 2:** Định lý động năng (lăn không trượt): *Tính động năng, công của ngoại lực, tìm gia tốc.*

Bình luận

**VD 3:** Định lý động năng (trượt): *Tính động năng, công của ngoại lực, tìm gia tốc.*

**VD 4:** Định lý động năng (ròng rọc): *Tính động năng, công của ngoại lực, tìm gia tốc, sức căng dây.*

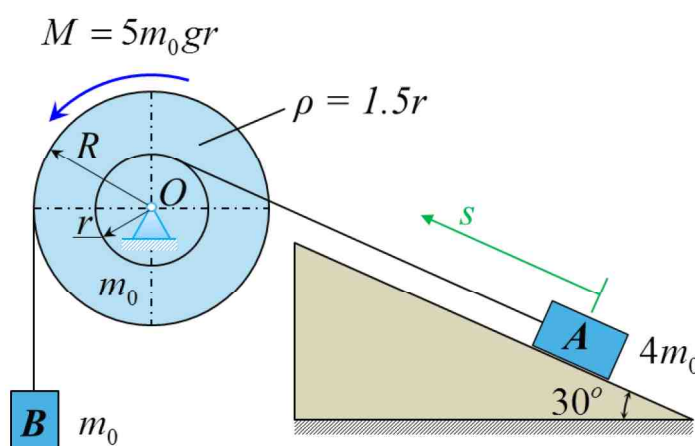
**VD 5:** Bảo toàn động lượng + bảo toàn cơ năng: Chuyển động tương đối, bảo toàn động lượng, bảo toàn cơ năng.

119

## VD – ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG

**VD1:** Định lý động năng (chuyển động tịnh tiến + quay quanh trục cố định): *Tính động năng, công của ngoại lực, tìm gia tốc.*

- a) Động năng của cơ hệ
- b) Công của các ngoại lực khi vật  $A$  trượt lên 1 đoạn  $s$  (so với mặt nghiêng)
- c) Gia tốc của  $B$
- d) Lực căng dây ở nhánh nối với  $B$ .



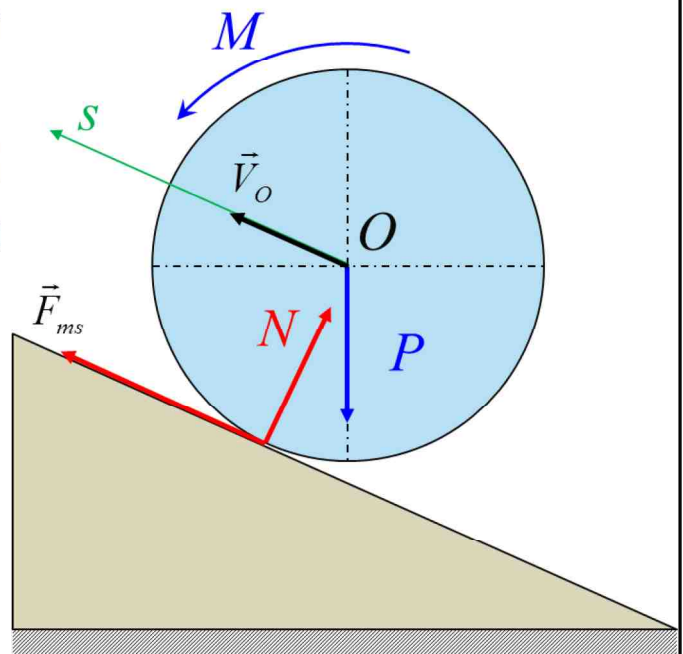
(Bỏ qua ma sát ở ổ trục  $O$  và ma sát trượt giữa  $A$  và nêm; dây mềm, không giãn, khối lượng của dây và biết dây luôn căng,  $R=2r$ )

120

## VD – ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG

**VD2:** Trụ tròn lăn không trượt trên mặt nghiêng, các thông số cho trên hình vẽ. Ban đầu hệ đứng yên, bỏ qua ma sát lăn. Xác định:

- Biểu thức động năng của cơ hệ
- Công của các ngoại lực khi trụ lăn 1 đoạn  $s$  trên mặt nghiêng
- Gia tốc góc của trụ
- Điều kiện để trụ lăn lên
- Nhận xét:
  - Trụ đặc/rỗng
  - $M = 0$



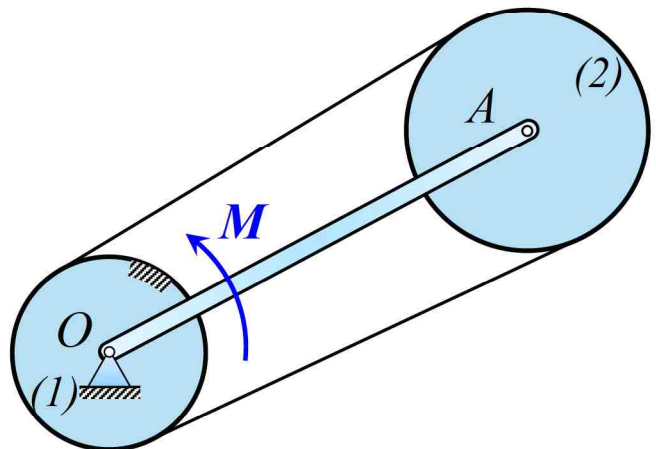
Sẽ trở lại trong các phần sau

121

## VD – ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG

**VD4:** Cho cơ cấu ròng rọc và đai nằm trong mặt phẳng nằm ngang như hình vẽ. Các ròng rọc được xem như các đĩa tròn đặc, đồng chất, khối lượng phân bố đều. Ròng rọc 1 và 2 có khối lượng tương ứng là  $m_1$  và  $m_2$ , và bán kính tương ứng là  $r_1$  và  $r_2$ . Tay quay OA có khối lượng  $m$ , chiều dài  $l$ ; thanh được xem là thanh mảnh đồng chất. Cơ hệ được dẫn động bởi moment không đổi  $M$ .

Xác định gia tốc góc của tay quay OA. Bỏ qua khối lượng của đai và giả sử đai mềm, không giãn, không có hiện tượng trượt đai.



122

## VD – ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG

### VD4:

- Gọi  $\omega_k$  là vận tốc góc tuyệt đối của ròng rọc thứ  $k$  ( $k = 1, 2$ )
- Gọi  $\omega_0$  là vận tốc góc tuyệt đối của thanh  $OA$

Quan hệ động học:

- Sử dụng công thức Vilit:

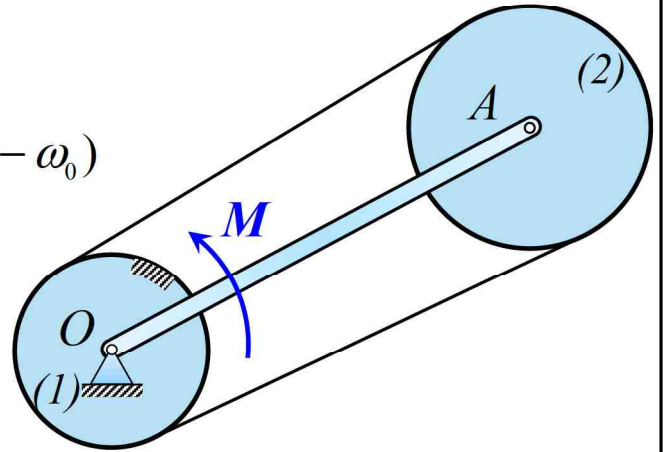
$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_2 - \omega_0} = \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow r_2(\omega_2 - \omega_0) = r_1(\omega_1 - \omega_0)$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{r_1(\omega_1 - \omega_0) + r_2\omega_0}{r_2}$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{r_1\omega_1 + (r_2 - r_1)\omega_0}{r_2}$$

$$\text{Do } \omega_1 = 0, r_1 = r_2 \Rightarrow \omega_2 = 0$$

→ Do đó, ròng rọc động 2 chuyển động tịnh tiến!



123

## VD – ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG

### VD4:

- Động năng của cơ hệ:  $T = T_1 + T_2 + T_{OA}$

» Ròng rọc 1 đứng yên:  $T_1 = 0$

» Ròng rọc 2 chuyển động tịnh tiến:

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2V_A^2 = \frac{1}{2}m_2(OA.\omega_0)^2$$

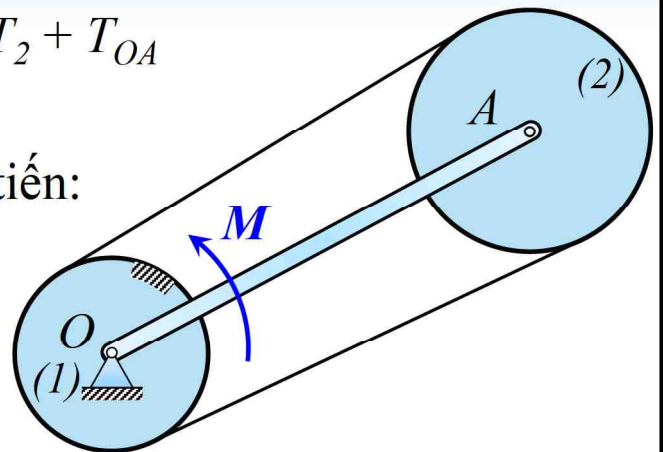
$$\rightarrow T_2 = \frac{1}{2}m_2l^2\omega_0^2$$

»  $OA$  quay quanh trục cố định:

$$T_{OA} = \frac{1}{2}(J_{OA/O})\omega_{OA}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega_0^2 \rightarrow T_{OA} = \frac{1}{6}ml^2\omega_0^2$$

» Vậy:

$$T = \frac{1}{6}ml^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}m_2l^2\omega_0^2 \rightarrow T = \frac{1}{6}(m + 3m_2)l^2\omega_0^2$$



124

## VD – ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG

### VD4:

- Công của nội lực và ngoại lực:
  - » Nhắc lại: cơ hệ gồm (1), (2) và  $OA$
  - » Tổng công của các nội lực trong mọi dịch chuyển đều bằng không.
  - » Tổng công của ngoại lực:  $P_1, P_2, P_{OA}, M$
  - » Tổng công của nội và ngoại lực khi tay quay quay 1 góc  $\varphi$ :

$$A = M.\varphi$$

- Áp dụng định lý động năng (1):

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \sum \frac{dA_k^e}{dt} + \sum \frac{dA_k^i}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{6} (m + 3m_2) l^2 \omega_0^2 \right] = \frac{d}{dt} (M\varphi) \\ \Rightarrow \frac{1}{6} (m + 3m_2) l^2 \frac{d}{dt} (\omega_0^2) &= M \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \frac{1}{3} (m + 3m_2) l^2 \omega_0 \frac{d\omega_0}{dt} = M \omega_0\end{aligned}$$

125

## VD – ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG

### VD4:

- Áp dụng định lý động năng (2):  
Do cơ hệ đang chuyển động, nghĩa là  $\omega \neq 0$ , do đó:

$$\varepsilon_0 = \frac{3M}{(m + 3m_2)l^2}$$

- Nhận xét:
  - ✓ Nếu  $r_1 \neq r_2$ ?
  - ✓ Xác định sức căng đai?
  - ✓ Dây đai có khối lượng?

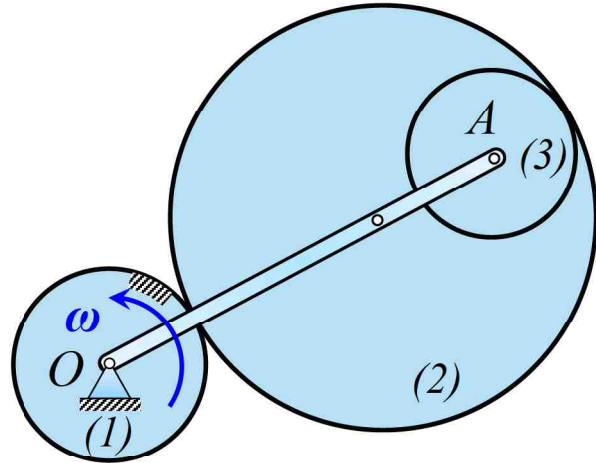
126

## VD – ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG

**VD4a:** Cho cơ cấu như hình vẽ. Các bánh răng được xem như các đĩa tròn đặc, đồng chất, khối lượng phân bố đều. Bánh răng 1, 2 và 3 có khối lượng tương ứng là  $m_1$ ,  $m_2$  và  $m_3$ ; bán kính tương ứng của các bánh răng là  $r_1$ ,  $r_2$  và  $r_3$ . Tay quay  $OA$  có khối lượng  $m$ ; thanh được xem là thanh mảnh đồng chất. Xác định biểu thức tính động năng của cơ hệ theo vận tốc góc của thanh  $OA$ . Bỏ qua hiện tượng trượt giữa các bánh răng.

### Gợi ý:

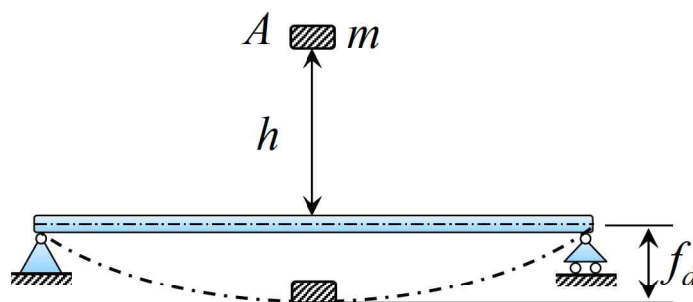
Áp dụng công thức Vilit cho từng cặp bánh răng để xác định vận tốc góc của từng bánh răng!



127

## VD – BẢO TOÀN CƠ NĂNG

**VD5:** Tải  $A$  được thả không vận tốc đầu từ độ cao  $h$  xuống dầm đàn hồi. Giả thiết va chạm là mềm. Xác định độ võng tối đa  $f_d$  của dầm, biết độ võng tĩnh của dầm là  $f_t$ .



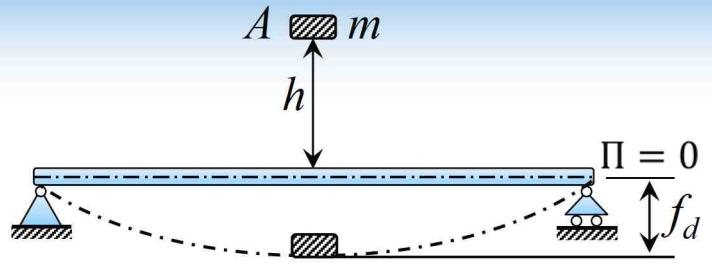
## VD – BẢO TOÀN CƠ NĂNG

### VD5:

Xét tải A

#### ■ Ngoại lực:

- $mg$
- $cf$ , phản lực của dầm khi bắt đầu va chạm  
» Tất cả đều là lực có thế  $\rightarrow$  Cơ năng của cơ hệ được bảo toàn.



#### ■ Chọn gốc thế năng tại vị trí dầm nằm ngang

- Cơ năng lúc A ở vị trí cao nhất:  $E_0 = 0 + mgh$
- Cơ năng lúc dầm bị võng cực đại,  $f_d$ :  $E_1 = 0 + (\frac{1}{2}cf_d^2 - mgf_d)$  với  $c = \frac{mg}{f_t}$
- Cơ năng được bảo toàn:  $E_0 = E_1 \Rightarrow f_d = f_t + \sqrt{f_t^2 + 2f_th}$

#### ➤ Nhận xét:

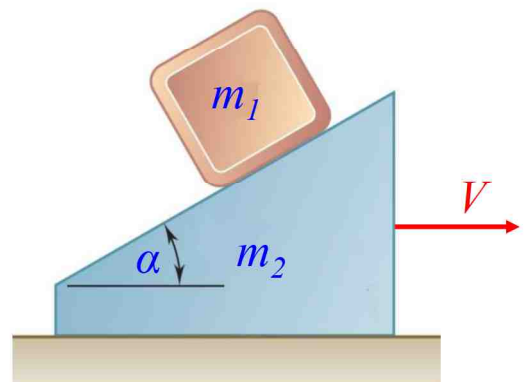
- $f_d > f_t$
- Nếu  $h = 0 \rightarrow f_d = 2f_t$

## VD – BẢO TOÀN CƠ NĂNG

**VD6:** Cho cơ hệ gồm vật có trọng lượng  $P_1$  đặt trên mặt phẳng nghiêng của lăng trụ có trọng lượng  $P_2$ . Góc nghiêng của mặt lăng trụ với mặt ngang là  $\alpha$ . Ban đầu vật cơ hệ đứng yên. Sau đó, vật  $P_1$  trượt xuống mặt nghiêng với vận tốc đầu bằng 0.

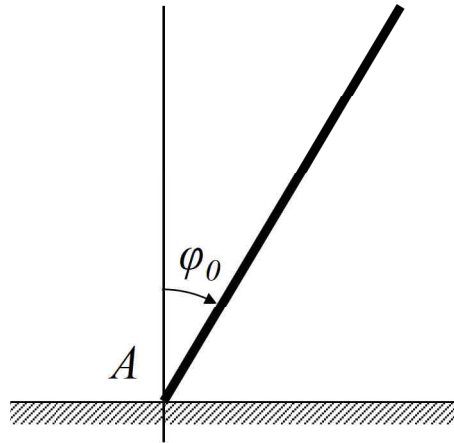
Xác định:

- Vận tốc của vật  $P_1$  so với vật  $P_2$ ;
- Vận tốc của lăng trụ  $P_2$  khi vật  $P_1$  trượt được 1 đoạn  $d$  trên mặt lăng trụ.



## VD – BẢO TOÀN CƠ NĂNG

**VD7:** Cho thanh thẳng, mảnh đồng chất, khối lượng phân bố đều. Thanh có khối lượng  $m$ , chiều dài  $2l$ . Ban đầu thanh tựa trên mặt sàn nằm ngang nhẵn và hợp với phương thẳng đứng một góc  $\varphi_0$ . Thả cho thanh rơi xuống không vận tốc đầu. Xác định biểu thức tính thời gian để thanh nằm trên sàn (kể từ lúc ban đầu thả thanh).

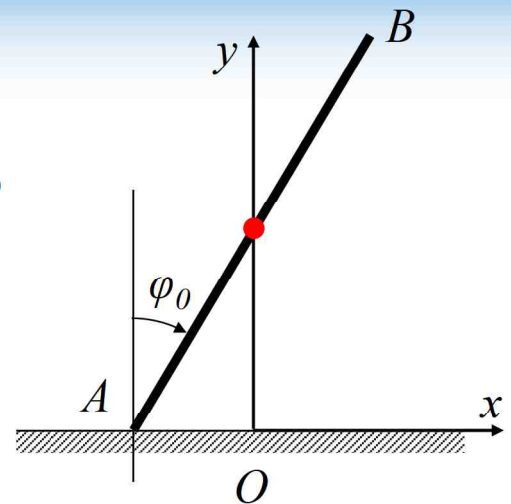


132

## VD – BẢO TOÀN CƠ NĂNG

### VD7:

- Phân tích ...
- Chuyển động của khối tâm theo phương  $x$  được bảo toàn
- Chọn HQC  $\rightarrow$  Quan hệ động học
- Biểu thức động năng
- Biểu thức thế năng



- $y_c = y = l \cos \varphi \rightarrow \dot{y} = -l\dot{\varphi} \sin \varphi$
- $T = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2 = \frac{1}{2} m (-l\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{12} m (2l)^2 \right] \dot{\varphi}^2$
- $T = \frac{1}{6} m l^2 \dot{\varphi}^2 (1 + 3 \sin^2 \varphi), \quad V = mgl \cos \varphi$
- $V = mgl \cos \varphi$

133

## VD – BẢO TOÀN CƠ NĂNG

### VD7:

- $E = T + V = \frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2(1 + 3\sin^2 \varphi) + mgl \cos \varphi$
- $E(t = 0) = E_0 = mgl \cos \varphi_0$
- $E = E_0 \rightarrow \frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2(1 + 3\sin^2 \varphi) + mgl \cos \varphi = mgl \cos \varphi_0$

$$\rightarrow \dot{\varphi}^2 = \frac{6g(\cos \varphi_0 - \cos \varphi)}{l(1 + 3\sin^2 \varphi)}$$

$$\rightarrow \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{6g}{l}} \sqrt{\frac{\cos \varphi_0 - \cos \varphi}{1 + 3\sin^2 \varphi}}$$

$$\rightarrow dt = \sqrt{\frac{l}{6g}} \sqrt{\frac{1 + 3\sin^2 \varphi}{\cos \varphi_0 - \cos \varphi}} d\varphi$$

$$\rightarrow \int_0^t dt = \sqrt{\frac{l}{6g}} \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \sqrt{\frac{1 + 3\sin^2 \varphi}{\cos \varphi_0 - \cos \varphi}} d\varphi$$

