

CƠ LÝ THUYẾT (Theoretical Mechanics)

Trương Quang Tri, Ts.

tri.truongquang@gmail.com

Office: Phòng 201B4 – PTN Cơ học Ứng dụng – BM Cơ Kỹ Thuật
Khoa Khoa học Ứng dụng – Đại học Bách Khoa Tp.HCM

2016.05.26

1

ĐỘNG LỰC HỌC

Mục tiêu:

Nghiên cứu qui luật chuyển động của: chất điểm, hệ chất điểm, vật rắn tuyệt đối dưới tác dụng của lực.

Nội dung:

1. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm và hệ chất điểm
2. Nguyên lý D'Alembert
3. Các định lý tổng quát động lực học
4. Nguyên lý di chuyển khả dĩ
5. Phương trình tổng quát động lực học và phương trình Lagrange loại II

2

CÁC ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA CƠ HỆ VÀ VẬT RẮN

II. Moment quán tính của vật rắn đối với 1 trục

Một số định lý:

Định lý 1: *Trục quán tính chính* của vật rắn tại điểm O , không đi qua khối tâm của vật chỉ là **trục quán tính chính của vật tại điểm O** .

Định lý 2: *Trục quán tính chính trung tâm* của vật là *trục quán tính chính* đối với mọi điểm thuộc trục ấy.

Định lý 3: Nếu một vật rắn đồng chất có một *trục đối xứng* thì trục đó là *trục quán tính chính trung tâm*.

Định lý 4: Nếu một vật rắn đồng chất có một *mặt phẳng đối xứng* thì trục thẳng góc với mặt phẳng đối xứng là *trục quán tính chính tại giao điểm của mặt phẳng đối xứng và trục*.

3

ĐỘNG LỰC HỌC (Cont'd)

➤ Nguyên lý D'Alembert

Trong chuyển động của chất điểm, lực thực tác dụng lên chất điểm (F) và lực quán tính của nó (F_{qt}) là một hệ lực cân bằng.

➤ Nguyên lý di chuyển khả dĩ

Điều kiện cần và đủ để cơ hệ chịu liên kết giữ, dừng hình học và lý tưởng cân bằng ở vị trí đang xét là: Tổng công của tất cả lực hoạt động trên mọi di chuyển khả dĩ kể từ vị trí đều bằng không.

→ Tìm điều kiện cân bằng của cơ hệ, các thành phần phản lực tĩnh của cơ hệ.

➤ Phương trình tổng quát động lực học

➤ Phương trình lagrange loại II

4

NGUYÊN LÝ D'ALEMBERT

Jean D'Alembert (1717—1783) là nhà vật lý, nhà toán học người Pháp

1. Đối với chất điểm:

- Lực quán tính: Chất điểm khối lượng m , chuyển động với gia tốc a , lực quán tính của chất điểm được định nghĩa bởi:

$$\vec{F}_{qt} = -m\vec{a}$$

- Nguyên lý D'Alembert:

Trong chuyển động của chất điểm, lực thực tác dụng lên chất điểm ($\vec{F}$) và lực quán tính của nó ($\vec{F}_{qt}$) là một hệ lực cân bằng.

$$\vec{F} + \vec{F}_{qt} = 0 \quad \text{hay} \quad (\vec{F}, \vec{F}_{qt}) \equiv \vec{0}$$

Chỉ cần chuyển về đổi dấu...???



8

NGUYÊN LÝ D'ALEMBERT

2. Đối với cơ hệ:

- Lực quán tính của cơ hệ: Xét chất điểm khối lượng m_k , chuyển động với gia tốc a_k , hệ lực quán tính ($\vec{F}_k^{qt}$), trong đó $\vec{F}_k^{qt} = -m_k \vec{a}_k$ đặt tại chất điểm khối lượng m_k là hệ lực quán tính của cơ hệ.

- Nguyên lý D'Alembert cho cơ hệ:

- ✓ Xét chất điểm thứ k chịu tác động của ngoại lực $\vec{F}_k^e$, nội lực $\vec{F}_k^i$ và lực quán tính của nó là $\vec{F}_k^{qt}$ thì:

$$(\vec{F}_k^e, \vec{F}_k^i, \vec{F}_k^{qt}) \equiv \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{R}'_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^{qt} = \vec{0} \\ \vec{M}_{kO} = \vec{m}_O(\vec{F}_k^e) + \vec{m}_O(\vec{F}_k^i) + \vec{m}_O(\vec{F}_k^{qt}) = \vec{0} \end{cases}$$

- ✓ Toàn cơ hệ:

$$\begin{cases} \vec{R}' = \sum \vec{R}'_k \\ \vec{M}_O = \sum \vec{M}_{Ok} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}' = \sum \vec{F}_k^e + \cancel{\sum \vec{F}_k^i} + \sum \vec{F}_k^{qt} = \vec{0} \\ \vec{M}_O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k^e) + \cancel{\sum \vec{m}_O(\vec{F}_k^i)} + \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k^{qt}) = \vec{0} \end{cases}$$

9

NGUYÊN LÝ D'ALEMBERT

2. Đối với cơ hệ:

✓ Mặt khác:

$$\begin{cases} \vec{R}^e = \sum \vec{F}_k^e \\ \vec{M}_O^e = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k^e) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Hai đặc trưng cơ bản của hệ ngoại lực} \\ \text{tác dụng vào cơ hệ khi thu gọn về tâm } O. \end{array}$$

và

$$\begin{cases} \vec{R}^{qt} = \sum \vec{F}_k^{qt} \\ \vec{M}_O^{qt} = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k^{qt}) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Hai đặc trưng cơ bản của hệ lực quán} \\ \text{tính của cơ hệ khi thu gọn về tâm } O. \end{array}$$

Do đó:

$$\begin{cases} \vec{R}' = \vec{R}^e + \vec{R}^{qt} = \vec{0} \\ \vec{M}_O' = \vec{M}_O^e + \vec{M}_O^{qt} = \vec{0} \end{cases}$$

Phát biểu NL: Trong chuyển động của cơ hệ, hệ lực gồm các lực thực tác động vào cơ hệ và lực quán tính của cơ hệ giống như hệ lực cân bằng.

10

NGUYÊN LÝ D'ALEMBERT

3. Thu gọn hệ lực quán tính:

a. Vector chính quán tính ($\vec{R}^{qt}$):
$$\vec{R}^{qt} = \sum \vec{F}_k^{qt} = -\sum m_k \vec{a}_k = -M \vec{a}_C$$

Trong đó:

- ✓ m_k : là khối lượng của chất điểm thứ k
- ✓ M : là khối lượng của toàn bộ cơ hệ
- ✓ $\vec{a}_C$: là gia tốc khối tâm C của cơ hệ.

b. Vector moment quán tính chính đối với một tâm của VR ($\vec{M}_O^{qt}$):

b.1. Vật rắn chuyển động tịnh tiến

$$\vec{M}_C^{qt} = 0$$

Nhân xét: Trong CĐTT, hệ lực quán tính của cơ hệ có hợp lực bằng vector chính quán tính đặt **tại khối tâm C** của cơ hệ.

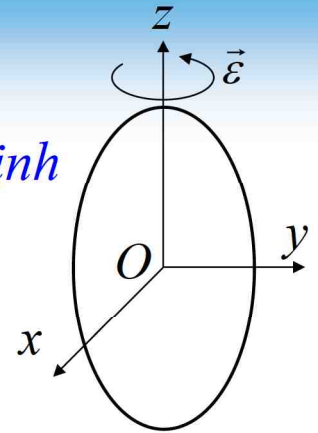
13

NGUYÊN LÝ D'ALEMBERT

3. Thu gọn hệ lực quán tính:

b.2. Vật rắn chuyển động quay quanh trục cố định

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho Oz trùng với trục quay cố định.



$$\vec{M}_O^{qt} = (\varepsilon J_{xz} - \omega^2 J_{yz})\vec{i} + (\varepsilon J_{yz} + \omega^2 J_{xz})\vec{j} - \varepsilon J_z \vec{k}$$

- Nếu Oz là trục moment quán tính chính của vật ($J_{xz}=J_{yz}=0$), khi đó:

$$\vec{M}_O^{qt} = -\varepsilon J_z \vec{k} \quad \forall O \in Oz$$

- Nhắc lại: Trong trường hợp quay quanh trục cố định, khi đó từ biểu thức ở mục (a), vector chính quán tính của vật khi thu gọn về tâm O sẽ là:

$$\vec{R}^{qt} = -M\vec{a}_C = M\{(\varepsilon y_C + \omega^2 x_C)\vec{i} + (\omega^2 y_C - \varepsilon x_C)\vec{j}\}$$

- Nếu O_z qua khối tâm C , khi đó: $\vec{R}^{qt} = -M\vec{a}_C = 0$

14

NGUYÊN LÝ D'ALEMBERT

3. Thu gọn hệ lực quán tính:

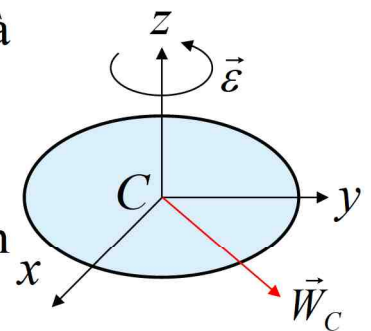
b.3. Vật rắn dạng hình phẳng chuyển động song phẳng

Chọn hệ trục tọa độ $Cxyz$ sao cho Cxy là mặt phẳng quy chiếu chuyển động của vật.

$$\vec{M}_C^{qt} = -\varepsilon J_z \vec{k}$$

- Nhắc lại (mục a): Vector chính quán tính của vật khi thu về tâm C là:

$$\vec{R}^{qt} = -M\vec{a}_C$$



❖ PTVPCĐ của vật rắn CĐSP:

$$\begin{cases} M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e \\ M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e \\ J_{Cz}\ddot{\varphi} = \sum m_{Cz}(\vec{F}_k^e) \end{cases}$$

Trong đó:

- ✓ M : là khối lượng của vật rắn
- ✓ $\ddot{x}_C, \ddot{y}_C$: lần lượt là gia tốc khối tâm C theo phương x và y

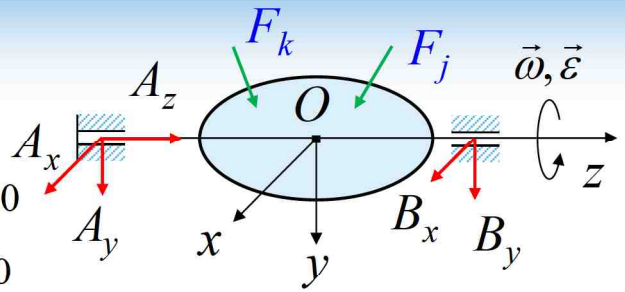
15

NGUYÊN LÝ D'ALEMBERT

4. Phản lực động lực trục quay:

a. Phương trình cân bằng:

$$\begin{cases} \sum X_k = \sum \vec{F}_{kx} + A_x + B_x + M(\omega^2 x_C + \varepsilon y_C) = 0 \\ \sum Y_k = \sum \vec{F}_{ky} + A_y + B_y + M(\omega^2 y_C - \varepsilon x_C) = 0 \\ \sum Z_k = \sum \vec{F}_{kz} + A_z \\ \sum m_x = \sum m_x(\vec{F}_k) + \sum m_x(A_y) + \sum m_x(B_y) + \varepsilon J_{xz} - \omega^2 J_{yz} = 0 \\ \sum m_y = \sum m_y(\vec{F}_k) + \sum m_y(A_x) + \sum m_y(B_x) + \varepsilon J_{yz} + \omega^2 J_{xz} = 0 \\ \sum m_z = \sum m_z(\vec{F}_k) - \varepsilon J_z = 0 \end{cases}$$



b. Phản lực động lực: Là các thành phần chỉ do chuyển động sinh ra.

✓ Các thành phần moment quán tính khối lượng

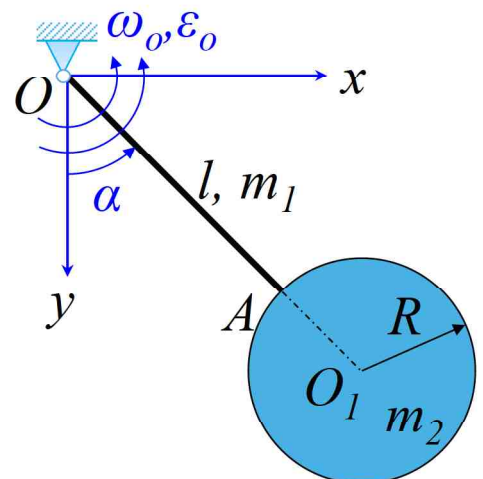
NX: PT cuối không liên quan đến phản lực ổ trục, đó chính là PT chuyển động quay của vật rắn quanh trục cố định.

16

VÍ DỤ - THU GỌN HỆ LỰC QUÁN TÍNH

VD1: Thanh OA đồng chất khối lượng phân bố đều, chiều dài l , khối lượng m_1 . Đĩa O_1 đồng chất, khối lượng phân bố đều, bán kính R và khối lượng m_2 .

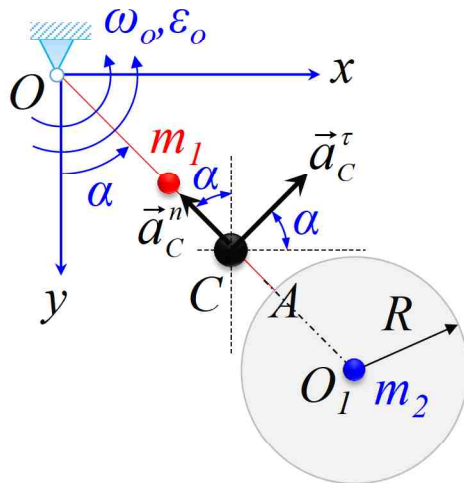
- Xác định khối tâm của cơ hệ đối với hệ trục Oxy như hình vẽ.
- Thu gọn hệ lực quán tính về tâm O .



17

VÍ DỤ - THU GỌN HỆ LỰC QUÁN TÍNH

VD1:



- Vị trí khối tâm C?

$$OC = \frac{m_1 \frac{l}{2} + m_2(l + R)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 l + 2m_2(l + R)}{2(m_1 + m_2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_C = OC \sin \alpha \\ y_C = OC \cos \alpha \end{cases}$$

- Gia tốc của khối tâm C:

○ C chuyển động tròn $\rightarrow \vec{a}_C = \vec{a}_C^n + \vec{a}_C^\tau$

$$|\vec{a}_C^n| = OC \cdot \omega_0^2 \rightarrow \vec{a}_C^n = -OC \cdot \omega_0^2 \sin \alpha \cdot \vec{i} - OC \cdot \omega_0^2 \cos \alpha \cdot \vec{j}$$

$$|\vec{a}_C^\tau| = OC \cdot \epsilon_0 \rightarrow \vec{a}_C^\tau = OC \cdot \epsilon_0 \cos \alpha \cdot \vec{i} - OC \cdot \epsilon_0 \sin \alpha \cdot \vec{j}$$

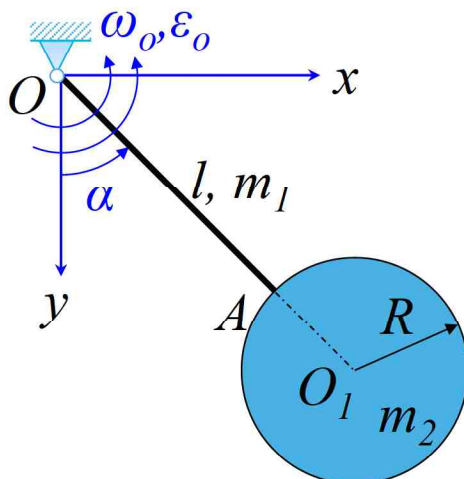
$$\Rightarrow \vec{a}_C = OC(-\omega_0^2 \sin \alpha + \epsilon_0 \cos \alpha) \vec{i} - OC(\omega_0^2 \cos \alpha + \epsilon_0 \sin \alpha) \vec{j}$$

18

VÍ DỤ - THU GỌN HỆ LỰC QUÁN TÍNH

VD1: Thu gọn hệ lực quán tính của cơ hệ về tâm O, ta sẽ được vector chính quán tính ($\vec{R}^{qt}$) và vector moment quán tính chính ($\vec{M}_O^{qt}$).

Trong đó:



- Vector chính quán tính: $\vec{R}^{qt} = -M\vec{a}_C$

- Vector moment quán tính chính:

Cơ hệ là vật rắn quay quanh trục cố định Oz, do đó:

$$\vec{M}_O^{qt} = (\epsilon_0 J_{xz} - \omega_0^2 J_{yz}) \vec{i} + (\epsilon_0 J_{yz} + \omega_0^2 J_{xz}) \vec{j} - \epsilon_0 J_z \vec{k}$$

- ✓ Vì Oz là trục quán tính chính (theo định lý 4), do đó $J_{xz} = J_{yz} = 0$.

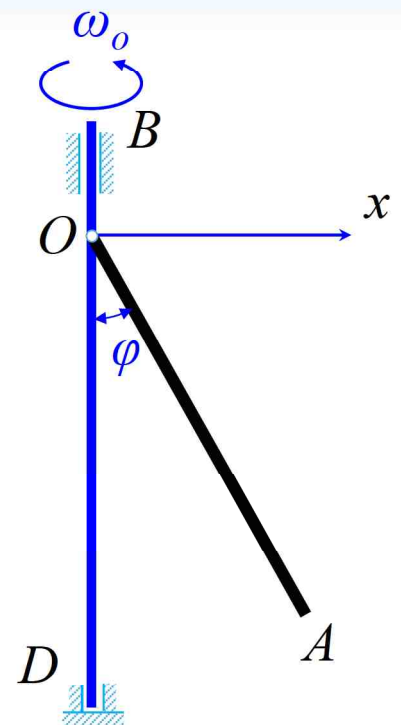
$\rightarrow$ Vector moment quán tính chính đối với tâm O trở thành:

$$\vec{M}_O^{qt} = -\epsilon_0 J_z \vec{k} = -\epsilon_0 (J_{Oz}^{OA} + J_{Oz}^{O1}) \vec{k} \Rightarrow \vec{M}_O^{qt} = -\epsilon_0 \left[\underbrace{\frac{1}{3} m_1 l^2}_{O_A} + \underbrace{\frac{1}{2} m_2 R^2 + m_2 (l + R)^2}_{O_1} \right] \vec{k}$$

19

VÍ DỤ - THU GỌN HỆ LỰC QUÁN TÍNH

VD2: Thanh thẳng, mảnh, đồng chất, chiều dài $OA=L$, khối lượng M có thể quay quanh trục đi qua O và thẳng góc với mặt phẳng chứa thanh và trục quay BD . Thanh OA cùng quay đều quanh trục thẳng đứng BD với vận tốc góc không đổi ω_0 . Trong chế độ quay ổn định, thanh OA luôn làm với trục BD một góc không đổi φ .

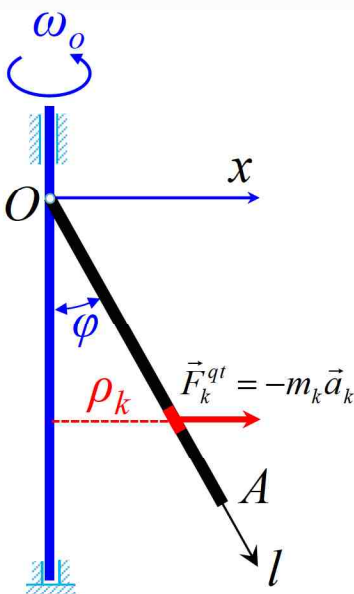


- Thu gọn hệ lực quán tính của cơ hệ về tâm O .
- Tìm sự liên hệ giữa ω_0 và φ .

20

VÍ DỤ - THU GỌN HỆ LỰC QUÁN TÍNH

VD2: (a) Thu gọn hệ lực quán tính của cơ hệ về tâm O



$$\begin{aligned} \circ \quad m_k &= \frac{m}{L} dl & \circ \quad \vec{a}_k &= \vec{a}_k^n + \vec{a}_k^\tau = \vec{a}_k^n \\ \circ \quad \rho_k &= l \sin \varphi & \circ \quad \vec{a}_k &= -\rho_k \omega_0^2 \vec{i} = -l \omega_0^2 \sin \varphi \vec{i} \end{aligned}$$

$$\circ \quad \vec{F}_k^{qt} = -m_k \vec{a}_k = -\frac{m}{L} dl (-l \omega_0^2 \sin \varphi \vec{i})$$

$$\circ \quad \vec{R}^{qt} = \sum_{k=1}^{\infty} \vec{F}_k^{qt} = \frac{m}{L} \omega_0^2 \sin \varphi \vec{i} \int_0^L l dl \rightarrow \vec{R}^{qt} = \left(\frac{mL\omega_0^2}{2} \sin \varphi \right) \vec{i}$$

Hoặc có thể tính $\vec{R}^{qt}$ như sau:

$$\vec{a}_c = \left(\frac{L}{2} \sin \varphi \right) \omega_0^2 (-\vec{i}) \rightarrow \vec{R}^{qt} = -m \vec{a}_c = \left(\frac{mL\omega_0^2}{2} \sin \varphi \right) \vec{i}$$

$$\circ \quad \left| \vec{M}_{k/O}^{qt} \right| = \left| \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{qt} \right| = \frac{m}{L} \omega_0^2 \sin \varphi l dl (l \cos \varphi)$$

$$\Rightarrow \left| \vec{M}_O^{qt} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \vec{M}_{k/O}^{qt} \right| = \frac{m}{L} \omega_0^2 \sin \varphi \cos \varphi \int_0^L l^2 dl = \frac{mL^2 \omega_0^2}{3} \sin \varphi \cos \varphi$$

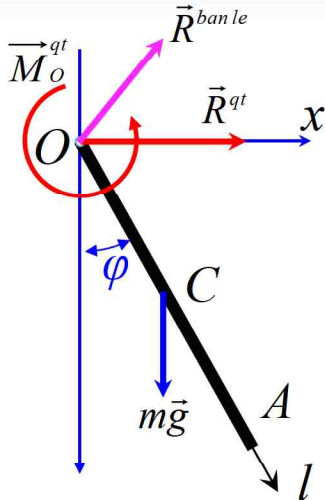
→ Vector moment quán tính chính của thanh khi thu gọn về tâm O là:

$$\left| \vec{M}_O^{qt} \right| = \frac{mL^2 \omega_0^2}{3} \sin \varphi \cos \varphi$$

21

VÍ DỤ - THU GỌN HỆ LỰC QUÁN TÍNH

VD2: (b) Tìm sự liên hệ giữa ω_0 và φ .



- Hệ lực thực tác dụng vào thanh OA :
 - Lực trọng trường: $P=mg$, tác dụng tại khối tâm C của thanh.
 - Phản lực tại chốt bản lề tại O
- Hệ lực quán tính của cơ hệ khi thu gọn về tâm O

$$\vec{R}^{qt} = \left(\frac{mL\omega_0^2}{2} \sin \varphi \right) \vec{i} \quad \text{và} \quad \vec{M}_O^{qt} = \frac{mL^2\omega_0^2}{3} \sin \varphi \cos \varphi$$

- Theo nguyên lý D'Alembert: Hệ lực gồm *hệ lực thực* tác dụng vào thanh OA và *hệ lực quán tính* của thanh OA là một hệ lực cân bằng, nghĩa là:

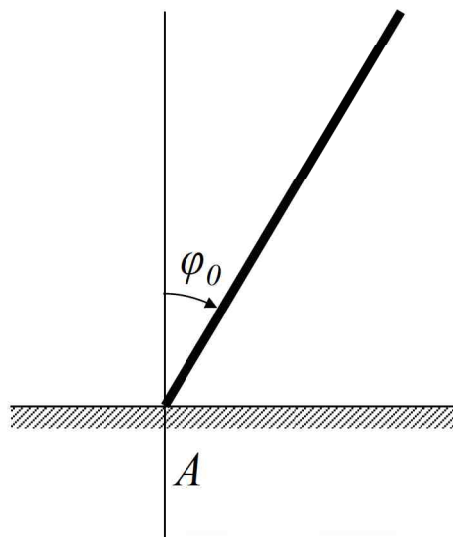
$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{R}^e + \vec{R}^{qt} = \vec{0} & (1) \\ \vec{M}_O = \vec{M}_O^e + \vec{M}_O^{qt} = \vec{0} & (2) \end{cases} \quad \text{Từ (2)} \rightarrow mg\left(\frac{L}{2} \sin \varphi\right) - \frac{mL^2\omega_0^2}{3} \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

$$\rightarrow \cos \varphi = \frac{3g}{2L\omega_0^2}$$

22

NGUYÊN LÝ D'ALEMBERT – VD CĐSP

VD3: Cho thanh thẳng, mảnh đồng chất, khối lượng phân bố đều. Thanh có khối lượng m , chiều dài $2l$. Ban đầu thanh tựa trên mặt sàn nằm ngang nhẵn và hợp với phương thẳng đứng một góc φ_0 . Thả cho thanh rơi xuống không vận tốc đầu. Xác định biểu thức tính thời gian để thanh nằm trên sàn (kể từ lúc ban đầu thả thanh).

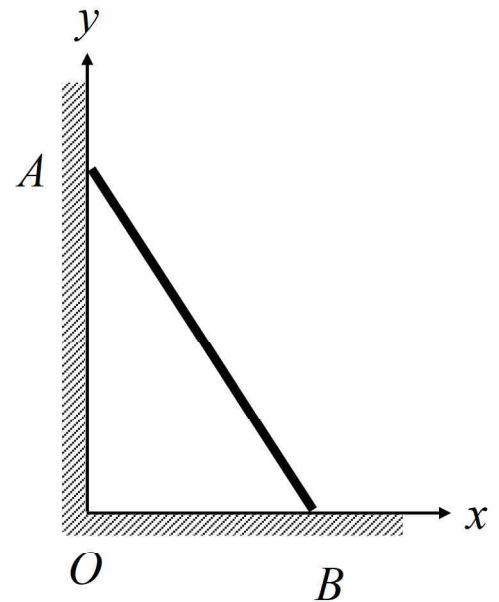


23

NGUYÊN LÝ D'ALEMBERT – VD CĐSP

VD3:

Cho thanh thẳng AB , mảnh đồng chất, khối lượng phân bố đều. Thanh có khối lượng m , chiều dài $2l$. Thanh tựa trên mặt sàn nằm ngang nhẵn và vách thẳng đứng nhẵn như hình vẽ. Thả cho thanh rơi xuống dưới tác dụng của lực trọng trường. Viết phương trình vi phân chuyển động của thanh AB .



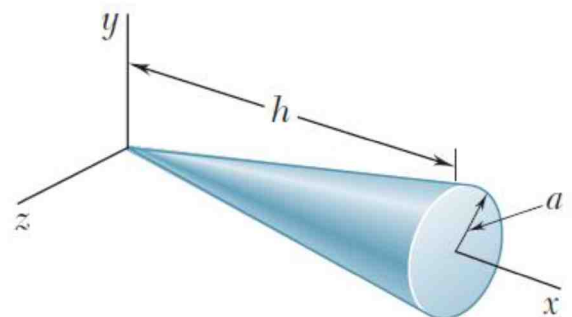
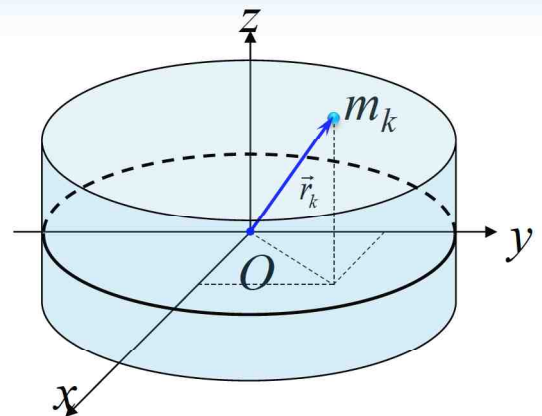
26

CÁC ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA CƠ HỆ VÀ VẬT RẮN

2. Moment quán tính tích:

$$\begin{aligned} J_{xy} &= J_{yx} = \sum_{k=1}^N m_k x_k y_k; \\ J_{yz} &= J_{zy} = \sum_{k=1}^N m_k y_k z_k; \\ J_{zx} &= J_{xz} = \sum_{k=1}^N m_k z_k x_k; \end{aligned}$$

- Sự đối xứng của phân bố khối lượng đối với mặt phẳng.
- Oxy là mp đối xứng $\rightarrow J_{xz} = J_{yz} = 0$
 $\rightarrow Oz$ trục quán tính chính tại O .
- Có 2 mặt phẳng đối xứng
 $\rightarrow J_{xz} = J_{yz} = J_{xy} = 0$



31

YÊU CẦU TỰ LUYỆN Ở NHÀ

(Nguyên lý D'Alembert)

Xem các ví dụ: 11.1, 11.2, 11.3, 11.4, 11.5, 11.6, 11.7, 11.8 (Cơ lý thuyết – Vũ Duy Cường, NXB ĐHQG 2013)