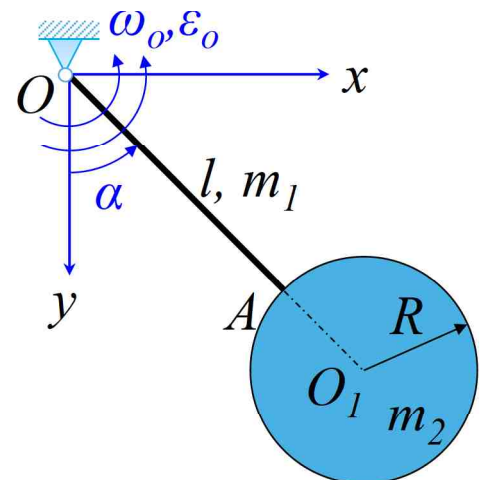


VÍ DỤ - THU GỌN HỆ LỰC QUÁN TÍNH

VD1: Thanh OA đồng chất khối lượng phân bố đều, chiều dài l , khối lượng m_1 . Đĩa O_1 đồng chất, khối lượng phân bố đều, bán kính R và khối lượng m_2 .



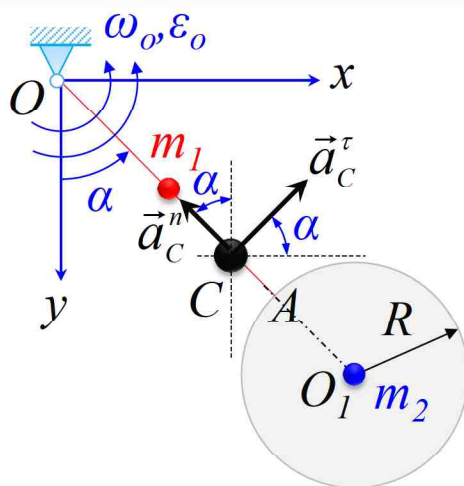
- Xác định khối tâm của cơ hệ đối với hệ trục Oxy như hình vẽ.
- Thu gọn hệ lực quán tính về tâm O .

17

VÍ DỤ - THU GỌN HỆ LỰC QUÁN TÍNH

VD1:

- Vị trí khối tâm C ?



$$OC = \frac{m_1 \frac{l}{2} + m_2(l + R)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 l + 2m_2(l + R)}{2(m_1 + m_2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_c = OC \sin \alpha \\ y_c = OC \cos \alpha \end{cases}$$

- Gia tốc của khối tâm C :

$$\circ C \text{ chuyển động tròn} \rightarrow \vec{a}_C = \vec{a}_C^n + \vec{a}_C^\tau$$

$$|\vec{a}_C^n| = OC \cdot \omega_o^2 \rightarrow \vec{a}_C^n = -OC \cdot \omega_o^2 \sin \alpha \cdot \vec{i} - OC \cdot \omega_o^2 \cos \alpha \cdot \vec{j}$$

$$|\vec{a}_C^\tau| = OC \cdot \epsilon_o \rightarrow \vec{a}_C^\tau = OC \cdot \epsilon_o \cos \alpha \cdot \vec{i} - OC \cdot \epsilon_o \sin \alpha \cdot \vec{j}$$

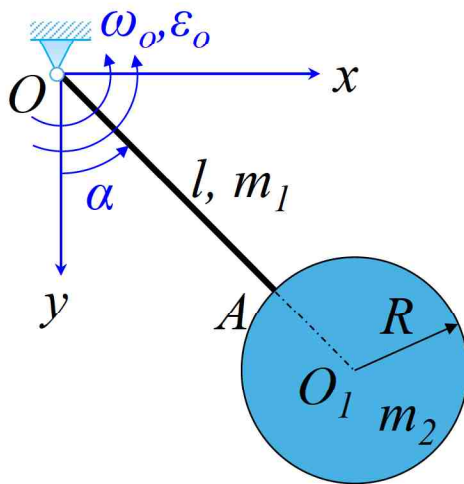
$$\Rightarrow \vec{a}_C = OC(-\omega_o^2 \sin \alpha + \epsilon_o \cos \alpha) \vec{i} - OC(\omega_o^2 \cos \alpha + \epsilon_o \sin \alpha) \vec{j}$$

18

VÍ DỤ - THU GỌN HỆ LỰC QUÁN TÍNH

VD1: Thu gọn hệ lực quán tính của cơ hệ về tâm O , ta sẽ được vector chính quán tính ($\vec{R}^{qt}$) và vector moment quán tính chính ($\vec{M}_O^{qt}$).

Trong đó:



▪ Vector chính quán tính: $\vec{R}^{qt} = -M\vec{a}_C$

▪ Vector moment quán tính chính:

Cơ hệ là vật rắn quay quanh trục cố định Oz , do đó:

$$\vec{M}_O^{qt} = (\varepsilon_0 J_{xz} - \omega_0^2 J_{yz})\vec{i} + (\varepsilon_0 J_{yz} + \omega_0^2 J_{xz})\vec{j} - \varepsilon_0 J_z \vec{k}$$

✓ Vì Oz là trục quán tính chính (theo định lý 4), do đó $J_{xz} = J_{yz} = 0$.

→ Vector moment quán tính chính đối với tâm O trở thành:

$$\vec{M}_O^{qt} = -\varepsilon_0 J_z \vec{k} = -\varepsilon_0 (J_{Oz}^{OA} + J_{Oz}^{O_1}) \vec{k} \Rightarrow \vec{M}_O^{qt} = -\varepsilon_0 \left[\underbrace{\frac{1}{3} m_1 l^2}_{O_A} + \underbrace{\frac{1}{2} m_2 R^2 + m_2 (l+R)^2}_{O_1} \right] \vec{k}$$

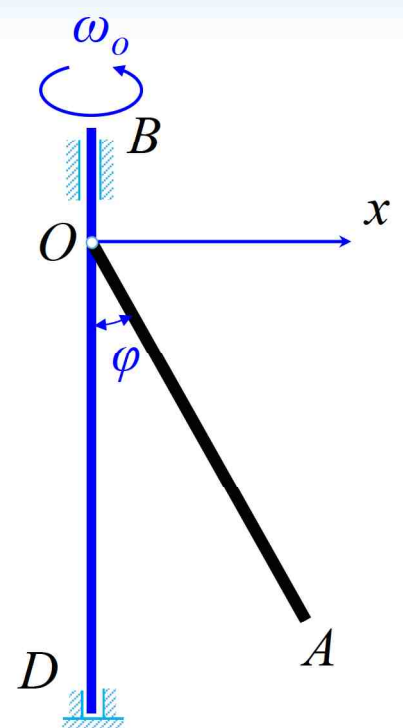
19

VÍ DỤ - THU GỌN HỆ LỰC QUÁN TÍNH

VD2: Thanh thẳng, mảnh, đồng chất, chiều dài $OA=L$, khối lượng M có thể quay quanh trục đi qua O và thẳng góc với mặt phẳng chứa thanh và trục quay BD . Thanh OA cùng quay đều quanh trục thẳng đứng BD với vận tốc góc không đổi ω_0 . Trong chế độ quay ổn định, thanh OA luôn làm với trục BD một góc không đổi φ .

a) Thu gọn hệ lực quán tính của cơ hệ về tâm O .

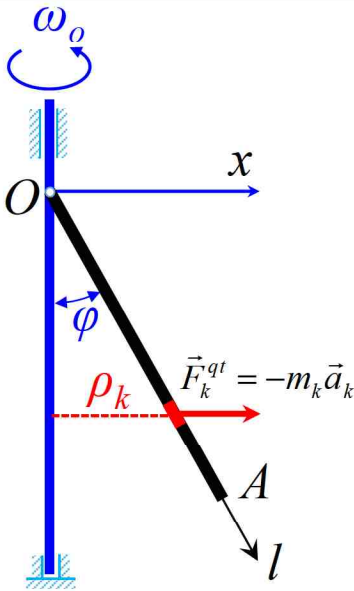
b) Tìm sự liên hệ giữa ω_0 và φ .



20

VÍ DỤ - THU GỌN HỆ LỰC QUÁN TÍNH

VD2: (a) Thu gọn hệ lực quán tính của cơ hệ về tâm O



$$\begin{aligned} \circ m_k &= \frac{m}{L} dl & \circ \vec{a}_k &= \vec{a}_k^n + \vec{a}_k^\tau = \vec{a}_k^n \\ \circ \rho_k &= l \sin \varphi & \circ \vec{a}_k &= -\rho_k \omega_0^2 \vec{i} = -l \omega_0^2 \sin \varphi \vec{i} \\ \circ \vec{F}_k^{qt} &= -m_k \vec{a}_k = -\frac{m}{L} dl (-l \omega_0^2 \sin \varphi \vec{i}) \\ \circ \vec{R}^{qt} &= \sum_{k=1}^{\infty} \vec{F}_k^{qt} = \frac{m}{L} \omega_0^2 \sin \varphi \vec{i} \int_0^L l dl \rightarrow \vec{R}^{qt} = \left(\frac{mL \omega_0^2}{2} \sin \varphi \right) \vec{i} \end{aligned}$$

Hoặc có thể tính $\vec{R}^{qt}$ như sau:

$$\vec{a}_c = \left(\frac{L}{2} \sin \varphi \right) \omega_0^2 (-\vec{i}) \rightarrow \vec{R}^{qt} = -m \vec{a}_c = \left(\frac{mL \omega_0^2}{2} \sin \varphi \right) \vec{i}$$

$$\begin{aligned} \circ \left| \vec{M}_{k/O}^{qt} \right| &= \left| \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{qt} \right| = \frac{m}{L} \omega_0^2 \sin \varphi l dl (l \cos \varphi) \\ \Rightarrow \left| \vec{M}_O^{qt} \right| &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \vec{M}_{k/O}^{qt} \right| = \frac{m}{L} \omega_0^2 \sin \varphi \cos \varphi \int_0^L l^2 dl = \frac{mL^2 \omega_0^2}{3} \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

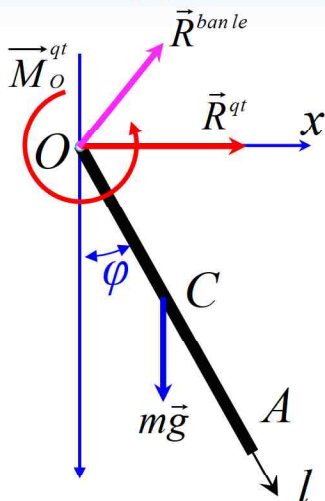
→ Vector moment quán tính chính của thanh khi thu gọn về tâm O là:

$$\left| \vec{M}_O^{qt} \right| = \frac{mL^2 \omega_0^2}{3} \sin \varphi \cos \varphi$$

21

VÍ DỤ - THU GỌN HỆ LỰC QUÁN TÍNH

VD2: (b) Tìm sự liên hệ giữa ω_0 và φ .



- Hệ lực thực tác dụng vào thanh OA :
 - Lực trọng trường: $\vec{P} = m\vec{g}$, tác dụng tại khối tâm C của thanh.
 - Phản lực tại chốt bản lề tại O
- Hệ lực quán tính của cơ hệ khi thu gọn về tâm O

$$\vec{R}^{qt} = \left(\frac{mL \omega_0^2}{2} \sin \varphi \right) \vec{i} \quad \text{và} \quad \vec{M}_O^{qt} = \frac{mL^2 \omega_0^2}{3} \sin \varphi \cos \varphi$$

- Theo nguyên lý D'Alembert: Hệ lực gồm *hệ lực thực* tác dụng vào thanh OA và *hệ lực quán tính* của thanh OA là một hệ lực cân bằng, nghĩa là:

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{R}^e + \vec{R}^{qt} = \vec{0} & (1) \\ \vec{M}_O = \vec{M}_O^e + \vec{M}_O^{qt} = \vec{0} & (2) \end{cases} \quad \text{Từ (2)} \rightarrow mg \left(\frac{L}{2} \sin \varphi \right) - \frac{mL^2 \omega_0^2}{3} \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

$$\rightarrow \cos \varphi = \frac{3g}{2L \omega_0^2}$$

22