

CƠ LÝ THUYẾT (Theoretical Mechanics)

Trương Quang Tri, Ts.

tri.truongquang@gmail.com

Office: Phòng 201B4 – PTN Cơ học Ứng dụng – BM Cơ Kỹ Thuật

Khoa Khoa học Ứng dụng – Đại học Bách Khoa Tp.HCM

2016.05.26

1

ĐỘNG LỰC HỌC

Mục tiêu:

Nghiên cứu qui luật chuyển động của: chất điểm, hệ chất điểm, vật rắn tuyệt đối dưới tác dụng của lực.

Nội dung:

1. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm và hệ chất điểm
2. Nguyên lý D'Alembert
3. Các định lý tổng quát động lực học
4. Nguyên lý di chuyển khả dĩ
5. Phương trình tổng quát động lực học và phương trình Lagrange loại II

2

ĐỘNG LỰC HỌC (Cont'd)

➤ Nguyên lý D'Alembert

Trong chuyển động của chất điểm, lực thực tác dụng lên chất điểm (F) và lực quán tính của nó (F_{qt}) là một hệ lực cân bằng.

➤ Nguyên lý di chuyển khả dĩ

Điều kiện cần và đủ để cơ hệ chịu liên kết giữ, dùng hình học và lý tưởng cân bằng ở vị trí đang xét là: Tổng công của tất cả lực hoạt động trên mọi di chuyển khả dĩ kể từ vị trí đó đều bằng không.

→ Tìm điều kiện cân bằng của cơ hệ, các thành phần phản lực tĩnh của cơ hệ.

➤ Phương trình tổng quát động lực học

➤ Phương trình Lagrange loại II

3

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

Mục đích:

- Xác định điều kiện cân bằng của cơ hệ
- Xác định các thành phần phản lực đặt vào cơ hệ
- Làm cơ sở để thiết lập phương trình vi phân chuyển động tổng quát của cơ hệ không tự do

Yêu cầu:

- Hiểu được khái niệm liên kết
- Hiểu vững định nghĩa di chuyển khả dĩ (DCKD)
- Biết xác định tọa độ suy rộng, bậc tự do của cơ hệ
- Vận dụng được NLDCKD để giải bài toán cân bằng hay chuyển động của cơ hệ

4

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

1. Các khái niệm:

1.1. Phương trình liên kết:

Xét cơ hệ không tự do, vị trí và vận tốc của các chất điểm thuộc cơ hệ sẽ thỏa mãn các mối quan hệ nào đó độc lập với điều kiện đầu và các lực hoạt động được gọi là các liên kết.

Tổng quát, các liên kết được mô tả bởi hàm số:

$$f_i(\vec{r}_k, \dot{\vec{r}}_k, t) \geq 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, S}$$

Trong đó:

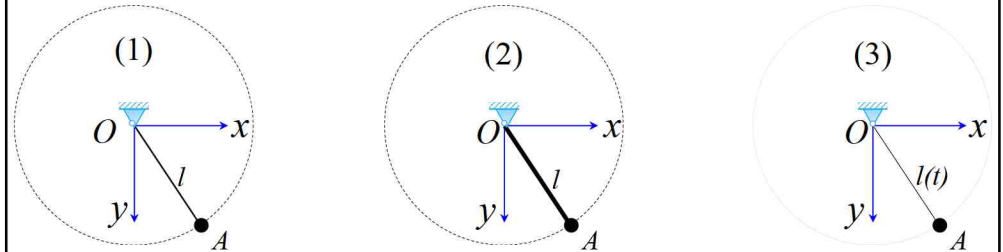
- N : Số chất điểm của cơ hệ
- S : Số liên kết của chất điểm thứ k
- $\vec{r}_k, \dot{\vec{r}}_k$ lần lượt là vị trí và vận tốc của chất điểm thứ k

5

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

1. Các khái niệm:

1.1. Phương trình liên kết: $f_i(\vec{r}_k, \dot{\vec{r}}_k, t) \geq 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, S}$



$$f(x, y, t) = x^2 + y^2 - l^2 \leq 0 \quad f(x, y, t) = x^2 + y^2 - l^2 = 0 \quad f(x, y, t) = x^2 + y^2 - l^2(t) = 0$$

1.2. Phân loại liên kết:

- Giữ/không giữ (LK 2 phía – PT / LK 1 phía – bất phương trình)
- Dừng/không dừng (PTLK không chứa rõ biến thời gian)
- Hô-lô-nôm và không hô-lô-nôm

LK Hô-lô-nôm: PTLK không chứa yếu tố vận tốc hoặc có chứa nhưng có thể loại bỏ được nhờ các phép tính tích phân.

6

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

2. Di chuyển khả dĩ – Bậc tự do của cơ hệ:

2.1. Di chuyển khả dĩ (DCKD)

Định nghĩa: Di chuyển khả dĩ của cơ hệ là tập di chuyển vô cùng bé của các chất điểm của cơ hệ từ vị trí đang xét sang vị trí lân cận mà vẫn thỏa các liên kết tại vị trí đang xét.

DCKD được ký hiệu: $\{\delta \vec{r}_k\}$ (phân biệt với di chuyển thật $d\vec{r}_k$)

» Nếu cơ hệ chịu LK: $f_i(\vec{r}_k) = 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, S}$

» Khi đó: $f_i(\vec{r}_k + \delta \vec{r}_k) = 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, S}, \quad \delta \vec{r}_k = \{\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k\}$

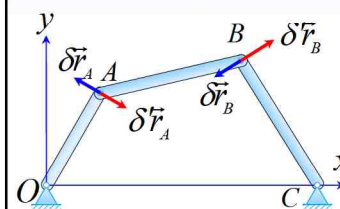
Nhận xét:

- DCKD chỉ có ý nghĩa về mặt hình học
- Không có quan hệ với các lực tác dụng lên cơ hệ (hệ lực không đổi)
- Thời gian t được xem như là 1 tham số khi cơ hệ thực hiện DCKD

7

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

2.1. Di chuyển khả dĩ (DCKD):



- Phương trình liên kết:

$$f_i(\vec{r}_k) = 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, S}$$

- Di chuyển khả dĩ của cơ hệ

$$\Rightarrow f_i(\vec{r}_k + \delta \vec{r}_k) = 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, S}$$

- Di chuyển khả dĩ của cơ hệ (của điểm A, B): $\{\delta \vec{r}_A, \delta \vec{r}_B, \delta \vec{r}_A, \delta \vec{r}_B\}$

- Di chuyển thật của cơ hệ:

$$\{d\vec{r}_A, d\vec{r}_B\} \equiv \{\delta \vec{r}_A, \delta \vec{r}_B\} \quad \text{hoặc} \quad \{d\vec{r}_A, d\vec{r}_B\} \equiv \{\delta \vec{r}_A, \delta \vec{r}_B\}$$

» Cơ hệ chịu liên kết dừng $\rightarrow \{\delta \vec{r}_k\} \subset \{d\vec{r}_k\}$

2.2. Bậc tự do của cơ hệ:

Là số tối đa các DCKD độc lập tuyến tính của cơ hệ.

8

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

2.1. Di chuyển khả dĩ (DCKD):

- Phương trình liên kết (tại thời điểm t):

$$f_i(\vec{r}_k) = 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, S}$$

- Di chuyển thật (từ thời điểm t đến $t+dt$): $d\vec{r}_k = \{dx_k, dy_k, dz_k\}$

$$f_i(\vec{r}_k + d\vec{r}_k) = 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, S}$$

$$\Rightarrow df_i = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial f_i}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial f_i}{\partial z_k} dz_k \right) + \frac{\partial f_i}{\partial t} dt = 0, \quad i = \overline{1, S}$$

- DCKD:

$$\delta f_i - \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial f_i}{\partial z_k} \delta z_k \right) = 0, \quad i = \overline{1, S}$$

2.2. Bậc tự do của cơ hệ:

Là số tối đa các DCKD độc lập tuyến tính của cơ hệ.

9

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

3. Tọa độ suy rộng:

Hệ tọa độ Descartes $Oxyz$:

- Vị trí của chất điểm M_k được xác định $(x_k, y_k, z_k) \rightarrow 3$ thông số
- Hệ (tự do) có N chất điểm: cần $3N$ thông số (x_k, y_k, z_k) , $k=1 \sim N$ để xác định vị trí của cơ hệ.
- Nếu không tự do (có s ptk) $\rightarrow$ **Số tọa độ độc lập: $r = 3N - s \rightarrow$**
Chọn r thông số thích hợp để xác định vị trí của cơ hệ.

Định nghĩa: Tọa độ suy rộng của cơ hệ là tập các thông số đủ để xác định vị trí của cơ hệ trong một hệ quy chiếu xác định, được ký hiệu là $\{q_i\}$ ($i=1 \sim r$).

» Tọa độ suy rộng có thể tọa độ Descartes của các chất điểm thuộc cơ hệ, có thể là tọa độ cong, có thể là góc quay, ...

10

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

3. Tọa độ suy rộng:

- Các tọa độ Descartes của các chất điểm đều phải được biểu diễn qua r tọa độ suy rộng $\{q_1, q_2, \dots, q_r\}$

$$\begin{cases} x_k = x_k(q_1, q_2, \dots, q_r) \\ y_k = y_k(q_1, q_2, \dots, q_r) \\ z_k = z_k(q_1, q_2, \dots, q_r) \end{cases} \Rightarrow \delta \vec{r}_k = \{\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k\}$$

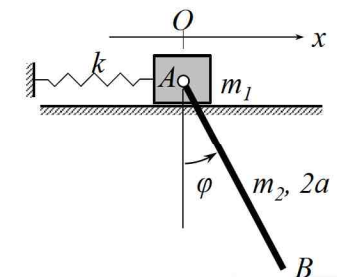
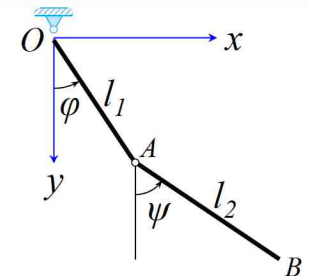
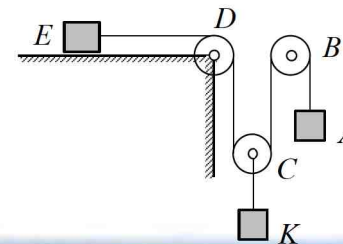
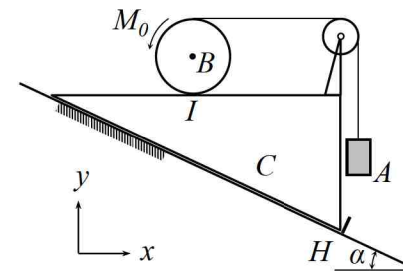
- Với:

$$\begin{cases} \delta x_k = \sum_{j=1}^r \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \delta q_j \\ \delta y_k = \sum_{j=1}^r \frac{\partial y_k}{\partial q_j} \delta q_j \\ \delta z_k = \sum_{j=1}^r \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \delta q_j \end{cases}$$

11

VÍ DỤ

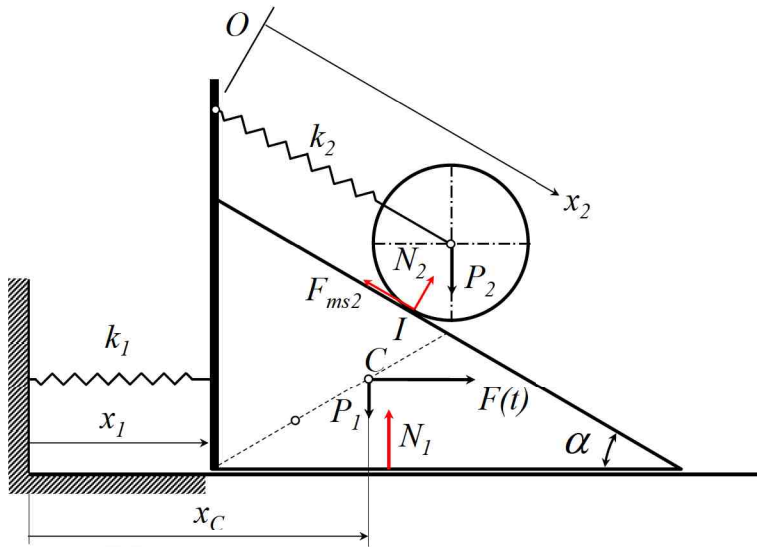
VD: Xác định tọa độ suy rộng (đủ)



12

VÍ DỤ

VD: Xác định tọa độ suy rộng (đủ)



13

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

4. Lực suy rộng:

Xét cơ hệ N chất điểm chịu tác dụng của các lực hoạt động $(\vec{F}_k^a)$. Cho cơ hệ thực hiện một di chuyển khả dĩ $\{\delta \vec{r}_k\}$, các lực $(\vec{F}_k^a)$ sẽ thực hiện công trên độ dời đó:

$$\sum \delta A_k = \sum_1^N \vec{F}_k^a \delta \vec{r}_k$$

được gọi là công khả dĩ.

» Chọn hệ tọa độ suy rộng $\{q_i\}$, $i = 1, r$

$$\delta \vec{r}_k = \delta \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_r) = \sum_{i=1}^r \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i$$

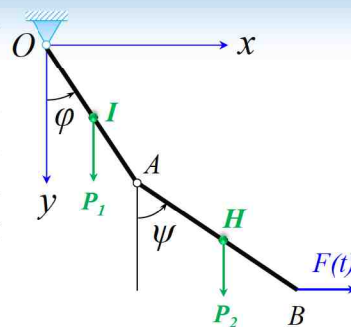
$$\sum \delta A_k = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^a \delta \vec{r}_k = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^a \sum_{i=1}^r \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{k=1}^N \vec{F}_k^a \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

$$\sum \delta A_k = \sum_{i=1}^r (Q_i) \delta q_i; \quad Q_i = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^a \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$$

15

VÍ DỤ XÁC ĐỊNH LỰC SUY RỘNG

VD1: Cho cơ hệ như hình vẽ, hai thanh mảnh đồng chất khối lượng phân bố đều. Thanh OA có khối lượng m_1 , chiều dài $2a$; thanh AB có khối lượng m_2 , chiều dài $2b$. Chọn tọa độ suy rộng đủ của cơ hệ là φ, ψ như hình vẽ. Xác định lực suy rộng tương ứng của hai TDSR trên.



$$\delta \vec{r}_k = \delta \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_r) = \sum_{i=1}^r \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i$$

$$\sum \delta A_k = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^a \delta \vec{r}_k = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{k=1}^N \vec{F}_k^a \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

$$\sum \delta A_k = \sum_{i=1}^r (Q_i) \delta q_i;$$

$$Q_i = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^a \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$$

Trong đó: $r = \text{số bậc tự do} = \text{số TDSR đủ}$

16

VÍ DỤ XÁC ĐỊNH LỰC SUY RỘNG

VD1: (Cách 1)

$$Q_i = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^a \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$$

- Lực hoạt động: $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{F}) \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$
- Vector vị trí của các điểm đặt lực tương ứng:

$$\vec{r}_1 = a \sin \varphi \vec{i} + a \cos \varphi \vec{j}$$

$$\vec{r}_2 = (2a \sin \varphi + b \sin \psi) \vec{i} + (2a \cos \varphi + b \cos \psi) \vec{j}$$

$$\vec{r}_3 = 2(a \sin \varphi + b \sin \psi) \vec{i} + 2(a \cos \varphi + b \cos \psi) \vec{j}$$

- Các đạo hàm riêng phần theo các TDSR (φ, ψ) :

$$\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_1} = \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \varphi} = a \cos \varphi \vec{i} - a \sin \varphi \vec{j}$$

$$\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_1} = \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \varphi} = 2a \cos \varphi \vec{i} - 2a \sin \varphi \vec{j}$$

$$\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_2} = \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \psi} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_2} = \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \psi} = b \cos \psi \vec{i} - b \sin \psi \vec{j}$$

$$\frac{\partial \vec{r}_3}{\partial q_1} = \frac{\partial \vec{r}_3}{\partial \varphi} = 2a \cos \varphi \vec{i} - 2a \sin \varphi \vec{j};$$

$$\frac{\partial \vec{r}_3}{\partial q_2} = \frac{\partial \vec{r}_3}{\partial \psi} = 2b \cos \psi \vec{i} - 2b \sin \psi \vec{j}$$

17

VÍ DỤ XÁC ĐỊNH LỰC SUY RỘNG

VD1: (Cách 1) $Q_i = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^a \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$

$$Q_1 = Q_\varphi = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^a \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \varphi} = -P_1 a \sin \varphi - 2P_2 a \sin \varphi + 2Fa \cos \varphi$$

$$Q_2 = Q_\psi = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^a \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \psi} = -P_2 b \sin \psi + 2bF \cos \psi$$

$$Q_\varphi = -aP_1 \sin \varphi - 2aP_2 \sin \varphi + 2aF \cos \varphi$$

$$Q_\psi = -bP_2 \sin \psi + 2bF \cos \psi$$

18

VÍ DỤ XÁC ĐỊNH LỰC SUY RỘNG

VD1: (Cách 2)

$$\sum \delta A_k = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^a \delta \vec{r} = \sum_{i=1}^r (Q_i) \delta q_i$$

$$\sum \delta A_k = P_1 \delta y_1 + P_2 \delta y_2 + F \delta x_F$$

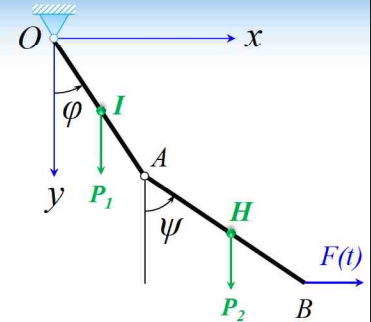
- $y_1 = a \cos \varphi \Rightarrow \delta y_1 = -a \sin \varphi \delta \varphi$
- $y_2 = 2a \cos \varphi + b \cos \psi \Rightarrow \delta y_2 = -2a \sin \varphi \delta \varphi - b \sin \psi \delta \psi$
- $x_F = 2a \sin \varphi + 2b \sin \psi \Rightarrow \delta x_F = 2a \cos \varphi \delta \varphi + 2b \cos \psi \delta \psi$

$$\sum \delta A_k = -P_1 a \sin \varphi \delta \varphi - P_2 (2a \sin \varphi \delta \varphi + b \sin \psi \delta \psi) + F (2a \cos \varphi \delta \varphi + 2b \cos \psi \delta \psi)$$

$$\sum \delta A_k = \underbrace{-(P_1 a \sin \varphi + P_2 2a \sin \varphi - F 2a \cos \varphi)}_{Q_\varphi} \delta \varphi - \underbrace{(P_2 b \sin \psi - F 2b \cos \psi)}_{Q_\psi} \delta \psi$$

$$Q_\varphi = -aP_1 \sin \varphi - 2aP_2 \sin \varphi + 2aF \cos \varphi$$

$$Q_\psi = -bP_2 \sin \psi + 2bF \cos \psi$$

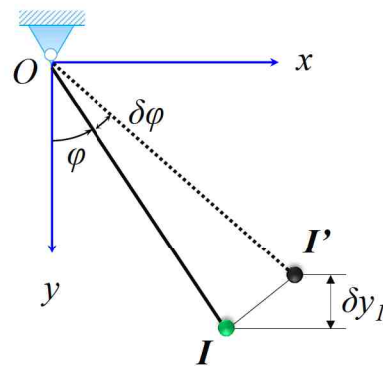
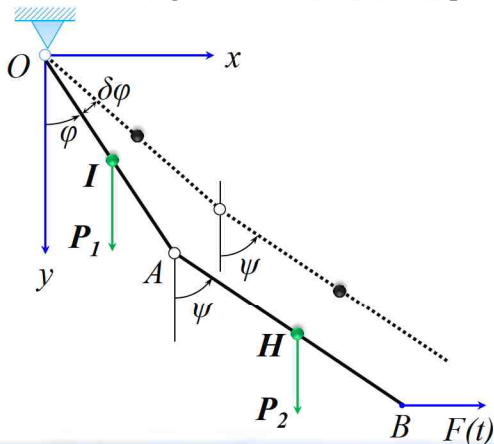


19

VÍ DỤ XÁC ĐỊNH LỰC SUY RỘNG

VD1: (Cách 3) $\sum \delta A_k = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^a \delta \vec{r} = \sum_{i=1}^r (Q_i) \delta q_i$

- Chọn $\delta q_i \neq 0$ và $\delta q_j = 0$ ($j \neq i$): $\delta q_1 = \delta \varphi \neq 0$ và $\delta q_2 = \delta \psi = 0$
 $\Rightarrow \delta y_1 = -a \sin \varphi \delta \varphi, \quad \delta y_2 = -2a \sin \varphi \delta \varphi, \quad \delta x_F = 2a \cos \varphi \delta \varphi$



20

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ ĐĨ

5. Liên kết lý tưởng:

Cơ hệ được gọi là chịu liên kết lý tưởng nếu tổng công của tất cả các phản lực liên kết ($\mathbf{R}_k$) đặt vào cơ hệ trên mọi DCKD đều bằng không:

$$\sum \delta A_r = \sum_{k=1}^N \vec{R}_k \delta \vec{r}_k = 0 \quad \forall \{\delta \vec{r}_k\}$$

Một số trường hợp cơ hệ chịu LK lý tưởng:

- Các cơ hệ gồm vật rắn, dây mềm không dẫn, bỏ qua ma sát ở trục quay và sự trượt tương đối của dây với ròng rọc (puli).
- Hai vật trượt không ma sát với nhau hoặc nổi bản lề không ma sát với nhau.
- Nếu tồn tại thành phần phản lực sinh công trên DCKD, ta xem thành phần lực này thuộc các lực hoạt động, khi đó cơ hệ được khảo sát như chịu liên kết lý tưởng.

21

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

6. Nguyên lý di chuyển khả dĩ:

Phát biểu: Điều kiện cần và đủ để cơ hệ chịu liên kết giữ, dừng hình học và lý tưởng cân bằng ở vị trí đang xét là: Tổng công của tất cả lực hoạt động trên mọi di chuyển khả dĩ kể từ vị trí đang xét đều bằng không:

$$\sum \delta A_k^a = \sum_1^N \vec{F}_k^a \delta \vec{r}_k = 0 \quad \forall \{\delta \vec{r}_k\} \quad \text{Hay:} \quad \sum \delta A_k^a = \sum_{i=1}^r Q_i \delta q_i = 0 \quad \forall \{\delta q_i\}$$

Do các δq_i độc lập tuyến tính, nên $Q_i = 0, i=1 \sim r$.

Ứng dụng:

- Tìm điều kiện cân bằng của cơ hệ: VD 13.8~13.10 (Cơ lý thuyết - Vũ Duy Cường)
- Tìm các thành phần phản lực tĩnh của cơ hệ: VD 13.11~13.13

22

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

Hướng giải quyết chung:

1. Bậc tự do $\rightarrow$ TĐSR
2. Cơ hệ chịu liên kết giữ, dừng và lý tưởng?
3. Xác định (liệt kê) các lực hoạt động
4. Cho cơ hệ 1 DCKD (dùng quan hệ động học nếu cần)
5. Tính tổng công khả dĩ của các lực hoạt động trên DCKD $\rightarrow$ Các lực suy rộng
6. Áp dụng NLĐCKD: Cho các lực suy rộng đồng thời bằng 0 (Điều kiện cơ hệ cân bằng tại vị trí đang xét) $\rightarrow$ kết quả.

23

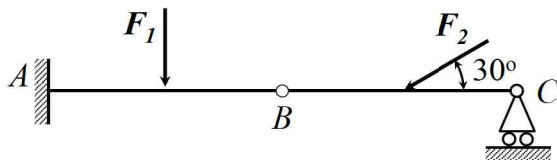
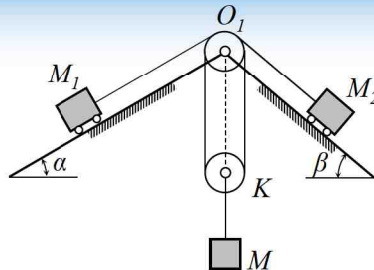
NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

VD 1: Con lắc kép (Vị trí cân bằng)

VD 2: Hệ vật rắn, puli, dây (Quan hệ giữa các tải)

VD 3: Máy ép vít (Quan hệ giữa các lực)

VD 4: Hệ dầm chịu lực (Phản lực liên kết)



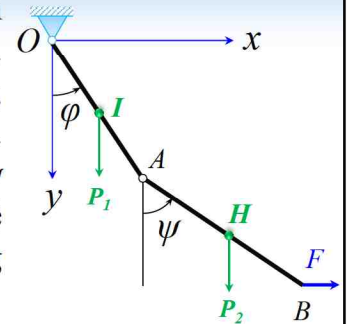
Tư duy:

Ví dụ 3-4, 3-5, 3-6, 3-7, Đỗ Sanh, Lê Doãn Hồng, Bài tập Cơ học, tập 2, NXBGDVN, 2013.

24

VÍ DỤ XÁC ĐỊNH LỰC SUY RỘNG

VD1: Cho cơ hệ như hình vẽ, hai thanh mảnh đồng chất khối lượng phân bố đều. Thanh OA có khối lượng m_1 , chiều dài $2a$; thanh AB có khối lượng m_2 , chiều dài $2b$. Chọn tọa độ suy rộng đủ của cơ hệ là φ, ψ như hình vẽ. Xác định các góc φ, ψ khi cơ hệ cân bằng dưới tác dụng của các lực trọng trường P_1, P_2 và lực kéo F như hình vẽ.



» Như đã xác định ở phần trước, ta có:

$$Q_\psi = -bP_2 \sin \psi + 2bF \cos \psi \quad \text{và} \quad Q_\varphi = -aP_1 \sin \varphi - 2aP_2 \sin \varphi + 2aF \cos \varphi$$

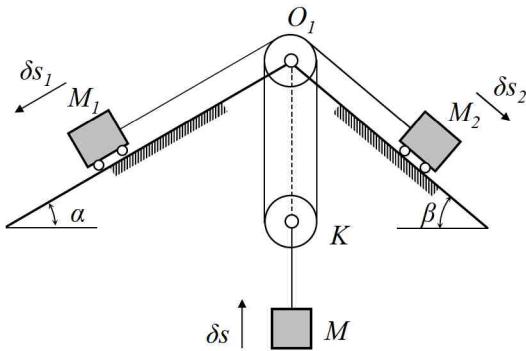
» Do cơ hệ cân bằng $\rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_\psi = 0 \\ Q_\varphi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -bP_2 \sin \psi + 2bF \cos \psi = 0 \\ -aP_1 \sin \varphi - 2aP_2 \sin \varphi + 2aF \cos \varphi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan \psi = 2F / P_2 \\ \tan \varphi = 2F / (P_1 + 2P_2) \end{cases}$$

25

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

VD2: Hệ vật rắn, puli (pulley), dây

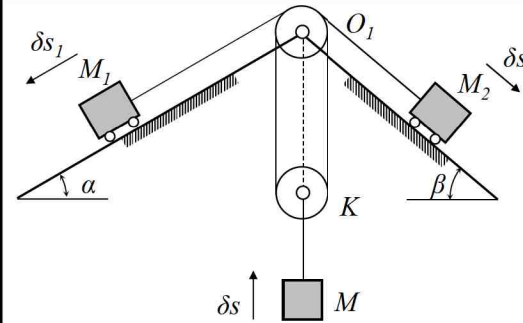


- Bậc tự do 2 $\rightarrow$ TĐSR: s_1, s_2
 - Chịu LK: Giữ, dừng, lý tưởng?
 - Lực hoạt động: P_1, P_2, P
-
- Cho cơ hệ 1 DCKD: (Quan hệ động học nếu có)
 - Tổng công khả dĩ của các lực hoạt động trên DCKD

- Tính lực suy rộng
- Áp dụng NLDCKD: ĐK cân bằng $\rightarrow$ Các lực suy rộng đồng thời bằng 0.

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

VD2: Tính lực suy rộng:



❖ Tính lực suy rộng Q_{s1} :

- Cho cơ hệ 1 DCKD:
 $\delta s_1 \neq 0$ và $\delta s_2 = 0$.
- Tổng công khả dĩ của các lực hoạt động trên DCKD:

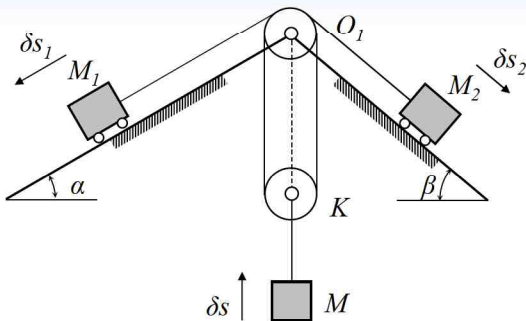
Quan hệ động học: M_1 trượt xuống 1 đoạn δs_1 , vật M đi lên 1 đoạn $\delta s = \delta s_1 / 2$ (lưu ý rằng $\delta s_2 = 0$).

$\rightarrow$ Tổng công khả dĩ:

$$\sum \delta A_k^a = P_1(\delta s_1 \sin \alpha) + P_2(0) - P\left(\frac{\delta s_1}{2}\right) = \left(P_1 \sin \alpha - \frac{P}{2}\right) \delta s_1 \Rightarrow Q_{s1} = P_1 \sin \alpha - \frac{P}{2}$$

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

VD2: Tính lực suy rộng:



❖ Tính lực suy rộng Q_{s2} :

- Cho cơ hệ 1 DCKD:
 $\delta s_1 = 0$ và $\delta s_2 \neq 0$.
- Tổng công khả dĩ của các lực hoạt động trên DCKD:

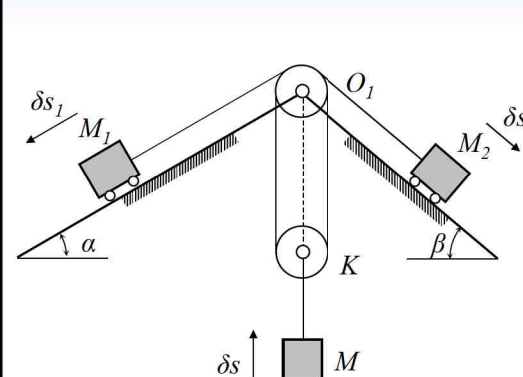
Quan hệ động học: M_2 trượt xuống 1 đoạn δs_2 , vật M đi lên 1 đoạn $\delta s = \delta s_2 / 2$ (lưu ý rằng $\delta s_1 = 0$).

$\rightarrow$ Tổng công khả dĩ:

$$\sum \delta A_k^a = P_1(0) + P_2(\delta s_2 \sin \beta) - P\left(\frac{\delta s_2}{2}\right) = \left(P_2 \sin \beta - \frac{P}{2}\right) \delta s_2 \Rightarrow Q_{s2} = P_2 \sin \beta - \frac{P}{2}$$

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

VD2: Xác định quan hệ giữa các tải để cơ hệ cân bằng?



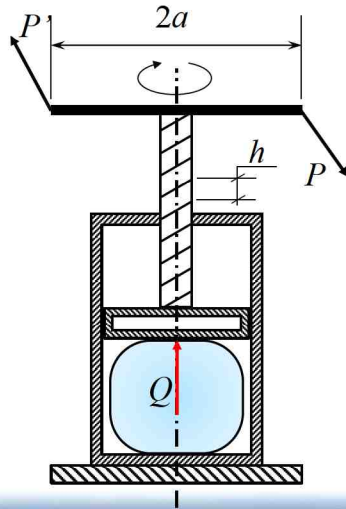
❖ Cơ hệ cân bằng, theo NLDCKD, ta có:

$$\begin{cases} Q_{s1} = 0 \\ Q_{s2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 \sin \alpha - \frac{P}{2} = 0 \\ P_2 \sin \beta - \frac{P}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_1 = \frac{P}{2 \sin \alpha} \\ P_2 = \frac{P}{2 \sin \beta} \end{cases}$$

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

VD3: Máy ép vít, biết tay đòn a , bước vít h , bỏ qua ma sát. Dưới tác dụng của ngẫu lực (P, P') và phản lực của mẫu ép, cơ hệ đang cân bằng. Tìm quan hệ giữa lực P và lực ép Q .

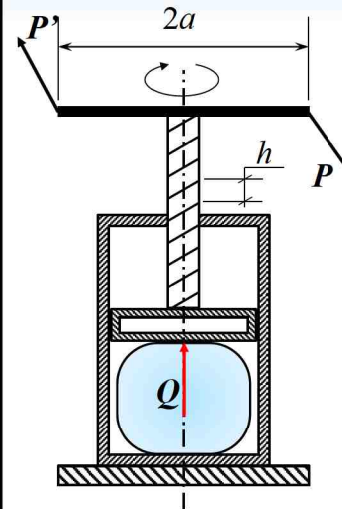


[2] Đỗ Sanh (chủ biên), Lê Doan Hồng, Cơ học, Tập 2: Động lực học, tái bản lần thứ 15, NXBGD Việt Nam, 2013.

30

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

VD3:



- Cơ hệ một bậc tự do, chịu liên kết giữ, dừng và lý tưởng $\rightarrow$ chọn tọa độ suy rộng là góc quay φ .
- Lực hoạt động P, P', Q
- Cho vít 1 di chuyển khả dĩ $\delta\varphi$, bàn ép di chuyển 1 đoạn δh .

$$\delta h = \frac{h}{2\pi} \delta\varphi$$

- Tổng công khả dĩ của các lực hoạt động trên di chuyển khả dĩ

$$\sum \delta A_k^a = (2aP)\delta\varphi - Q\left(\frac{h}{2\pi}\delta\varphi\right) \Rightarrow Q_\varphi = \dots$$

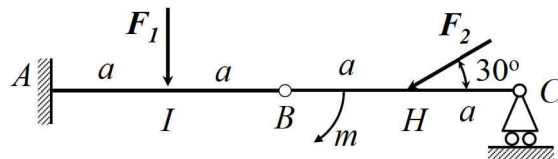
- Cơ hệ cân bằng: $Q_\varphi = 0 \Rightarrow P = Q \frac{h}{4\pi a}$

[2] Đỗ Sanh (chủ biên), Lê Doan Hồng, Cơ học, Tập 2: Động lực học, tái bản lần thứ 15, NXBGD Việt Nam, 2013.

31

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

VD 4: Hệ dầm chịu lực. Xác định các phản lực liên kết.



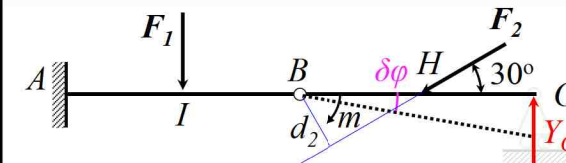
[1] Vũ Duy Cường, Cơ lý thuyết, NXB ĐHQG Tp.HCM, 2011.

[2] Đỗ Sanh, Cơ học, Tập 2: Động lực học, tái bản lần thứ 16, NXBGD Việt Nam, 2013.

32

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

VD 4: Xác định các phản lực liên kết, Y_C



- DCKD:

- $\delta\varphi \neq 0$,
- tất cả các di chuyển khả dĩ còn lại bằng 0.

- Công khả dĩ của tất cả các lực hoạt động:

$$\begin{aligned} \sum \delta A_k^a &= \delta A(\vec{m}) + \delta A(\vec{F}_2) + \delta A(\vec{Y}_C) \\ &= m\delta\varphi + (F_2 \cdot BH \cdot \sin 30^\circ)\delta\varphi - (Y_C \cdot BC)\delta\varphi \\ &= (m + F_2 \cdot a \cdot \frac{1}{2} - Y_C \cdot 2a)\delta\varphi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Q_{\varphi(BC)} = m + \frac{a}{2} F_2 - 2aY_C$$

- Cơ hệ đang cân bằng:

$$\Rightarrow Q_{\varphi(BC)} = 0 \Rightarrow m + \frac{a}{2} F_2 - 2aY_C = 0 \Rightarrow Y_C = \frac{2m + aF_2}{4a}$$

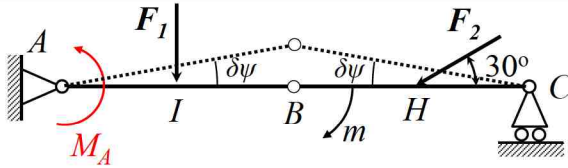
[1] Vũ Duy Cường, Cơ lý thuyết, NXB ĐHQG Tp.HCM, 2011.

[2] Đỗ Sanh, Cơ học, Tập 2: Động lực học, tái bản lần thứ 16, NXBGD Việt Nam, 2013.

35

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

VD 4: Xác định các phản lực liên kết, M_A



▪ DCKD: $\delta\psi \neq 0$, $\delta\phi = \delta\psi$,
 $\delta x_A = 0$, $\delta y_A = 0$.

▪ Công khả dĩ của tất cả các lực hoạt động:

$$\begin{aligned}\sum \delta A_k^a &= \delta A(\vec{M}_A) + \delta A(\vec{F}_1) + \delta A(\vec{m}) + \delta A(\vec{F}_2) + \delta A(\vec{Y}_C) \\ &= M_A \delta\psi - (F_1 \cdot AI) \delta\psi + m \delta\psi - (F_2 \cdot HC \cdot \sin 30^\circ) \delta\psi + 0 \\ &= (M_A - F_1 a + m - F_2 \cdot a \cdot \frac{1}{2}) \delta\psi \Rightarrow Q_{\psi(AB)} = M_A - aF_1 + m - \frac{a}{2} F_2\end{aligned}$$

▪ Cơ hệ đang cân bằng:

$$\Rightarrow Q_{\psi(AB)} = 0 \Rightarrow M_A - aF_1 + m - \frac{a}{2} F_2 = 0 \Rightarrow M_A = aF_1 - m + \frac{a}{2} F_2$$

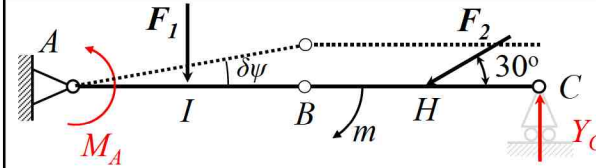
[1] Vũ Duy Cường, Cơ lý thuyết, NXB ĐHQG Tp.HCM, 2011.

[2] Đỗ Sanh, Cơ học, Tập 2: Động lực học, tái bản lần thứ 16, NXBGD Việt Nam, 2013.

36

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

VD 4: Xác định các phản lực liên kết, M_A (cách 2)



▪ DCKD:
 $\delta\psi \neq 0$,
 $\delta\phi = 0$,
 $\delta x_A = 0$,
 $\delta y_A = 0$.

▪ Công khả dĩ của tất cả các lực hoạt động:

$$\begin{aligned}\sum \delta A_k^a &= \delta A(\vec{M}_A) + \delta A(\vec{F}_1) + \delta A(\vec{m}) + \delta A(\vec{F}_2) + \delta A(\vec{Y}_C) \\ &= M_A \delta\psi - (F_1 \cdot AI) \delta\psi + m \cdot 0 - (F_2 \cdot \sin 30^\circ)(AB \cdot \delta\psi) + Y_C (AB \cdot \delta\psi) \\ &= (M_A - F_1 a - \frac{F_2}{2} \cdot 2a + \frac{2m + aF_2}{4a} \cdot 2a) \delta\psi \Rightarrow Q_{\psi(AB)} = M_A - aF_1 + m - \frac{a}{2} F_2\end{aligned}$$

▪ Cơ hệ đang cân bằng:

$$\Rightarrow Q_{\psi(AB)} = 0 \Rightarrow M_A - aF_1 + m - \frac{a}{2} F_2 = 0 \Rightarrow M_A = aF_1 - m + \frac{a}{2} F_2$$

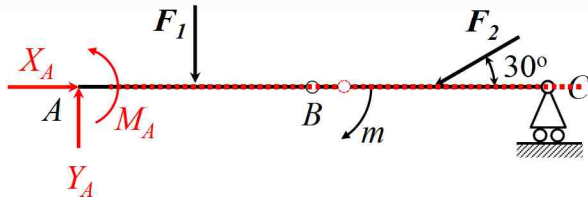
[1] Vũ Duy Cường, Cơ lý thuyết, NXB ĐHQG Tp.HCM, 2011.

[2] Đỗ Sanh, Cơ học, Tập 2: Động lực học, tái bản lần thứ 16, NXBGD Việt Nam, 2013.

37

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

VD 4: Xác định các phản lực liên kết, X_A



▪ DCKD:
 $\delta\psi = 0$,
 $\delta\phi = 0$,
 $\delta x_A \neq 0$,
 $\delta y_A = 0$.

▪ Công khả dĩ của tất cả các lực hoạt động:

$$\begin{aligned}\sum \delta A_k^a &= \delta A(\vec{X}_A) + \delta A(\vec{F}_2) \\ &= X_A \delta x_A - (F_2 \cos 30^\circ) \delta x_A \\ &= (X_A - \frac{F_2 \sqrt{3}}{2}) \delta x_A \Rightarrow Q_{x_A} = X_A - \frac{\sqrt{3}}{2} F_2\end{aligned}$$

▪ Cơ hệ đang cân bằng:

$$\Rightarrow Q_{x_A} = 0 \Rightarrow X_A - \frac{\sqrt{3}}{2} F_2 = 0 \Rightarrow X_A = \frac{\sqrt{3}}{2} F_2$$

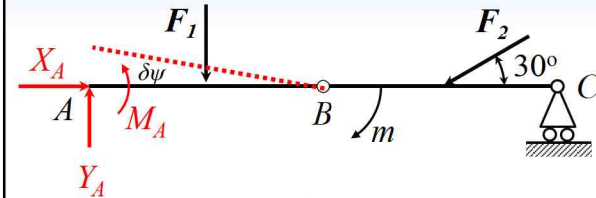
[1] Vũ Duy Cường, Cơ lý thuyết, NXB ĐHQG Tp.HCM, 2011.

[2] Đỗ Sanh, Cơ học, Tập 2: Động lực học, tái bản lần thứ 16, NXBGD Việt Nam, 2013.

38

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

VD 4: Xác định các phản lực liên kết, Y_A



▪ DCKD:
 $\delta\psi \neq 0$,
 $\delta\phi = 0$,
 $\delta x_A = 0$,
 $\delta y_A = 2a \delta\psi$.

▪ Công khả dĩ của tất cả các lực hoạt động:

$$\begin{aligned}\sum \delta A_k^a &= \delta A(\vec{Y}_A) + \delta A(\vec{M}_A) + \delta A(\vec{F}_1) \\ &= Y_A \delta y_A - M_A \frac{\delta y_A}{2a} - F_1 \frac{\delta y_A}{2} \\ &= (Y_A - \frac{aF_1 - m + \frac{a}{2} F_2}{2a} - \frac{F_1}{2}) \delta y_A \Rightarrow Q_{y_A} = Y_A - F_1 - \frac{F_2}{4} + \frac{m}{2a}\end{aligned}$$

▪ Cơ hệ đang cân bằng:

$$\Rightarrow Q_{y_A} = 0 \Rightarrow Y_A - F_1 - \frac{F_2}{4} + \frac{m}{2a} = 0 \Rightarrow Y_A = F_1 + \frac{F_2}{4} - \frac{m}{2a}$$

[1] Vũ Duy Cường, Cơ lý thuyết, NXB ĐHQG Tp.HCM, 2011.

[2] Đỗ Sanh, Cơ học, Tập 2: Động lực học, tái bản lần thứ 16, NXBGD Việt Nam, 2013.

39

CHUẨN BỊ Ở NHÀ

- ❖ Xem trước các ví dụ của chương 13, giáo trình Cơ học lý thuyết, Vũ Duy Cường.
- ❖ Đọc trước chương 14: Phương trình tổng quát Động lực học và Phương trình Lagrange loại II.

Tue, June 7, 2016

40

ĐỘNG LỰC HỌC (Cont'd)

➤ Nguyên lý D'Alembert

Trong chuyển động của chất điểm, lực thực tác dụng lên chất điểm (F) và lực quán tính của nó (F_{qt}) là một hệ lực cân bằng.

➤ Nguyên lý di chuyển khả dĩ

Điều kiện cần và đủ để cơ hệ chịu liên kết giữ, dừng hình học và lý tưởng cân bằng ở vị trí đang xét là: Tổng **công** của tất cả **lực hoạt động** trên mọi **di chuyển khả dĩ** kể từ **vị trí đều** bằng không.

→ Tìm điều kiện cân bằng của cơ hệ, các thành phần phản lực tĩnh của cơ hệ.

➤ Phương trình tổng quát động lực học

➤ Phương trình Lagrange loại II

41

PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT ĐỘNG LỰC HỌC

Xét chất điểm M_k của cơ hệ **chịu liên kết giữ, dừng, hình học và lý tưởng**, các tác dụng lên chất điểm gồm:

- Lực thực: $\vec{F}_k$
- Phản lực liên kết: $\vec{R}_k$

Lực quán tính của chất điểm: $\vec{F}_k^{qt} = -m_k \vec{W}_k$

Theo nguyên lý D'Alembert: $\vec{F}_k + \vec{R}_k + \vec{F}_k^{qt} = \vec{0}$

Phương trình tổng quát của động lực học:

$$\sum_1^N (\vec{F}_k - m_k \vec{W}_k) \delta \vec{r}_k = 0 \quad \forall \{\delta \vec{r}_k\}, \quad \delta \vec{r}_k \text{ là di chuyển khả dĩ tùy ý.}$$

Hay:
$$\sum_1^N [(F_{kx} - m_k \ddot{x}_k) \delta x_k + (F_{ky} - m_k \ddot{y}_k) \delta y_k + (F_{kz} - m_k \ddot{z}_k) \delta z_k] = 0$$

→ Phương pháp tĩnh giải tích – động lực^(*).

42

VÍ DỤ

Áp dụng:

- Biểu diễn các đại lượng gia tốc cần thiết trên hình vẽ của mô hình.
- Đặt các lực quán tính lên cơ hệ, nếu là vật rắn thì đặt lực quán tính thu gọn.
- Cho cơ hệ 1 di chuyển khả dĩ để thiết lập phương trình tổng quát động lực học của cơ hệ.
 - ✓ Hệ 1 bậc tự do: mọi di chuyển khả dĩ biểu diễn qua 1 tham số duy nhất → Lập được 1 phương trình.
 - ✓ Hệ r bậc tự do: Cho hệ thực hiện r DCKD độc lập tuyến tính → Thiết lập được r phương trình.

Xem VD 14.1 ~14.3 – Cơ lý thuyết – Vũ Duy Cường

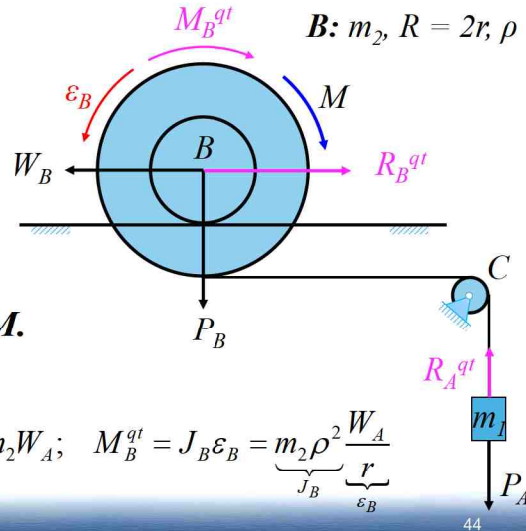
43

VÍ DỤ

VD Hệ 1 bậc tự do:

Cho cơ hệ chịu lực như hình vẽ, dây mềm, bỏ qua ma sát và khối lượng dây. Xác định gia tốc của tải A.

- **Hệ gồm:** A, B, dây mềm, ròng rọc C
- Hệ có liên kết giữ, dừng, hình học và lý tưởng → Áp dụng được PTTQ ĐLH
- **Lực hoạt động:** P_A, P_B, M .
- **Lực quán tính:**



$$R_A^{qt} = m_1 W_A; \quad R_B^{qt} = m_2 W_B = m_2 W_A; \quad M_B^{qt} = J_B \epsilon_B = \underbrace{m_2 \rho^2}_{J_B} \underbrace{\frac{W_A}{r}}_{\epsilon_B}$$

44

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II

Xét cơ hệ chịu liên kết giữ, dừng, hình học và lý tưởng. Biểu diễn **phương trình tổng quát động lực học của cơ hệ**:

$$\sum_1^N (\vec{F}_k - m_k \vec{W}_k) \delta \vec{r}_k = 0 \quad \forall \{\delta \vec{r}_k\} \Leftrightarrow \sum_1^N m_k \vec{W}_k \delta \vec{r}_k = \sum_1^N \vec{F}_k \delta \vec{r}_k \quad \forall \{\delta \vec{r}_k\}$$

Thông qua các tọa độ suy rộng đủ $\{q_i\}$ ($i=1 \sim r$, có r bậc tự do), ta được:

$$\sum_1^r \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_1^r Q_i \delta q_i, \quad \text{trong đó:} \quad T = \sum_1^N \frac{1}{2} m_k V_k^2$$

Do các δq_i là độc lập tuyến tính, do đó:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

Phương trình trên được gọi là phương trình Lagrange loại II.

VÍ DỤ

VD Hệ 1 bậc tự do:

- Cho cơ hệ thực hiện 1 DCKD: Tải A đi xuống δh thẳng đứng

→ Độ dời tương của B:

✓ Sang trái: δh

✓ Xoay: $\delta \varphi = \delta h/r$, ngược chiều KĐH

- Tổng công của các lực hoạt động và các lực quán tính:

$$\begin{aligned} \sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^{qt} &= \left[(m_1 g) \delta h + (m_2 g) 0 - (M) \frac{\delta h}{r} \right] \\ &+ \left[-(m_1 W_A) \delta h - (m_2 W_A) \delta h - (m_2 \rho^2 \frac{W_A}{r}) \frac{\delta h}{r} \right] = 0 \\ \Rightarrow \left[m_1 g - \frac{M}{r} - (m_1 + m_2 + m_2 \frac{\rho^2}{r^2}) W_A \right] \delta h &= 0 \Rightarrow W_A = \frac{m_1 g r - M}{r(m_1 + m_2 + m_2 \frac{\rho^2}{r^2})} \end{aligned}$$

45

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II

Nếu các lực hoạt động là lực có thế, khi đó:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad \text{trong đó:} \quad \Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_r)$$

Phương trình Lagrange được viết lại dưới dạng:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right) = 0$$

Hay:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Trong đó: $L = T - \Pi$ được gọi là hàm Lagrange.

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II

Áp dụng cho cơ hệ chịu liên kết giữ, dừng và hình học

- 1) Xác định bậc tự do $\rightarrow$ chọn $\{q_i\}$ đủ.
- 2) Xét liên kết của cơ hệ:
 - Liên kết lý tưởng: Biểu diễn tất cả các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ.
 - LK không lý tưởng: Xem các thành phần PLLK không lý tưởng là các lực hoạt động.
- 3) Tính Q_i . $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$
- 4) Tính T .
- 5) Áp dụng PT Lagrange.

50

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II – VÍ DỤ

1. Xem các VD: Cơ học lý thuyết – Vũ Duy Cường
2. Xem các VD 5.3, 5.4, 5.5 – Bài tập cơ học (tập 2) – Đỗ Sanh.

VD1:

VD2:

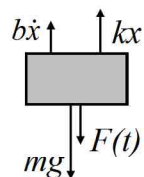
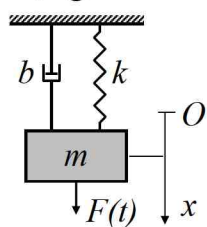
VD3:

VD4:

51

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II – VÍ DỤ

VD1: Cho cơ hệ như hình vẽ. Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.



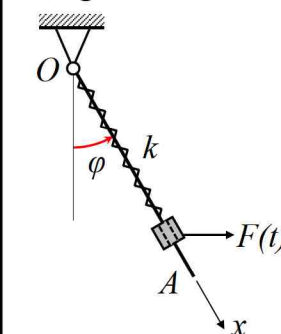
- $$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^N$$
- BTĐ: 1 $\rightarrow$ Chọn TĐSR đủ $q = x$, gốc tại vị trí lò xo không bị biến dạng, hướng như hình vẽ.
 - Lực hoạt động:
 - Có thể: kx, mg
 - Không thể: $b\dot{x}, F(t)$
 - Động năng: $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ (CD tịnh tiến)
 - Thế năng: $\Pi = \frac{1}{2} kx^2 - mgx$ (Gốc tại VT lò xo không bị biến dạng)

- Công khả dĩ của lực không thế: $\delta A^N = -b\dot{x}\delta x + F(t)\delta x \rightarrow Q^N = -b\dot{x} + F(t)$
- PTVPCĐ: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = mg + F(t)$

52

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II – VÍ DỤ

VD2: Cho cơ hệ như hình vẽ. Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.



- 1) Xác định bậc tự do $\rightarrow$ chọn $\{q_i\}$ đủ.
- 2) Xét liên kết của cơ hệ:
 - Liên kết lý tưởng: Biểu diễn tất cả các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ.
 - LK không lý tưởng: Xem các thành phần PLLK không lý tưởng là các lực hoạt động.

3) Tính Q_i . $Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^N$

4) Tính T .

5) Áp dụng PT Lagrange. $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$

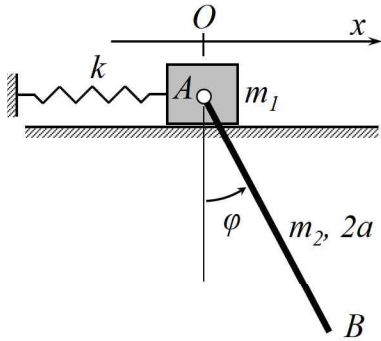
53

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II – VÍ DỤ

VD3: Cho cơ hệ như hình vẽ. Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^N$$

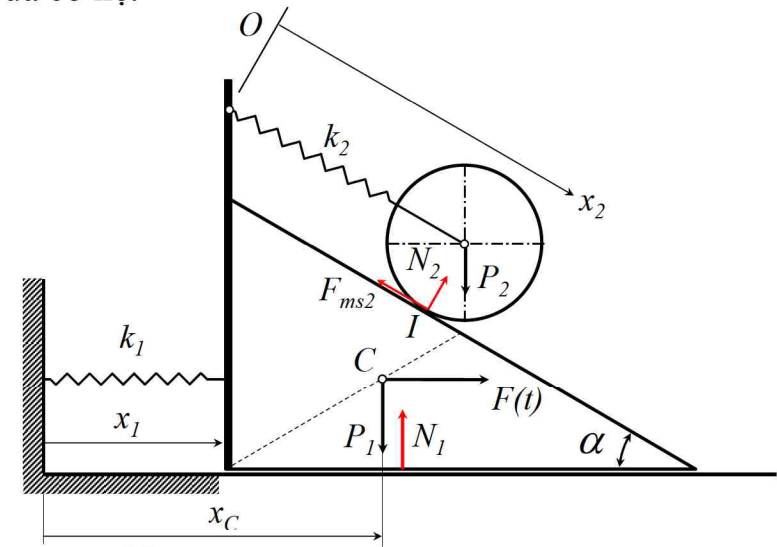


Một vài nhầm lẫn:

55

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II

VD4: Cho cơ hệ như hình vẽ. Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.

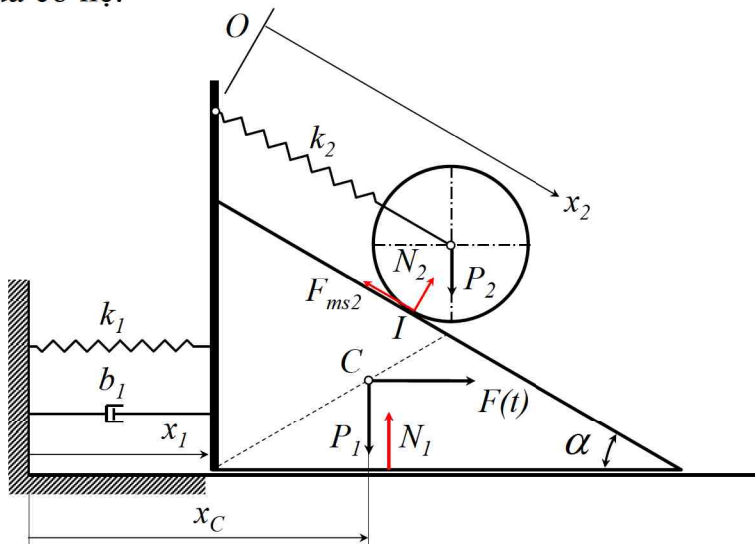


Trương Quang Trí, PTN Cơ học ứng dụng - BM Cơ kỹ thuật - Khoa Khoa học ứng dụng - ĐHBK Tp.HCM, 2015 (tri.truongquang@gmail.com) .

56

VÍ DỤ

VD4: Cho cơ hệ như hình vẽ. Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.



Trương Quang Trí, PTN Cơ học ứng dụng - BM Cơ kỹ thuật - Khoa Khoa học ứng dụng - ĐHBK Tp.HCM, 2015 (tri.truongquang@gmail.com) .

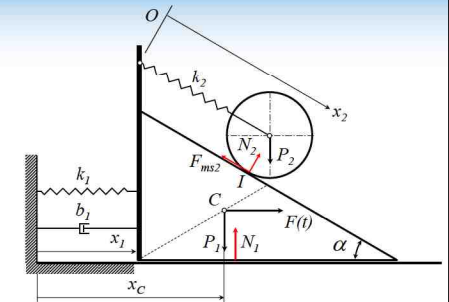
57

VÍ DỤ

VD4:

Phân tích:

- Cơ hệ: vật 1, vật 2
- BTĐ: 2
- TĐSR đủ: x_1, x_2
- Liên kết:
 - Lăn không trượt
 - Trượt không ma sát
- Lực hoạt động: $P_1, P_2, F_{lx1}, F_{lx2}, F_{b1}$
- Dạng chuyển động:
 - Vật 1: Tịnh tiến
 - Vật 2: Song phẳng



Trương Quang Trí, PTN Cơ học ứng dụng - BM Cơ kỹ thuật - Khoa Khoa học ứng dụng - ĐHBK Tp.HCM, 2015 (tri.truongquang@gmail.com) .

58

VÍ DỤ 4

1. Động năng của cơ hệ (1): $T = T_1 + T_2$

- Vật 1 chuyển động tịnh tiến:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$$

- Vật 2 chuyển động song phẳng:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_{O_2}^2 + \frac{1}{2} J_{O_2} \omega_2^2$$

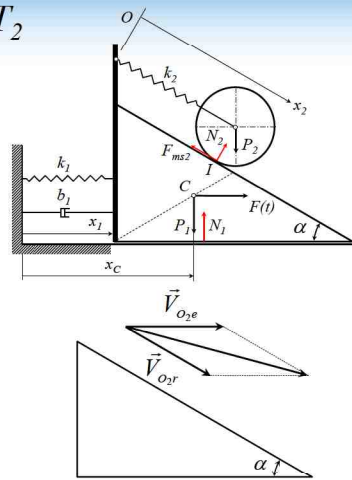
O_2 là khối tâm của vật 2

- Quan hệ động học:

$$V_1 = \dot{x}_1$$

$$\vec{V}_{O_2} = \vec{V}_{O_2e} + \vec{V}_{O_2r} \Rightarrow V_{O_2}^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2 \cos \alpha$$

$$\omega_2 = \frac{\dot{x}_2}{r_2}$$



VÍ DỤ 4

1. Động năng của cơ hệ (2): $T = T_1 + T_2$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 \quad T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_{O_2}^2 + \frac{1}{2} J_{O_2} \omega_2^2 = T_{2T} + T_{2\omega};$$

$$\vec{V}_{O_2} = \vec{V}_{O_2e} + \vec{V}_{O_2r}$$

$$\Rightarrow V_{O_2}^2 = V_{O_2e}^2 + V_{O_2r}^2 + 2V_{O_2e}V_{O_2r} \cos \alpha$$

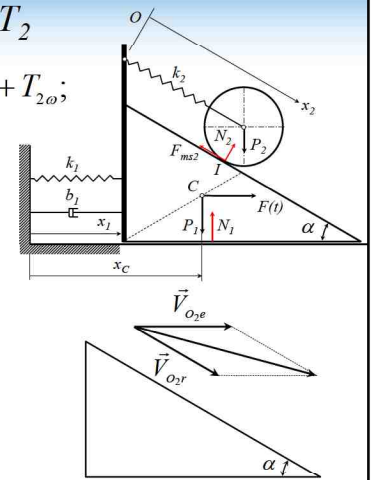
$$\Rightarrow V_{O_2}^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2 \cos \alpha$$

$$\circ T_{2T} = \frac{1}{2} m_2 V_{O_2}^2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2 \cos \alpha)$$

$$\circ T_{2\omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_2 r_2^2 \right) \left(\frac{\dot{x}_2}{r_2} \right)^2 = \frac{1}{4} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$\Rightarrow T_2 = T_{2T} + T_{2\omega} \Rightarrow T_2 = m_2 \left(\frac{1}{2} \dot{x}_1^2 + \dot{x}_1\dot{x}_2 \cos \alpha + \frac{3}{4} \dot{x}_2^2 \right)$$

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_1\dot{x}_2 \cos \alpha + \frac{3}{4} m_2 \dot{x}_2^2$$



VÍ DỤ 4

2. Tính các lực suy rộng:

- Thế năng của cơ hệ: $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_{lx1} + \Pi_{lx2}$

$$\bullet \Pi_1 = \text{const}_1; \quad \bullet \Pi_2 = -m_2 g x_2 \sin \alpha + \text{const}_2$$

$$\bullet \Pi_{lx1} = \frac{1}{2} k_1 (x_1 - l_{01})^2$$

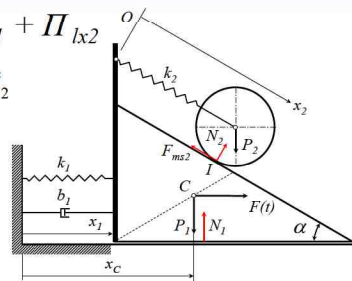
$$\bullet \Pi_{lx2} = \frac{1}{2} k_2 (x_2 - l_{02})^2$$

$$\Rightarrow \Pi = \frac{1}{2} k_1 (x_1 - l_{01})^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - l_{02})^2 - m_2 g x_2 \sin \alpha + \text{const}$$

$$Q_1^c = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = -k_1 (x_1 - l_{01}), \quad Q_2^c = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = -k_2 (x_2 - l_{02}) + m_2 g \sin \alpha$$

- Lực hoạt động không thế: $-b_1 \dot{x}_1, \bar{N}_1, F(t)$

$$\delta x_1 \neq 0, \delta x_2 = 0 \rightarrow \sum \delta A_k = -b \dot{x}_1 \delta x_1 + F(t) \delta x_1 \rightarrow Q_1^N = -b \dot{x}_1 + F(t)$$



VÍ DỤ 4

3. Áp dụng PT Lagrange loại II:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^N$$

- Lực SR: $Q_1^c = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = -k_1 (x_1 - l_{01}), Q_2^c = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = -k_2 (x_2 - l_{02}) + m_2 g \sin \alpha, Q_1^N = -b \dot{x}_1 + F(t)$

- Động năng: $T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_1\dot{x}_2 \cos \alpha + \frac{3}{4} m_2 \dot{x}_2^2$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2) \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 \cos \alpha \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 \cos \alpha$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_1 \cos \alpha + \frac{3}{2} m_2 \dot{x}_2 \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \ddot{x}_1 \cos \alpha + \frac{3}{2} m_2 \ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0$$

- PTVPCĐ:
$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 \cos \alpha = -k_1 (x_1 - l_{01}) - b \dot{x}_1 + F(t) \\ m_2 \ddot{x}_1 \cos \alpha + \frac{3}{2} m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - l_{02}) + m_2 g \sin \alpha \end{cases}$$

VÍ DỤ 4

Nhận xét:

- Nếu $k_1 = k_2 = 0$, $b_1 = 0$, $F(t) = 0$, khi đó:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 \cos \alpha = F(t) \\ m_2\ddot{x}_1 \cos \alpha + \frac{3}{2}m_2\ddot{x}_2 = m_2g \sin \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 \cos \alpha = 0 \\ \ddot{x}_1 \cos \alpha + \frac{3}{2}\ddot{x}_2 = g \sin \alpha \end{cases}$$

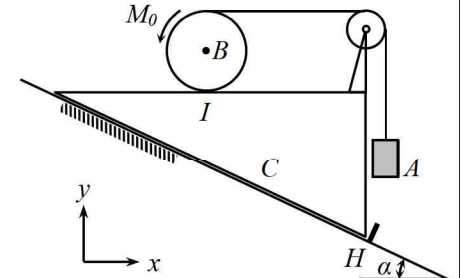
$$\rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\ddot{x}_2 \cos \alpha \\ \ddot{x}_2 = \frac{2(m_1 + m_2)g \sin \alpha}{3(m_1 + m_2) - 2m_2 \cos^2 \alpha} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{m_2g \sin 2\alpha}{3(m_1 + m_2) - 2m_2 \cos^2 \alpha} \\ \ddot{x}_2 = \frac{2(m_1 + m_2)g \sin \alpha}{3(m_1 + m_2) - 2m_2 \cos^2 \alpha} \end{cases}$$

TỔNG HỢP - VD 1(*)

Cơ hệ chịu lực và liên kết như hình vẽ. Con lăn tâm B là trụ đặc đồng chất lăn không trượt, lăn trụ C được giữ đứng yên nhờ chốt H . Tại tiếp điểm I chỉ tồn tại ma sát trượt, mọi tiếp xúc khác đều bỏ qua ma sát.

Tính:

- Động năng của cơ hệ
- Tổng công suất của nội, ngoại lực tác dụng vào cơ hệ
- Gia tốc của vật A .
- Lực tác dụng của chốt tại H lên lăng trụ C
- Áp lực của lăng trụ C lên mặt nền
- Lực ma sát trượt $F_I = F_I \cdot e_x$ con lăn tác động vào lăng trụ C
- Tìm giá trị của $E = M_O/(2R)$ để cơ hệ cân bằng tĩnh



(*) Trích đề thi cuối kỳ môn Cơ lý thuyết, Bộ môn Cơ lý thuyết - Khoa Khoa học ứng dụng - ĐHBK Tp.HCM.

TỔNG HỢP - VD 1(*)

ĐỀ THI HỌC KỲ II/13-14
Môn thi: **CƠ LÝ THUYẾT**
Ngày thi: 19/06/2014
Giờ thi: 7 giờ 15
Thời lượng: 90 phút

ĐỀ 1
Sinh viên được sử dụng tài liệu và nộp lại để kẹp vào phiếu trả lời.

Họ và tên sinh viên: M.SSV:

Trường hợp 1: Cơ hệ có các vật rắn liên kết và chịu lực như hình vẽ. Con lăn tâm B là trụ đặc đồng chất lăn không trượt, lăng trụ C được giữ đứng yên nhờ chốt H . Tại tiếp điểm I chỉ tồn tại ma sát trượt, mọi tiếp xúc khác đều bỏ qua ma sát.

Hãy chọn kết quả đúng. Cho các đại lượng:
 $m_A = 8m_0$, $m_B = 16m_0$, $m_C = 26m_0$, $M_O = 20m_0g$, R

Câu 1: Động năng của cơ hệ
a. $T = 9m_0y^2$ b. $T = 7m_0y^2$ c. Không có kết quả đúng d. $T = 7,5m_0y^2$

Câu 2: Tổng công suất của ngoại, nội lực tác dụng vào cơ hệ N
a. $N = 2m_0g$ b. $N = m_0g$ c. $N = 3m_0g$ d. Không có kết quả đúng

Câu 3: Gia tốc $\ddot{y}_A = \ddot{y}_B$
a. $\ddot{y} = \frac{2g}{15}$ b. $\ddot{y} = \frac{g}{18}$ c. Không có kết quả đúng d. $\ddot{y} = \frac{g}{9}$

Câu 4: Lực tác dụng của chốt tại H lên lăng trụ C
a. $F = (40m_0g + 12m_0y)\sin \alpha + 4m_0y\cos \alpha$
b. $F = (50m_0g + 8m_0y)\sin \alpha + 8m_0y\cos \alpha$
c. $F = (40m_0g + 12m_0y)\sin \alpha + 8m_0y\cos \alpha$
d. Không có kết quả đúng

Câu 5: Áp lực N của lăng trụ C lên mặt nền
a. $N = (50m_0g + 8m_0y)\cos \alpha - 16m_0y\sin \alpha$
b. $N = (40m_0g + 12m_0y)\cos \alpha - 8m_0y\sin \alpha$
c. $N = (40m_0g + 12m_0y)\cos \alpha - 16m_0y\sin \alpha$
d. Không có kết quả đúng

Câu 6: Lực ma sát trượt $F_I = F_I e_x$ con lăn tác động vào lăng trụ C
a. $F_I = 12m_0g(\sin \alpha + \cos \alpha)$ hoặc $F_I = 8m_0g + 16m_0y$
b. $F_I = 14m_0g + 16m_0y$ hoặc $F_I = 12m_0g + 20m_0y$
c. $F_I = 18m_0g + 14m_0y$ hoặc $F_I = 12m_0g + 16m_0y$
d. Không có kết quả đúng

TỔNG HỢP - VD 1(*)

Câu 7: Tìm giá trị của $E = \frac{M_O}{2R}$ để cơ hệ cân bằng
a. $F = 12m_0g$ b. $F = 8m_0g$ c. $E = 10m_0g$ d. Không có kết quả đúng

Trường hợp II: Bỏ chốt tại H , lăn thêm là xo cứng K như hình vẽ. Gọi độ dời đi xuống của C so với vị trí cân bằng là y , lấy gốc chỉ hệ ở trạng thái cân bằng tĩnh (lò xo giãn Δy_0), độ dời thẳng đứng đi lên của A so với vị trí cân bằng là y , bỏ qua độ chuyển ngang của tải A so với lăng trụ C .

Câu 8: Động năng của cơ hệ
a. $T = 7m_0y^2 + 25m_0y^2 - 8m_0(\sin \alpha + \cos \alpha)y$
b. $T = 7,5m_0y^2 + 20m_0y^2 - (12\sin \alpha + 4\cos \alpha)m_0y$
c. Không có kết quả đúng
d. $T = 9m_0y^2 + 20m_0y^2 - (17\sin \alpha + 8\cos \alpha)m_0y$

Câu 9: Lực suy rộng Q_1, Q_2
a. $Q_1 = 3m_0g, Q_2 = -ks$
b. $Q_1 = 2m_0g, Q_2 = 50m_0g - ks$
c. $Q_1 = m_0g, Q_2 = -ks$
d. Không có kết quả đúng

Câu 10: Hệ phương trình vi phân chuyển động
a. $\begin{cases} (15y) - (12\sin \alpha + 4\cos \alpha)s = g \\ (12\sin \alpha + 4\cos \alpha)m_0y - 40m_0y - ks = 0 \end{cases}$
b. $\begin{cases} (18y) - (12\sin \alpha + 8\cos \alpha)y - g = 0 \\ (12\sin \alpha + 8\cos \alpha)m_0y - 40m_0y - ks = 0 \end{cases}$
c. Không có kết quả đúng
d. $\begin{cases} (14y) - 8(\sin \alpha + \cos \alpha)s - 2g = 0 \\ (8m_0(\sin \alpha + \cos \alpha)y - 50m_0y - ks = 0 \end{cases}$

Câu 11: Định nghiệm của hệ phương trình với điều kiện đầu: $\dot{y} = 0, y = 0, s > 0, y > 0 (A_1, A_2, C_1, C_2)$ là các hằng số.
a. $\begin{cases} \dot{y} = A_1 \cos(\alpha t) + C_1 \\ y = A_2 \cos(\alpha t) + C_2 \end{cases}$
b. $\begin{cases} \dot{y} = A_1 \cos(\alpha t) + C_1 \\ y = A_2 \cos(\alpha t) + C_2 \end{cases}$
c. Không có kết quả đúng
d. $\begin{cases} \dot{y} = A_1 \cos(\alpha t) + C_1 \\ y = A_2 \cos(\alpha t) + C_2 \end{cases}$

Câu 12: Cho $g = 10 \text{ m/s}^2$ (tính hệ số ma sát trượt tính giữa lăng trụ C và nền). Bỏ chốt tại H , nếu $y = 0$ cơ hệ sẽ cân bằng (không trượt). Nếu $y > 0$ (đi lên) lăng trụ C có trượt không?
a. Trượt lên b. Không trượt c. Không đánh giá được chiều trượt d. Trượt xuống

*Chú ý: Bỏ qua khối lượng ròng rọc và dây trong cả 2 trường hợp.

(--- HẾT ---)

CHỦ NHIỆM BỘ MÔN
TS. Vũ Công Hòa

GIÁO VIÊN RA ĐỀ
TS. Vũ Duy Cường

TỔNG HỢP – VD 1

Cơ hệ gồm: Vật A, B, C , dây và ròng rọc (bỏ qua khối lượng của dây và ròng rọc)

1. Động năng của cơ hệ

- Động năng của cơ hệ: $T = T_A + T_B + T_C$
 - ✓ Vật A chuyển động tịnh tiến: $T_A = \frac{1}{2} m_A V_A^2$.
 - ✓ Vật B chuyển động song phẳng: $T_B = \frac{1}{2} m_B V_B^2 + \frac{1}{2} J_B \omega_B^2$ (có tâm quay tức thời tại I).
 - ✓ Vật C đứng yên: $T_C = 0$.

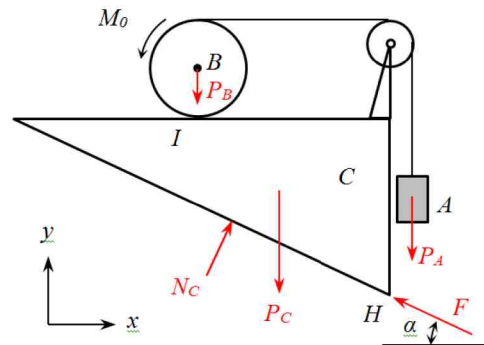
TỔNG HỢP – VD 1

▪ Quan hệ động học:

- ✓ Chọn gốc tọa độ của mỗi vật tại vị trí ban đầu của tương ứng của mỗi vật. Khi đó, nếu A di chuyển lên đến $y \rightarrow$ Tâm B di chuyển sang trái 1 đoạn $y/2$, con lăn B quay ngược chiều kim đồng hồ 1 góc $\theta = \frac{y}{2R}$.
- ✓ $V_A = \dot{y}$
- ✓ $V_B = \frac{\dot{y}}{2} \rightarrow W_B = \frac{\ddot{y}}{2}$
- ✓ $\omega_B = \frac{\dot{y}}{2R} \rightarrow \varepsilon_B = \frac{\ddot{y}}{2R}$

TỔNG HỢP – VD 1

2. Tổng công suất của nội, ngoại lực tác dụng vào cơ hệ



- Tổng công suất của nội lực: $N^i = 0$.

TỔNG HỢP – VD 1

- Tổng công suất của ngoại lực: $N^e = N(P_A) + N(P_B) + N(P_C) + N(M) + N(F) + N(N_C)$
 - ✓ $N(P_C) = 0, N(F) = 0, N(N_C) = 0$ (Vật C đứng yên)
 - ✓ $N(P_A) = \vec{P}_A \vec{V}_A = (m_A \vec{g}) \vec{V}_A = -8m_0 g \dot{y}$
($\vec{P}_A = m_A \vec{g} = 8m_0 \vec{g} = -8m_0 g \vec{j}, \vec{V}_A = \dot{y} \vec{j}$)
 - ✓ $N(P_B) = \vec{P}_B \vec{V}_B = (m_B \vec{g}) \vec{V}_B = 0$ (Do P_B vuông góc với V_B)
 - ✓ $N(M_0) = M_0 \omega_B = (20m_0 g R) \frac{\dot{y}}{2R} = 10m_0 g \dot{y}$

TỔNG HỢP – VD 1

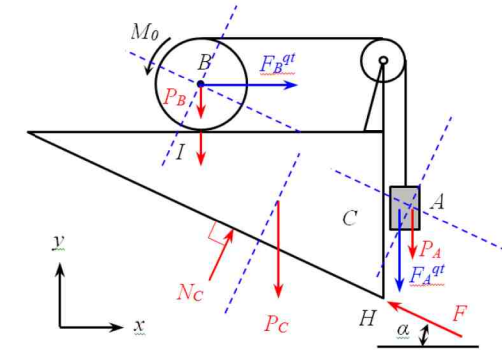
3. Gia tốc của vật A

Áp dụng định lý động năng:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \frac{dA}{dt} = \sum_{k=1}^N \frac{dA_k^e}{dt} + \sum_{k=1}^N \frac{dA_k^i}{dt} = \sum_{k=1}^N N_k^e + \sum_{k=1}^N N_k^i = N^e + N^i = N \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(7m_0 \dot{y}^2) &= 2m_0 g \dot{y} \\ \Rightarrow 14m_0 \dot{y} \ddot{y} &= 2m_0 g \dot{y} \\ \Rightarrow \ddot{y} &= \frac{g}{7}\end{aligned}$$

TỔNG HỢP – VD 1

4. Lực tác dụng của chốt tại H lên lăng trụ C



Lưu ý giả thiết bỏ qua ma sát (ngoại trừ ma sát trượt tại I), điều kiện lăn không trượt, dây không giãn, bỏ qua khối lượng của dây và ròng rọc.

TỔNG HỢP – VD 1

Khi đó, áp dụng nguyên lý D'Alembert (“Trong chuyển động của cơ hệ, hệ lực gồm các lực thực tác động vào cơ hệ và lực quán tính của cơ hệ giống như hệ lực cân bằng.”) ta có:

$$\vec{P}_A + \vec{F}_A^{qt} + \vec{P}_B + \vec{F}_B^{qt} + \vec{P}_C + \vec{F}_C^{qt} + \vec{N}_C + \vec{F} = \vec{0} \quad (1)$$

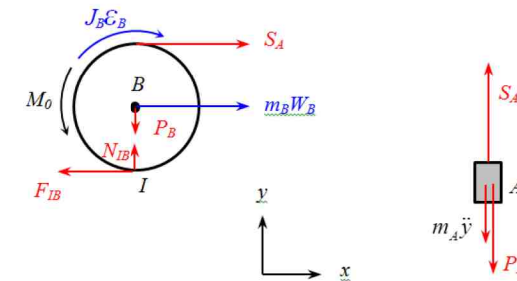
Chiều (1) lên phương F: $\rightarrow F$

5. Áp lực của lăng trụ C lên mặt nền

Chiều (1) lên phương N_C : $\rightarrow N_C$

TỔNG HỢP – VD 1

6. Lực ma sát trượt $F_I = F_I \cdot ex$ con lăn tác động vào lăng trụ C



▪ Xét vật A:

$$\begin{aligned}\vec{P}_A + \vec{F}_A^{qt} + \vec{S}_A &= \vec{0} \\ \Rightarrow -m_A g - m_A \ddot{y} + S_A &= 0 \\ \Rightarrow S_A &= m_A (g + \ddot{y})\end{aligned}$$

TỔNG HỢP – VD 1

Xét vật B:

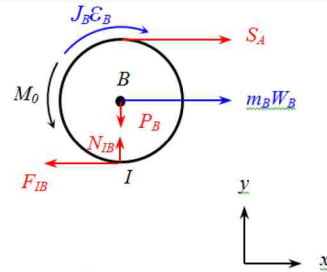
$$\sum M_B = 0$$

$$\Rightarrow M_0 - S_A R - F_{IB} R - J_B \varepsilon_B = 0$$

$$\Rightarrow F_{IB} = \frac{M_0}{R} - \frac{m_A(g + \ddot{y})R}{R} - \frac{(\frac{1}{2} m_B R^2)(\frac{\ddot{y}}{2R})}{R}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{IB} = 12m_0(g - \ddot{y})(-\vec{e}_x) = -12m_0(g - \ddot{y})\vec{e}_x$$

Lực ma sát tại I tác dụng lên C có độ lớn như F_{IB} , chiều ngược lại F_{IB} , do đó: $\vec{F}_I = 12m_0(g - \ddot{y})\vec{e}_x$



7. Tìm giá trị của $E = M_0/(2R)$ để cơ hệ cân bằng tĩnh

Xét vật A:

$$\vec{P}_A + \vec{S}_A = \vec{0}$$

$$\Rightarrow -m_A g + S_A = 0$$

$$\Rightarrow S_A = m_A g = 8m_0 g$$

Xét vật B:

$$\sum M_I = 0$$

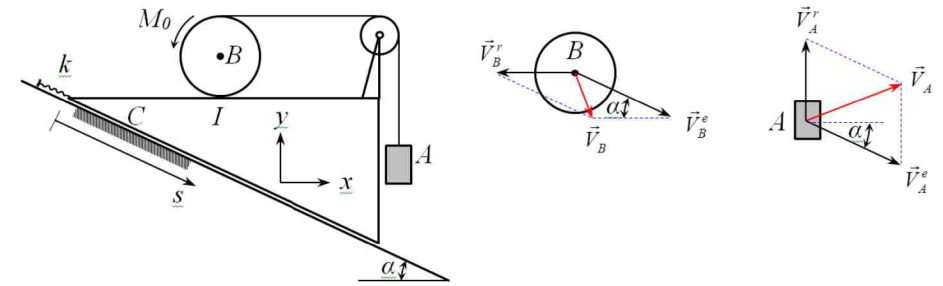
$$\Rightarrow M_0 - S_A 2R = 0$$

$$\Rightarrow M_0 = (8m_0 g)(2R) = 16m_0 g R$$

$$\Rightarrow E = \frac{M_0}{2R} = 8m_0 g$$

TỔNG HỢP – VD 1

Trường hợp II:



$$\Pi = -m_c g s \sin \alpha - m_B g s \sin \alpha + m_A g (y - s \sin \alpha) + \frac{1}{2} k [(s + \Delta_0)^2 - \Delta_0^2] + const$$

$$Q_y^c = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} = -m_A g = -8m_0 g$$

$$Q_s^c = -\frac{\partial \Pi}{\partial s} = (m_c + m_B + m_A) g \sin \alpha - k(s + \Delta_0) = (26 + 16 + 8)m_0 g \sin \alpha - k(s + \Delta_0)$$

$$Q_y^c = -8m_0 g$$

$$Q_s^c = 50m_0 g \sin \alpha - k(s + \Delta_0)$$

TỔNG HỢP – VD 1

8. Động năng của cơ hệ

- Cơ hệ có 2 bậc tự do, chọn tọa độ suy rộng đủ của cơ hệ là $q_1 = y$, $q_2 = s$ như hình vẽ.

- Động năng của cơ hệ: $T = T_A + T_B + T_C$.

- ✓ Vật A chuyển động tịnh tiến: $T_A = \frac{1}{2} m_A V_A^2$. Khối tâm của A chuyển động tương đối đối với C với vận tốc $V_A^r = \dot{y}$, đồng thời chuyển động theo cùng với C với vận tốc $V_A^e = \dot{s}$.

TỔNG HỢP – VD 1

- ✓ Vật B chuyển động song phẳng:

$$T_B = \frac{1}{2} m_B V_B^2 + \frac{1}{2} J_B \omega_B^2. \text{ Trong đó, khối tâm của B chuyển động tương đối đối với C với vận tốc } V_B^r = \frac{\dot{y}}{2}, \text{ đồng thời khối tâm của B chuyển động theo cùng với C với vận tốc } V_A^e = \dot{s}. \text{ Thêm vào đó, B quay quanh khối tâm B với vận tốc góc } \omega_B = \frac{\dot{y}}{2R}.$$

- ✓ Vật C chuyển động tịnh tiến:

$$T_C = \frac{1}{2} m_C V_C^2 = \frac{1}{2} m_C \dot{s}^2.$$

TỔNG HỢP – VD 1

Ta có:

✓ Động năng $T_A = \frac{1}{2} m_A V_A^2 :$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_A^e + \vec{V}_A^r \Rightarrow V_A^2 = (V_A^e)^2 + 2V_A^e V_A^r \cos(\vec{V}_A^e, \vec{V}_A^r) + (V_A^r)^2$$

$$\Rightarrow V_A^2 = \dot{s}^2 - 2\dot{s}\dot{y} \sin \alpha + \dot{y}^2$$

✓ Động năng $T_B = \frac{1}{2} m_B V_B^2 + \frac{1}{2} J_B \omega_B^2 :$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_B^e + \vec{V}_B^r \Rightarrow V_B^2 = (V_B^e)^2 + 2V_B^e V_B^r \cos(\vec{V}_B^e, \vec{V}_B^r) + (V_B^r)^2$$

$$\Rightarrow V_B^2 = (V_B^e)^2 + 2V_B^e V_B^r \cos(\pi - \alpha) + (V_B^r)^2$$

$$\Rightarrow V_B^2 = \dot{s}^2 - \dot{s}\dot{y} \cos \alpha + \frac{\dot{y}^2}{4}$$

✓ Động năng $T_C = \frac{1}{2} m_C V_C^2 = \frac{1}{2} m_C \dot{s}^2 :$

TỔNG HỢP – VD 1

9. Lực suy rộng Q_y, Q_s

Tìm Q_y :

Cho cơ hệ một di chuyển khả dĩ: $\delta s = 0$ và $\delta y > 0$, khi đó B sang trái 1 đoạn $\delta y / 2$ đồng thời quay quanh B một góc $\delta \theta = \frac{\delta y}{2R}$, còn C thì đứng yên. Khi đó,

$$\sum \delta A_k = -m_A g \delta y + M_0 \delta \theta = -8m_0 g \delta y + 20m_0 g R \frac{\delta y}{2R}$$

$$\Rightarrow \sum \delta A_k = 2m_0 g \delta y \Rightarrow Q_y = 2m_0 g$$

$$Q_y = 2m_0 g$$

Tìm Q_s :

✓ Cho cơ hệ một di chuyển khả dĩ: $\delta s > 0$ và $\delta y = 0$, khi đó A, B và C cùng đi xuống 1 đoạn $\delta s \sin \alpha$ đồng thời $\delta \theta = 0$ (B không quay). Khi đó,

TỔNG HỢP – VD 1

$$\sum \delta A_k = m_A g \delta s \sin \alpha + m_B g \delta s \sin \alpha + m_C g \delta s \sin \alpha - k(s + \Delta_0) \delta s$$

$$\Rightarrow \sum \delta A_k = [(8m_0 g + 16m_0 g + 26m_0 g) \sin \alpha - k(s + \Delta_0)] \delta s$$

$$\Rightarrow \sum \delta A_k = [50m_0 g \sin \alpha - k(s + \Delta_0)] \delta s$$

$$\Rightarrow Q_s = 50m_0 g \sin \alpha - k(s + \Delta_0)$$

✓ Xác định độ biến dạng tĩnh Δ_0 :

$$\sum F_s = 0$$

$$\Rightarrow m_A g \sin \alpha + m_B g \sin \alpha + m_C g \sin \alpha - k \Delta_0 = 0$$

$$\Rightarrow (8m_0 g + 16m_0 g + 26m_0 g) \sin \alpha - k \Delta_0 = 0$$

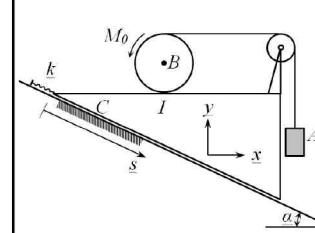
$$\Rightarrow \Delta_0 = \frac{50m_0 g}{k} \sin \alpha$$

Do đó: $Q_s = -ks$

TỔNG HỢP – VD 1

Câu 9 (Cách 2):

Lực suy rộng do lực có thể (do P_A, P_B, P_C và lò xo)



$$\Pi = -m_C g s \sin \alpha - m_B g s \sin \alpha + m_A g (y - s \sin \alpha) + \frac{1}{2} k [(s + \Delta_0)^2 - \Delta_0^2] + const$$

$$Q_y^c = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} = -m_A g = -8m_0 g$$

$$Q_s^c = -\frac{\partial \Pi}{\partial s} = (m_C + m_B + m_A) g \sin \alpha - k(s + \Delta_0)$$

$$= (26 + 16 + 8) m_0 g \sin \alpha - k(s + \Delta_0)$$

$$Q_y^c = -8m_0 g$$

$$Q_s^c = 50m_0 g \sin \alpha - k(s + \Delta_0)$$

Lực suy rộng do lực không thể (do M_0)

$$\left. \begin{array}{l} \delta y > 0 \\ \delta s = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum \delta A_k (F_k^N) = \delta A(M_0) = M_0 \delta \theta = 20m_0 g R \frac{\delta y}{2R} = 10m_0 g \delta y \Rightarrow Q_y^N = 10m_0 g$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta y = 0 \\ \delta s > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum \delta A_k (F_k^N) = \delta A(M_0) = 0 \Rightarrow Q_s^N = 0$$

Lực suy rộng

$$Q_y = Q_y^c + Q_y^N = 2m_0 g, \quad Q_s = Q_s^c + Q_s^N = 50m_0 g \sin \alpha - k(s + \Delta_0)$$

TỔNG HỢP – VD 1

10. Hệ phương trình vi phân chuyển động

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

▪ Các đạo hàm:

- $\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} [7m_0 \dot{y}^2 - 8m_0 (\sin \alpha + \cos \alpha) \dot{y} + 25m_0 \dot{s}^2]$
 $\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = 14m_0 \dot{y} - 8m_0 (\sin \alpha + \cos \alpha) \dot{s}$
 $\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) = 14m_0 \ddot{y} - 8m_0 (\sin \alpha + \cos \alpha) \ddot{s}$
- $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$

TỔNG HỢP – VD 1

10. Hệ phương trình vi phân chuyển động

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

▪ Các đạo hàm:

- $\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} [7m_0 \dot{y}^2 - 8m_0 (\sin \alpha + \cos \alpha) \dot{y} + 25m_0 \dot{s}^2]$
 $\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = 14m_0 \dot{y} - 8m_0 (\sin \alpha + \cos \alpha) \dot{s}$
 $\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) = 14m_0 \ddot{y} - 8m_0 (\sin \alpha + \cos \alpha) \ddot{s}$
- $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$

TỔNG HỢP – VD 1

- $\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} [7m_0 \dot{y}^2 - 8m_0 (\sin \alpha + \cos \alpha) \dot{y} + 25m_0 \dot{s}^2]$
 $\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = -8m_0 (\sin \alpha + \cos \alpha) \dot{y} + 50m_0 \dot{s}$
 $\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) = 50m_0 \ddot{s} - 8m_0 (\sin \alpha + \cos \alpha) \ddot{y}$
- $\frac{\partial T}{\partial s} = 0$

▪ Hệ phương trình vi phân chuyển động:

$$\begin{cases} 14m_0 \ddot{y} - 8m_0 (\sin \alpha + \cos \alpha) \ddot{s} = 2m_0 g \\ 50m_0 \ddot{s} - 8m_0 (\sin \alpha + \cos \alpha) \ddot{y} = -ks \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 14\ddot{y} - 8(\sin \alpha + \cos \alpha) \ddot{s} - 2g = 0 \\ 8m_0 (\sin \alpha + \cos \alpha) \ddot{y} - 50m_0 \ddot{s} - ks = 0 \end{cases}$$