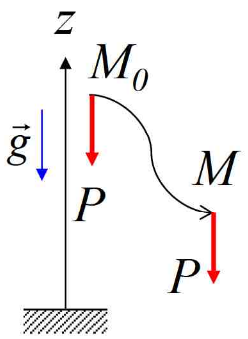
NHẮC LẠI THẾ NĂNG (1)

Thế năng: Thế năng của cơ hệ tại vị trí M là tổng công của các lực thế đặt vào cơ hệ trên độ dời từ vị trí M đến vị trí O được chọn (tùy ý) làm mốc. Thế năng chỉ phụ thuộc vào vị trí: $\Pi = \Pi(M)$.

❑ Thế năng trọng trường của vật có trọng lượng *P*:

- ✓ Gốc thế năng tại M_0 (có tọa độ z_0)
- ✓ Thế năng của vật ở M (có tọa độ z)



Theo định nghĩa, thế năng của vật tại vị trí M là:

$$\Pi(M)\big| = A(P)\big|_{M\to M_0} = \int_z^{z_0} -P dz = -Pz\Big|_z^{z_0} = P(z-z_0)$$

Vậy: $\Pi(M) = P(z-z_0)$, gốc tại z_0.

NHẮC LẠI THẾ NĂNG (2)

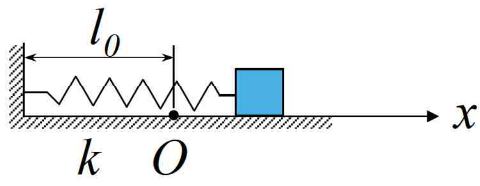
❑ Thế năng của lực đàn hồi lò xo:

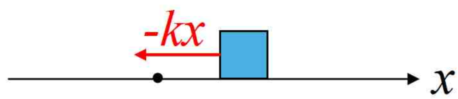
- ✓ Gốc O của trục Ox tại vị trí lò xo không bị biến dạng
- ✓ Gốc thế năng tại M_0 (li độ x_0)
- ✓ Thế năng của vật ở M (li độ x)

$$\Pi(M) = A(F_{lx})\big|_{M\to M_0}$$

$$= \int_x^{x_0} -kx dx = -\frac{1}{2}kx^2\Big|_x^{x_0}$$

$$\Rightarrow \Pi(M) = \frac{1}{2}k(x^2 - x_0^2)$$



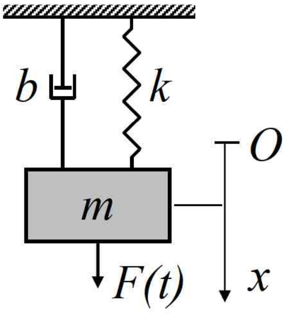


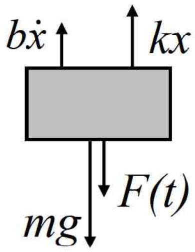
» Nếu chọn gốc thế năng của lò xo tại vị trí lò xo không bị biến dạng (tức là $x_0 = 0$), khi đó x chính là độ biến dạng dài của lò xo và thế năng đàn hồi của lò xo là: $\Pi_{lòxo} = \frac{1}{2}kx^2$

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II – VÍ DỤ

VD1: Cho cơ hệ như hình vẽ. Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i} \qquad \boxed{Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^N}$$

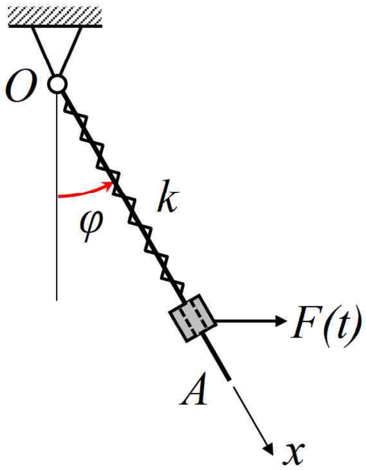




- BTD: 1 → Chọn TĐSR đủ $q = x$, gốc tại vị trí lò xo không bị biến dạng, hướng như hình vẽ.
- Lực hoạt động:
  - Có thế: kx, mg
  - Không thế: $b\dot{x}$, $F(t)$
- Động năng: $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ (*CĐ tịnh tiến*)
- Thế năng: $\Pi = \frac{1}{2}kx^2 - mgx$ (Gốc tại VT lò xo không bị biến dạng)
- Công khả dĩ của lực không thế: $\delta A^N = -b\dot{x}\delta x + F(t)\delta x \rightarrow Q^N = -b\dot{x} + F(t)$
- PTVPCĐ: $\boxed{m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = mg + F(t)}$

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II – VÍ DỤ

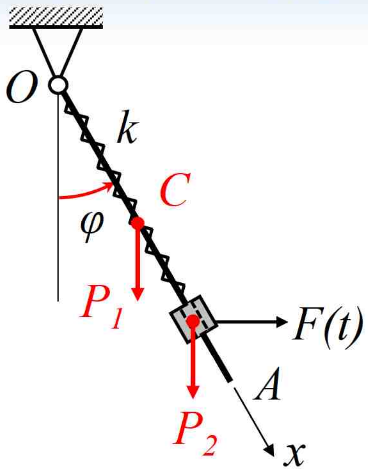
VD2: Cho cơ hệ như hình vẽ. Thanh mảnh đồng chất *OA* có chiều dai 2*a*, khối m_1, con trượt có khối lượng m_2, kích thước nhỏ có thể xem như chất điểm. Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.



1) Xác định bậc tự do → chọn $\{q_i\}$ đủ.
2) Xét liên kết của cơ hệ:
   - Liên kết lý tưởng: Biểu diễn tất cả các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ
   - LK không lý tưởng: Xem các thành phần PLLK không lý tưởng là các lưc hoạt động.
3) Tính Q_i, với $Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^N$
4) Tính T
5) Áp dụng PT Lagrange loại II: $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II – VÍ DỤ

VD2: Cách 1 – Xác định các lực suy rộng thông qua hàm thế năng (1)



1) BTD: 2 → chọn TĐSR đủ: x, φ
2) Xét liên kết của cơ hệ
3) Tính Q_i, với: $Q_i = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^N$
   - Lực có thế P_1, P_2, F_{lx}
   - Lực không thế: $F(t)$

(C là khối tâm của thanh OA)

- Hàm thế năng: $\Pi = \Pi(P_1)+\Pi(P_2)+\Pi(F_{lx})$

$$\Rightarrow \Pi = [-(m_1 g).OC.\cos\varphi] + [-(m_2 g).x.\cos\varphi] + [\frac{1}{2}k(x-l_0)^2] + const$$

$$\Rightarrow \Pi = -m_1 g a\cos\varphi - m_2 g x\cos\varphi + \frac{1}{2}k(x-l_0)^2 + const$$

Trong đó, $(x - l_0)$ chính là độ biến dạng của lò xo.

VD2: Cách 1 – Xác định các lực suy rộng thông qua hàm thế năng (2)

3) Tính Q_i, với: $Q_i = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^N = Q_i^C + Q_i^N$

- Hàm thế năng của cơ hệ:

$$\Pi = -m_1 g a\cos\varphi - m_2 g x\cos\varphi + \frac{1}{2}k(x-l_0)^2 + const$$

- Lực suy rộng (do các lực có thế):

$$Q_x^C = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -[-m_2 g\cos\varphi + k(x-l_0)]$$

$$\Rightarrow Q_x^C = m_2 g\cos\varphi - k(x-l_0) \qquad (1)$$

$$Q_\varphi^C = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -[m_1 g a\sin\varphi + m_2 g x\sin\varphi]$$

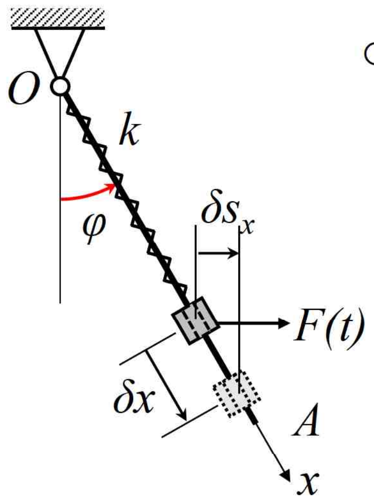
$$\Rightarrow Q_\varphi^C = -m_1 g a\sin\varphi - m_2 g x\sin\varphi \qquad (2)$$

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II – VÍ DỤ

VD2: Cách 1 – Xác định các lực suy rộng thông qua hàm thế năng (3)

3) Tính Q_i, với: $Q_i = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^N = Q_i^C + Q_i^N$

- Lực suy rộng (do các lực không thế, tức là lực *F(t)*):



- Tìm Q_x^N:
  - ✓ Cho cơ hệ một DCKD: $\delta x \neq 0$, $\delta\varphi = 0$
  - ✓ Quan hệ động học: $\delta s_x = \delta x.\sin\varphi$
  - ✓ Công khả dĩ của các lực không thế:

$$\sum \delta A_k^N = \delta A(F(t)) = F(t).\delta s_x = F(t).[\delta x.\sin\varphi]$$
$$\Rightarrow \sum \delta A_k^N = [F(t)\sin\varphi]\delta x$$
$$\Rightarrow Q_x^N = F(t)\sin\varphi \qquad (3)$$

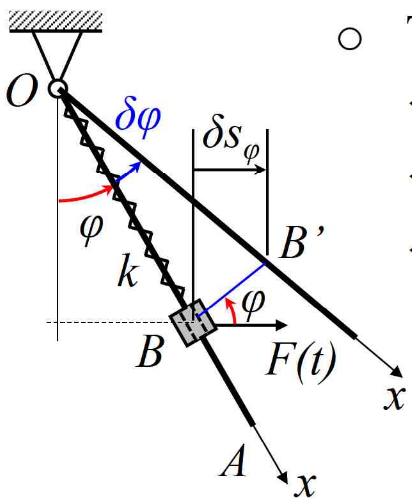
δs_x: dịch chuyển theo phương ngang (phương của lực F(t)) do di chuyển δx gây ra, xem hình vẽ.

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II – VÍ DỤ

VD2: Cách 1 – Xác định các lực suy rộng thông qua hàm thế năng (4)

3) Tính Q_i, với: $Q_i = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^N = Q_i^C + Q_i^N$

- Lực suy rộng (do các lực không thế, tức là lực *F(t)*):



- Tìm Q_φ^N:
  - ✓ Cho cơ hệ một DCKD: $\delta x = 0$, $\delta\varphi \neq 0$
  - ✓ Quan hệ động học: $\delta s_\varphi = BB'\cos\varphi = x\delta\varphi.\cos\varphi$
  - ✓ Công khả dĩ của các lực không thế:

$$\sum \delta A_k^N = \delta A(F(t)) = F(t).\delta s_\varphi = F(t).[x\delta\varphi.\cos\varphi]$$
$$\Rightarrow \sum \delta A_k^N = [F(t)x\cos\varphi]\delta\varphi$$
$$\Rightarrow Q_\varphi^N = xF(t)\cos\varphi \qquad (4)$$

Thay (1), (2), (3) và (4) vào biểu thức tính Q_i, ta được:

$$\boxed{Q_x = m_2 g\cos\varphi - k(x - l_0) + F(t)\sin\varphi, \quad Q_\varphi^C = -m_1 ga\sin\varphi - m_2 gx\sin\varphi + xF(t)\cos\varphi}$$

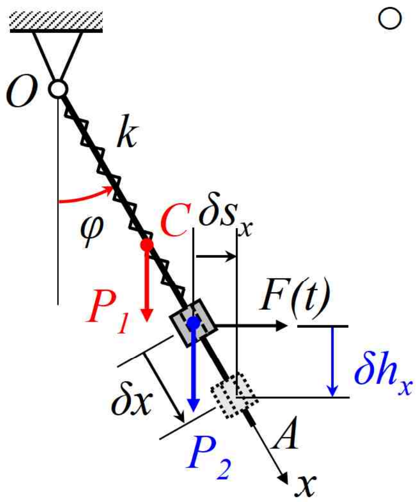
δs_φ: dịch chuyển theo phương ngang (phương của lực F(t)) do di chuyển $\delta\varphi$ gây ra, xem hình vẽ.

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II – VÍ DỤ

VD2: Cách 2 – Xác định các lực suy rộng trực tiếp

3) Tính Q_i, với: $\sum \delta A_k = \sum Q_i \delta q_i$

Lực hoạt động (có thế và không thế): P_1, P_2, $F_{lx} = -k(x-l_0)$, $F(t)$



- Tìm Q_x:
  - ✓ Cho cơ hệ một DCKD: $\delta x \neq 0$, $\delta\varphi = 0$
  - ✓ Quan hệ động học (chiều dịch chuyển như hình vẽ):

$$\delta s_x = \delta x.\sin\varphi \text{ và } \delta h_x = \delta x.\cos\varphi$$

  - ✓ Công khả dĩ của các lực hoạt động:

$$\sum \delta A_k^N = \delta A(P_1) + \delta A(P_2) + \delta A(F_{lx}) + \delta A(F(t))$$
$$= (m_1 g).0 + (m_2 g).\delta h_x - k(x-l_0)\delta x + F(t).\delta s_x$$
$$= m_2 g(\delta x\cos\varphi) - k(x-l_0)\delta x + F(t).(\delta x.\sin\varphi)$$

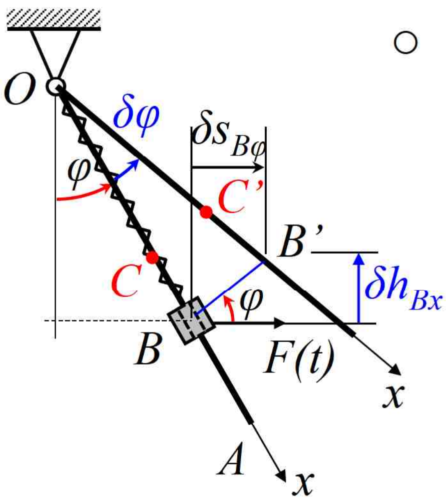
$$\sum \delta A_k^N = [m_2 g\cos\varphi - k(x-l_0) + F(t).\sin\varphi]\delta x \Rightarrow \boxed{Q_x = m_2 g\cos\varphi - k(x-l_0) + F(t).\sin\varphi}$$

Kết quả giống Q_x ở cách tính 1.

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II – VÍ DỤ

VD2: Cách 2 – Xác định các lực suy rộng trực tiếp

3) Tính Q_i, với: $\sum \delta A_k = \sum Q_i \delta q_i$



- Tìm Q_φ:
  - ✓ Cho cơ hệ một DCKD: $\delta x = 0$, $\delta\varphi \neq 0$
  - ✓ Quan hệ động học (chiều dịch chuyển như hình vẽ):
    - $\delta s_{B\varphi} = BB'.\cos\varphi = x\delta\varphi.\cos\varphi$
    - $\delta h_{Bx} = BB'.\sin\varphi = x\delta\varphi.\sin\varphi$
    - $\delta h_{Cx} = CC'.\sin\varphi = a\delta\varphi.\sin\varphi$
  - ✓ Công khả dĩ của các lực hoạt động:

$$\sum \delta A_k^N = \delta A(P_1) + \delta A(P_2) + \delta A(F_{lx}) + \delta A(F(t)) = -(m_1 g).\delta h_{C\varphi} - (m_2 g).\delta h_{B\varphi} - k(x-l_0).0 + F(t).\delta s_{B\varphi}$$
$$= -m_1 g(a\delta\varphi\sin\varphi) - m_2 g(x\delta\varphi\sin\varphi) + F(t).(x\delta\varphi.\cos\varphi)$$

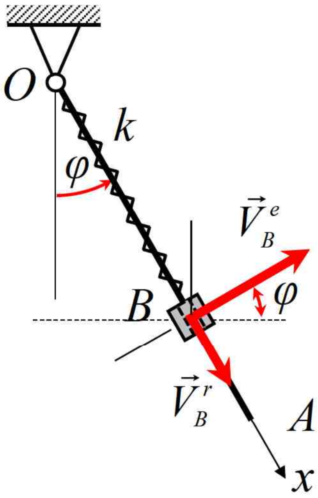
$$\sum \delta A_k^N = [-m_1 g a\sin\varphi - m_2 g x\sin\varphi + F(t).x.\cos\varphi]\delta\varphi$$
$$\Rightarrow \boxed{Q_\varphi = -m_1 g a\sin\varphi - m_2 g x\sin\varphi + x.F(t).\cos\varphi}$$

Kết quả giống Q_φ ở cách tính 1.

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II – VÍ DỤ

VD2: (4) Tính động năng T

- Động năng của cơ hệ: $T = T_{OA} + T_B$
  - OA chuyển động quay quanh trục O cố định: $T_{OA} = \frac{1}{2} J_O^{OA} \omega_{OA}^2$



$$T_{OA} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} m_1 (2a)^2\right]\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{3} m_1 a^2 \dot{\varphi}^2$$

  - Con chạy B nhỏ (xem như chất điểm): $T_B = \frac{1}{2} m_2 V_B^2$

    B Chuyển động tương đối với thanh OA, OA lại quay quanh O, nên:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_B^e + \vec{V}_B^r \Rightarrow V_B^2 = (V_B^e)^2 + (V_B^r)^2 + 2\vec{V}_B^e.\vec{V}_B^r$$

Do

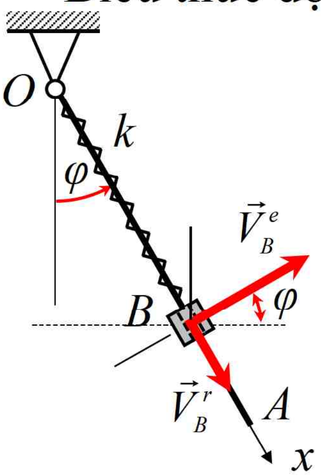
$$\vec{V}_B^e \perp \vec{V}_B^r \Rightarrow \vec{V}_B^e.\vec{V}_B^r = 0 \Rightarrow V_B^2 = (V_B^e)^2 + (V_B^r)^2$$

- Trong đó: $V_B^r = \dot{x}, \quad V_B^e = OB.\dot{\varphi} = x\dot{\varphi}$
- Suy ra: $T_B = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + x^2\dot{\varphi}^2)$ và $\boxed{T = \frac{2}{3} m_1 a^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + x^2 \dot{\varphi}^2)}$

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II – VÍ DỤ

VD2: Đến đây, ta có:

- Biểu thức động năng của cơ hệ: $T = \frac{2}{3} m_1 a^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + x^2 \dot{\varphi}^2)$



- Các lực suy rộng:

$$\begin{cases} Q_x = m_2 g \cos\varphi - k(x - l_0) + F(t).\sin\varphi \\ Q_\varphi = -m_1 g a \sin\varphi - m_2 g x \sin\varphi + x.F(t).\cos\varphi \end{cases}$$

- Phương trình Lagrange loại II:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad \text{hay} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \end{cases}$$

- $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_2 \dot{x} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m_2 \ddot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = m_2 x \dot{\varphi}^2$
- $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{4}{3} m_1 a^2 \dot{\varphi} + m_2 x^2 \dot{\varphi} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{4}{3} m_1 a^2 \ddot{\varphi} + m_2 \frac{d}{dt}\left(x^2 \dot{\varphi}\right), \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(x^2\dot{\varphi}\right) = 2x\dot{x}\dot{\varphi} + x^2\ddot{\varphi}$$