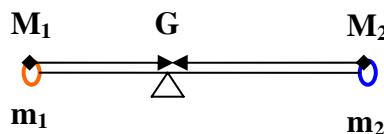


Chương III: ĐỘNG LỰC HỌC HỆ CHẤT ĐIỂM – VẬT RẮN

III.1 Khối tâm.

1. Vị trí khối tâm G của hệ 2 chất điểm: 2 chất điểm M_1 và M_2 có khối lượng lần lượt m_1 và m_2 được nối với nhau bằng một thanh rắn không khối lượng thì vị trí khối tâm G là điểm khi đặt con niêm tại đó thanh cân bằng nằm ngang. Khi đó:

$$m_1 \overrightarrow{M_1 G} + m_2 \overrightarrow{M_2 G} = 0$$



2. Vị trí khối tâm G của hệ nhiều chất điểm:

$$\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{M_i G} = 0$$

Đặt hệ chất điểm vào hệ trục tọa độ Descartes: $\Rightarrow \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OM_i} + \overrightarrow{M_i G}$

$$\Rightarrow m_i \overrightarrow{OG} = m_i \overrightarrow{OM_i} + m_i \overrightarrow{M_i G} \Rightarrow \sum m_i \overrightarrow{OG} = \sum m_i \overrightarrow{OM_i} + \sum m_i \overrightarrow{M_i G} \Rightarrow \vec{r}_G \sum m_i = \sum m_i \vec{r}_i$$

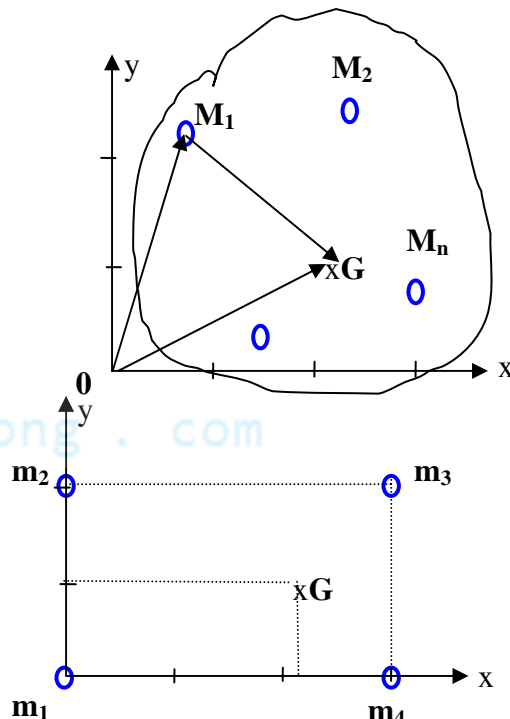
$$\Rightarrow \vec{r}_G = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{\sum m_i x_i}{M} \\ y_G = \frac{\sum m_i y_i}{M} \\ z_G = \frac{\sum m_i z_i}{M} \end{cases}$$

Với $M = \sum m_i$: Khối lượng hệ chất điểm

Vd: Cho 4 chất điểm $m_1=1\text{kg}$, $m_2=2\text{kg}$, $m_3=3\text{kg}$, $m_4=4\text{kg}$ đặt tại 4 đỉnh hình chữ nhật cạnh 2cm, 4cm như hình vẽ.

$$x_G = \frac{1}{1+2+3+4} (0+0+9+12) = 2,1\text{cm}$$

$$y_G = \frac{1}{10} (0+4+6+0) = 1\text{cm} \Rightarrow G(2,1; 1)$$



3. Vị trí khối tâm G của vật rắn:

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \int_V dm \cdot \vec{r} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{1}{M} \int x \cdot dm \\ y_G = \frac{1}{M} \int y \cdot dm \\ z_G = \frac{1}{M} \int z \cdot dm \end{cases}$$

Với M: Khối lượng vật rắn

- Mật độ khối lượng dài: $\lambda(\text{kg}/\text{m})$ $\lambda = \frac{dm}{dl} \Rightarrow dm = \lambda \cdot dl$

- Mật độ khối lượng mặt: $\sigma(\text{kg}/\text{m}^2)$ $\sigma = \frac{dm}{dS} \Rightarrow dm = \sigma \cdot dS$

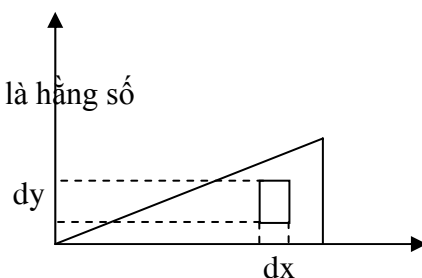
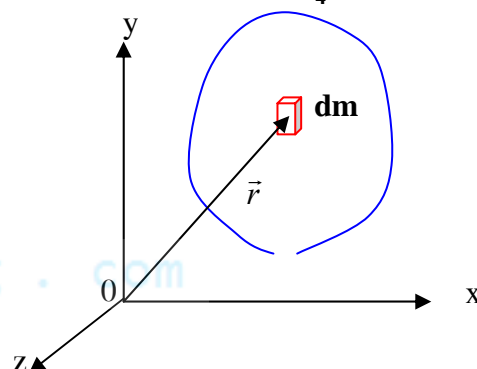
- Mật độ khối lượng thể tích: $\rho(\text{kg}/\text{m}^3)$ $\rho = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho \cdot dV$

+ Nếu 1 vật rắn có khối lượng phân bố đều thì: $\lambda = \frac{m}{l}$; $\sigma = \frac{m}{S}$; $\rho = \frac{m}{V}$ là hằng số

+ Nếu vật rắn là sợi dây thẳng trên trục x thì: $dl = dx$

+ Nếu vật rắn là sợi dây cung tròn, bán kính R thì

ta dùng tọa độ cực (R, φ) thì $dl = R \cdot d\varphi$



Tọa độ cực:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x}$$

Với $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$

- + Nếu vật rắn là mặt phẳng giới hạn bởi 2 đường thẳng: $dS = dx.dy$
- + Nếu vật rắn là mặt phẳng giới hạn bởi cung tròn: $dS = r.dr.d\varphi$.
- + Nếu vật rắn là mặt cầu bán kính R thì: $dS = R^2 \sin \theta.d\theta.d\varphi$

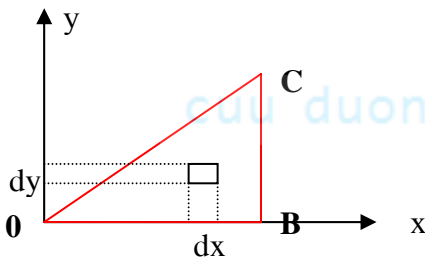
Tọa độ cầu: M (r, θ , φ) với $\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$

Khi tính biết mặt cầu: $S = R^2 \int_0^\pi \sin \theta.d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$

- + Nếu vật rắn dạng khối lăng trụ hay lập phương: $dV = dx.dy.dz$
- + Nếu vật rắn là khối cầu: $dV = r^2 dr.\sin \theta.d\theta.d\varphi$

$$V = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta.d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \int_0^R r^2 dr \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4}{3} \pi R^3$$

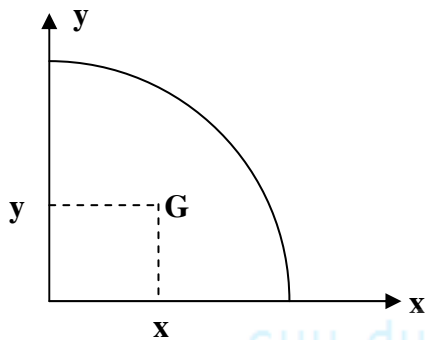
Vd1: Cho vật tam giác vuông OBC (OB=a và BC=b) khối lượng m phân bố đều. Tìm G?



$$x_G = \frac{1}{m} \int_{VR} \sigma . dx . dy = \frac{\frac{1}{2}ab}{m} \int_0^a x dx \cdot \int_0^{y=\frac{b}{a}x} dy = \frac{2}{ab} \int_0^a x . dx . y$$

• Tương tự $y_G = \frac{1}{3}b$:

Vd2: Cho vật rắn khối lượng m là $\frac{1}{4}$ vòng tròn (O,R). Xác định G?



$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M} \int_{VR} \underbrace{\sigma . r . dr . d\varphi}_{dS} \underbrace{r \cos \varphi}_x \\ &= \frac{\frac{\pi}{4} R^2}{M} \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi/2} \cos \varphi . d\varphi \\ &= \frac{4}{\pi R^2} \cdot \frac{R^3}{3} \sin \varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{3\pi} R \equiv 0,424R \end{aligned}$$

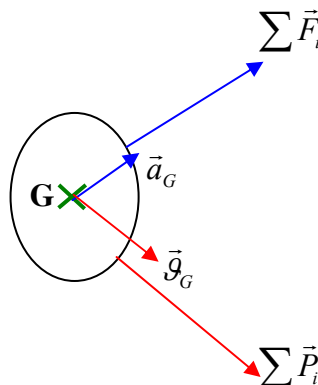
Hình đối xứng $\Rightarrow x_G = y_G = 0,424R$.

III.2. Chuyển động khối tâm G

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{g}_G = \frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{g}_i = \frac{1}{M} \sum \vec{p}_i$$

$$\vec{a}_G = \frac{d\vec{g}_G}{dt} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{a}_i = \frac{1}{M} \sum \vec{F}_i$$



III.3. Động lượng của hệ chất điểm và vật rắn.

a/ Định nghĩa: $\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{g}_i = M \vec{g}_G$

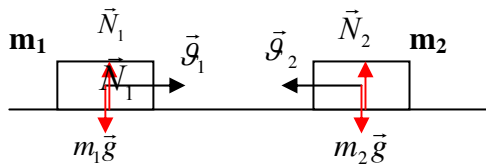
b/ Định lý: $\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(M \cdot \vec{g}_G)}{dt} = M \vec{a}_G = \sum \vec{F}$

c/ Định luật bảo toàn động lượng:

- Bảo toàn toàn phương: $\sum \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{P} = h s$

- Bảo toàn 1 phương: $\sum \vec{F} \neq 0, \sum F_x = 0 \Rightarrow P_x = h s$

Vd1:

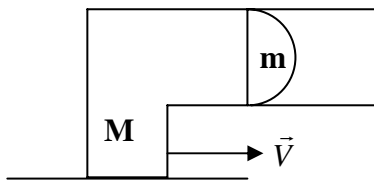


$$\sum \vec{F} = m_1 \vec{g} + \vec{N}_1 + m_2 \vec{g} + \vec{N}_2 = 0$$

$$\vec{P}_{TVC} = \vec{P}_{SVC}$$

$$m_1 \cdot \vec{g}_1 + m_2 \cdot \vec{g}_2 = m_1 \cdot \vec{g}'_1 + m_2 \cdot \vec{g}'_2$$

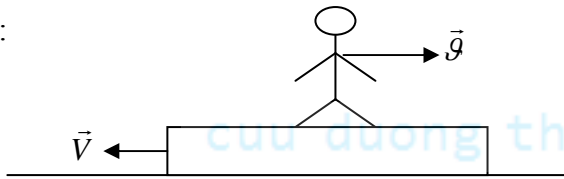
Vd2:



$$\vec{P}_{TB} = \vec{P}_{SB}$$

$$(m + M) \vec{V} = m \vec{g}' + M \vec{V}'$$

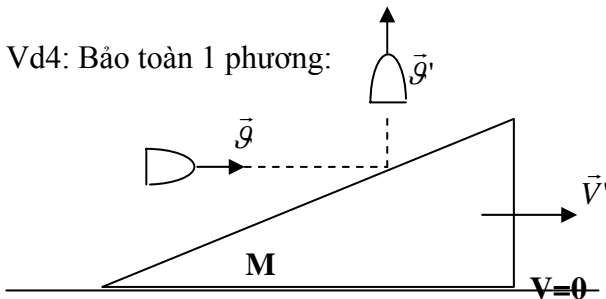
Vd3:



$$\vec{P}_1 = \vec{P}_2$$

$$0 = m \vec{g} + M \vec{V}$$

Vd4: Bảo toàn 1 phương:



$$\sum \vec{F} = m \vec{g} \Rightarrow \sum F_x = 0$$

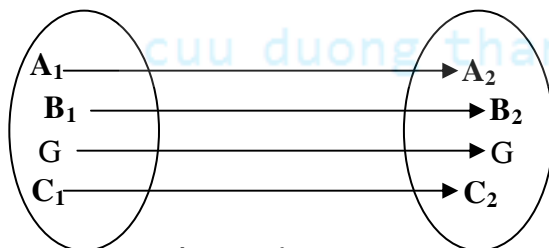
$$(m + M) \vec{V} \neq m \vec{g}' + M \vec{V}'$$

$$P_{X\ TVC} = P_{X\ SVC}$$

$$\Rightarrow m g = M V'$$

III.4. Vật rắn chuyển động tịnh tiến.

1/ Định nghĩa: Khi vật rắn chuyển động tịnh tiến thì mọi chất điểm của vật rắn chuyển động cùng quãng đường, cùng vận tốc và cùng gia tốc với khối tâm.



$$\overrightarrow{A_1 A_2} = \overrightarrow{B_1 B_2} = \dots = \overrightarrow{G_1 G_2}$$

$$\vec{g}_A = \vec{g}_B = \dots = \vec{g}_G$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B = \dots = \vec{a}_G$$

2/ Động năng của vật rắn chuyển động tịnh tiến:

$$W_{đt} = \sum W_{đi} = \sum \frac{1}{2} m_i \cdot g_i^2 = \frac{1}{2} M \cdot g_G^2$$

3/ Phương trình động lực học của vật rắn chuyển động tịnh tiến:

$$\sum \vec{F}_i = M \cdot \vec{a}_G$$

III.5. Vật rắn chuyển động quay quanh 1 trục Δ .

1/ Định nghĩa:

$$\theta_A = \theta_B = \dots = \theta$$

$$\omega_A = \omega_B = \dots = \omega$$

$$\beta_A = \beta_B = \dots = \beta$$

Khi vật rắn quay quanh 1 trục thì mọi chất điểm có cùng 1 góc quay, cùng vận tốc góc và cùng gia tốc góc.

2/ Động năng của vật rắn quay quanh 1 trục Δ :

$$W_{đ/q/\Delta} = \sum W_{đ_i} = \sum \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i \cdot \omega_i^2 \cdot r_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \sum m_i r_i^2$$

Với r_i : khoảng cách từ chất điểm thứ i đến trục Δ .

Đặt $I_\Delta = \sum m_i r_i^2$: moment quán tính của hệ chất điểm đối với trục Δ

$$\Rightarrow W_{đ/q/\Delta} = \frac{1}{2} I_\Delta \cdot \omega^2$$

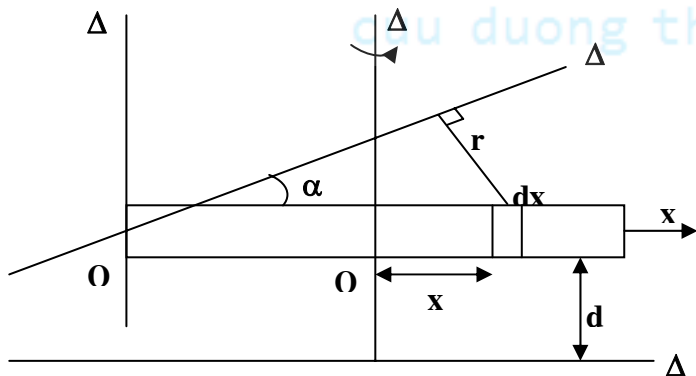
3/ Moment quán tính của hệ chất điểm đối với trục quay Δ :

$$I_\Delta = \sum m_i r_i^2$$

4/ Moment quán tính của vật rắn đối với trục quay Δ :

$$I_\Delta = \int_{VR} dm \cdot r^2$$

Vd1: Cho 1 thanh thẳng khối lượng M , dài L , khối lượng phân bố đều. Tính moment đối với trục quay Δ vuông góc với thanh và đi qua điểm giữa.



$$\begin{aligned} I/\Delta &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \lambda \cdot dx \cdot x^2 = \frac{M}{L} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\ &= \frac{M}{L} \left(\frac{L^3}{24} - \left(-\frac{L^3}{24} \right) \right) = \frac{ML^2}{12} \end{aligned}$$

+ Nếu chọn gốc O đối với trục Δ' :

$$I/\Delta' = \frac{M}{L} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^L = \frac{1}{3} ML^2$$

+ Nếu chọn trục Δ_2 lệch góc α với thanh:

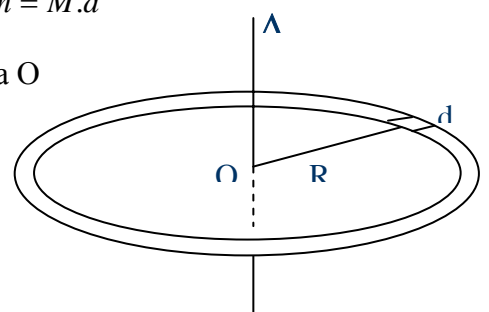
$$I/\Delta_2 = \frac{M}{L} \int_0^L dx \cdot x^2 \sin^2 \alpha = \frac{M}{L} \sin^2 \alpha \cdot \frac{L^3}{3} = \frac{ML^2}{3} \sin^2 \alpha$$

+ Nếu chọn trục Δ_3 song song với thanh:

$$I/\Delta_3 = \int_{VR} dm \cdot d^2 = d^2 \int_{VR} dm = M \cdot d^2$$

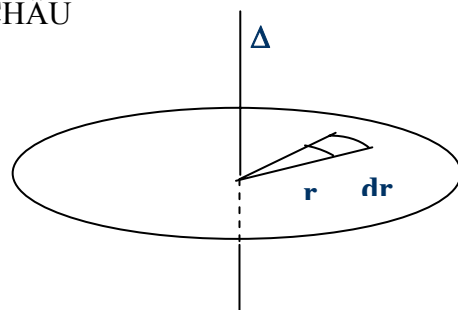
Vd2: Cho 1 vành khối lượng M , bán kính R , Δ vuông góc vành qua O

$$I/\Delta = \int_{VR} dm \cdot R^2 = R^2 \int_{VR} dm = M \cdot R^2$$



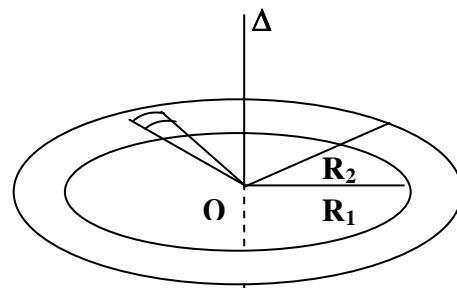
Vd3: Đĩa đặc phân bố đều

$$\begin{aligned} I_{\Delta} &= \int \sigma \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot r^2 \\ &= \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R r^3 \cdot dr \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{M}{\pi R^2} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^R \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{M \cdot R^2}{2} \end{aligned}$$

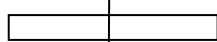


Vd4: Đĩa rỗng bán kính R_1, R_2

$$\begin{aligned} I_{\Delta} &= \frac{M}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_{R_1}^{R_2} r^3 \cdot dr \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{M}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \left[\frac{R_2^4}{4} - \frac{R_1^4}{4} \right] \cdot 2\pi \\ &= \frac{M}{2} (R_2^2 + R_1^2) \end{aligned}$$

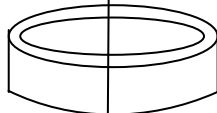


- Thanh dài: $I_{\Delta} = \frac{1}{12} ML^2$

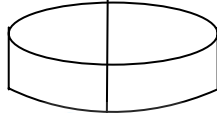


- Cầu đặc: $I_{\Delta} = \frac{2}{5} MR^2$

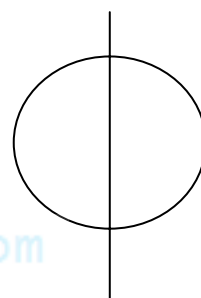
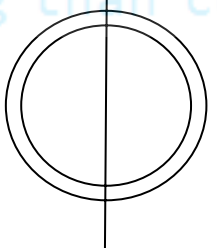
- Vành, trụ rỗng: $I_{\Delta} = MR^2$



- Đĩa đặc, trụ đặc: $I_{\Delta} = \frac{1}{2} MR^2$



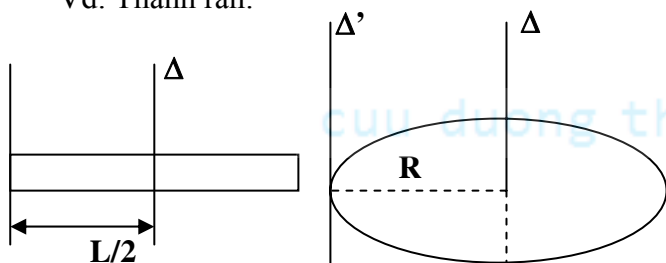
- Cầu rỗng: $I_{\Delta} = \frac{2}{3} MR^2$



3.5 Định lý Steiner-Huyghen:

Trục Δ đi qua G
Trục $\Delta' \parallel \Delta$ và cách Δ 1 đoạn d
 $I_{\Delta'} = I_{\Delta} + Md^2$

Vd: Thanh rắn:



$$I_{\Delta'} = \frac{1}{12} ML^2 + M \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

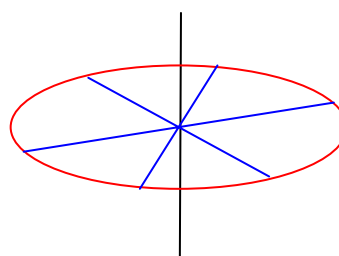
$$I_{\Delta'} = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$$

Lưu ý: Moment quán tính có mang tính chất cộng

$$I_{(m+M) \Delta'} = I_{m \Delta'} + I_{M \Delta'}$$

Vd: Hệ 1 niềng M, 6 cấy M:

$$\begin{aligned} I_{\Delta} &= I_{M/\Delta} + 6I_{m/\Delta} \\ &= MR^2 + 6 \left(\frac{1}{3} mR^2 \right) = (M + 2m)R^2 \end{aligned}$$



+ Nếu khoét đi 1 lỗ sẽ trừ đi: (M : k/l đĩa chưa khoét; M' : k/l đĩa đã khoét; m : k/l lỗ khoét)

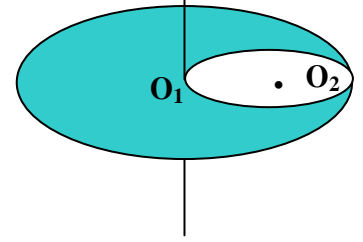
$$I_{dk/\Delta} = I_{O_1/\Delta} - I_{O_2/\Delta}$$

$$I_{dk/\Delta} = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{3}{2}mr^2$$

$$I_{dk/\Delta} = \frac{13}{24}M' \cdot R^2$$

$$\frac{M}{m} = \frac{\sigma \cdot \pi R^2}{\sigma \cdot \pi r^2} \Rightarrow M = 4m$$

$$x_G = \frac{1}{3m} \left[0 + \left(-m \frac{R}{2} \right) \right] = -\frac{1}{6}$$



Moment quán tính là giá trị vô hướng dương, (là giá trị số học)

III.6 Moment lực. $\vec{M}$

1. Moment lực $\vec{F}$ đối với điểm O

$$\vec{M}_{\vec{F}/O} = \vec{r} \times \vec{F}$$

- Điểm đặt: tại O.
- Phương: đt $\perp$ với mp tạo bởi $(\vec{r}, \vec{F})$.
- Chiều: $\vec{r}, \vec{F}, \vec{M}$ tạo thành tam diện thuận.
- Độ lớn: $M = r \cdot F \sin \alpha$

2. Moment lực $\vec{F}$ đối với trục Δ

$$\vec{M}_{\vec{F}/\Delta} = hc \vec{M}_{\vec{F}/O} / \Delta$$

3. Moment lực $\vec{F}$ của vật rắn đối với trục Δ

Tác dụng lên vật rắn 1 lực $\vec{F}$ để vật rắn quay quanh Δ .

Lực $\vec{F}$ được phân thành 3 thành phần:

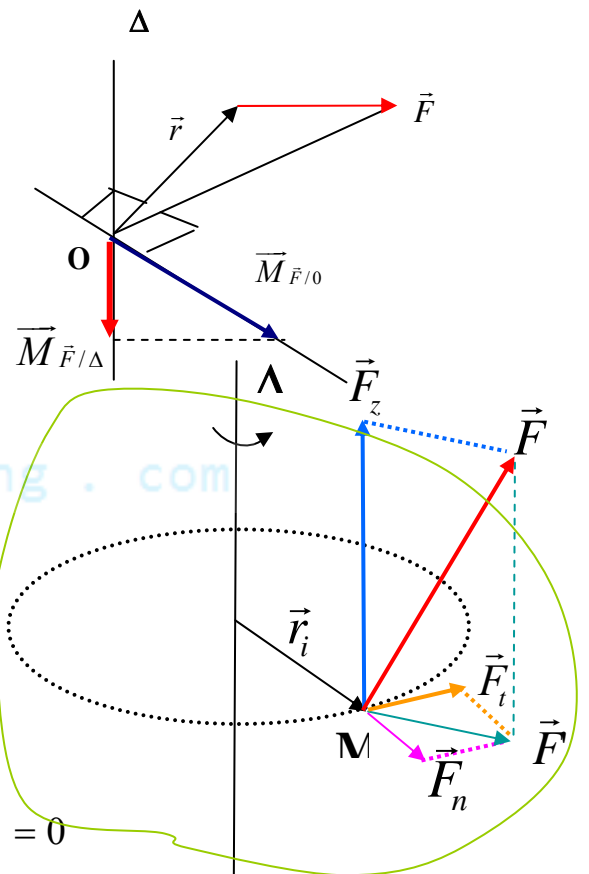
$$\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_n + \vec{F}_z$$

$\vec{F}_z$: làm vật trượt trên Δ , không làm vật rắn quay $\Rightarrow \vec{M}_{\vec{F}_z/\Delta} = 0$

$\vec{F}_n$: kéo vật trượt trên Δ , không làm vật rắn quay $\Rightarrow \vec{M}_{\vec{F}_n/\Delta} = 0$

$\vec{F}_t$: làm vật rắn quay quanh $\Delta \Rightarrow \vec{M}_{\vec{F}_t/\Delta} = \vec{r} \times \vec{F}_t$ (r : khoảng cách từ M đến Δ)

$$\vec{M}_{\vec{F}/\Delta} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{F} = 0 \\ \vec{F} \cap \Delta \neq \emptyset \\ \vec{F} // \Delta \end{cases}$$



3.6.4 Moment tổng ngoại lực của vật rắn đối với Δ :

$$\vec{M}_{\Sigma \vec{F}/\Delta} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_{it} = \sum \vec{r}_i \times m_i \cdot \vec{a}_{it}$$

$$\vec{M}_{\Sigma \vec{F}/\Delta} = \sum m_i \left[\vec{r}_i \times (\vec{\beta}_i \times \vec{r}_i) \right] = \sum m_i \left[(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) \cdot \vec{\beta}_i - (\vec{r}_i \cdot \vec{\beta}_i) \cdot \vec{r}_i \right]$$

$$\vec{M}_{\Sigma \vec{F}/\Delta} = \sum m_i \cdot r_i^2 \cdot \vec{\beta} = I_{\Delta} \cdot \vec{\beta}$$

3.6.5 Phương trình động lực học cơ bản của vật rắn quay quanh Δ :

$$\vec{M}_{\Sigma \vec{F}/\Delta} = I_{\Delta} \cdot \vec{\beta}$$

III.7. Moment động lượng. $\vec{L}$

3.7.1 Moment động lượng $\vec{L}$ đối với O

$$\vec{L}_{i/O} = \vec{r}_i \times \vec{P}_i \quad (\vec{r}_i : \text{vector vị trí})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Điểm đặt: tại O} \\ \text{Phương: vuông góc mặt phẳng tạo bởi } (\vec{r}_i, \vec{P}_i) \\ \text{Chiều: } \vec{r}_i, \vec{P}_i, \vec{L}_{i/O} \text{ tạo thành } \Delta \text{ diện thuận} \\ \text{Độ lớn: } |\vec{L}_{i/O}| = r_i \cdot p_i \cdot \sin \alpha \end{array} \right.$$

3.7.2 Moment động lượng đối với Δ :

$$\vec{L}_{/\Delta} = \text{hình chiếu } \vec{L}_{i/O} /_{\Delta}$$

3.7.3 Moment động lượng của vật rắn đối với Δ :

$$\begin{aligned} \vec{L}_{\Delta} &= \sum \vec{L}_{i/\Delta} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{g}_i \\ &= \sum m_i [\vec{r}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i)] = \sum m_i [(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) \vec{\omega}_i - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}_i) \cdot \vec{r}_i] \\ &= \sum m_i \cdot r_i^2 \cdot \vec{\omega}_i = I_{\Delta} \vec{\omega} \end{aligned}$$

Ghi chú: $\vec{M}_{\Sigma \vec{F}/\Delta}$ của vật rắn đối với trục Δ thì cùng phương, chiều với $\vec{\beta}$
 $\vec{L}_{/\Delta}$ của vật rắn đối với trục Δ thì cùng phương, chiều với $\vec{\omega}$

3.7.4 Định lý moment động lượng:

$$\frac{d\vec{L}_{/\Delta}}{dt} = I_{\Delta} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_{\Delta} \cdot \vec{\beta} =$$

3.7.5 Định luật bảo toàn moment động lượng:

$$\text{thì } \vec{L}_{/\Delta} = \text{const}$$

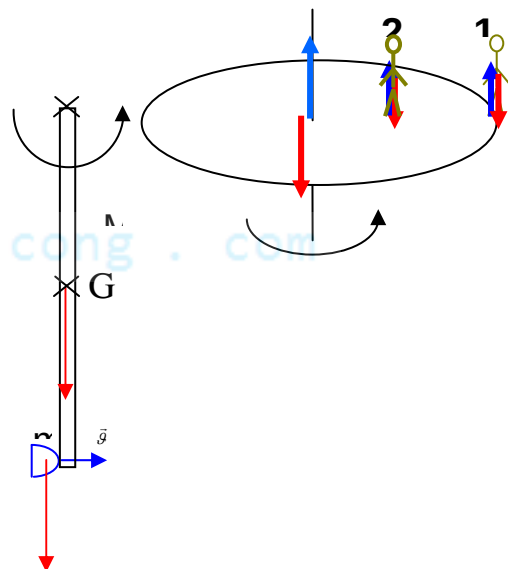
Vd: Ghé Giucopxki (người đi từ mép đĩa đến R/2)

$$\begin{aligned} \vec{L}_{\Delta 1} &= \vec{L}_{\Delta 2} \Rightarrow (I_1 + I_2) \omega_1 = (I_1 + I_2') \omega_2 \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{2} MR^2 + mR^2 \right) \omega_1 &= \left(\frac{1}{2} MR^2 + m \frac{R^2}{4} \right) \omega_2 \end{aligned}$$

Vd: Viên đạn chạm thanh M, L:

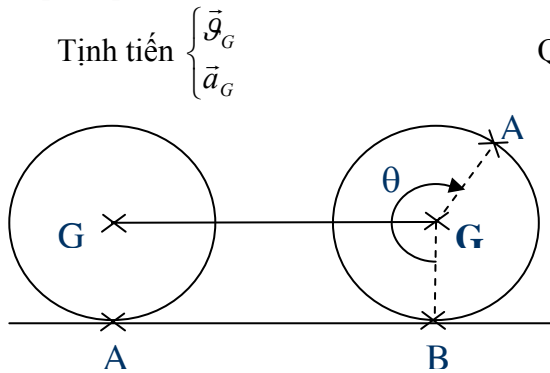
$$\begin{aligned} \vec{M}_{\Sigma \vec{F}/\Delta} &= 0 \Leftrightarrow \vec{L}_{\Delta} = \text{const} \\ \vec{L}_{TVC} &= \vec{L}_{SVC} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3} ML^2 \cdot 0 + mL^2 \cdot \frac{g}{L} = \frac{1}{3} ML^2 \cdot \Omega' + mL^2 \cdot \omega'$$



III.8. Vật rắn chuyển động lăn không trượt.

3.8.1 Định nghĩa 1: khi vật rắn lot là vừa chuyển động tịnh tiến theo khối tâm G và vừa chuyển động quay quanh G



$$AB = G_1 G_2 = \text{cung} AB = R\theta$$

$$g_G = R \frac{d\theta}{dt} = \omega R$$

$$\Rightarrow a_G = \beta R$$

- Vector vận tốc của chuyển động lot tại G, A, B, C

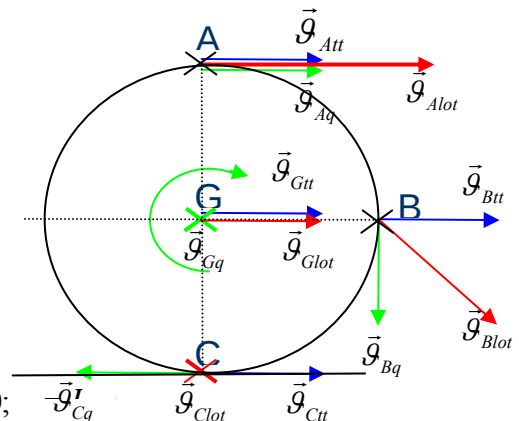
- Xét chuyển động tịnh tiến: $\vec{g}_G = \vec{g}_A = \vec{g}_B = \vec{g}_C$

- Xét chuyển động quay quanh G:

$$g_{Gt} = g_{Aq} = g_{Bq} = g_{Cq} \cdot g_{Gq} = 0$$

- Xét chuyển động lot:

$$\vec{g}_{lot} = \vec{g}_{ttG} + \vec{g}_{qG}$$



Vậy: $\vec{g}_{Aot} = 2\vec{g}_{Gt}$; $\vec{g}_{Glot} = \vec{g}_{Gt}$; $|\vec{g}_{Blot}| = \sqrt{2} \cdot |\vec{g}_{Gt}|$; $\vec{g}_{Clot} = 0$;

Định nghĩa 2: Lot là quay quanh tâm quay tức thời ($g_{lot} = 0$): $\omega = \frac{g_G}{R}$

3.8.2 Động năng của vật rắn Lot:

$$W_{d/lot} = W_{dnG} + W_{dqG} = \frac{1}{2} M g_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

3.8.3 Phương trình cơ bản ĐLH của Lot:

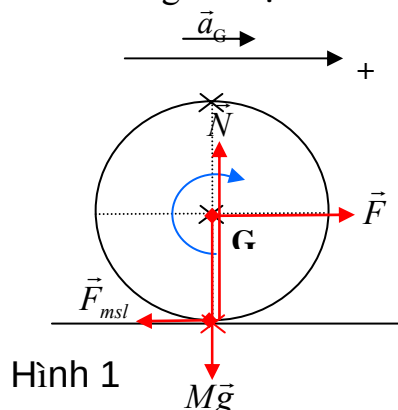
$$\begin{cases} \sum \vec{F}_i = M \cdot \vec{a}_G \\ \vec{M}_{\Sigma \vec{F}/\Delta} = I_{\Delta} \cdot \vec{\beta} \end{cases}$$

- **Chú ý;**

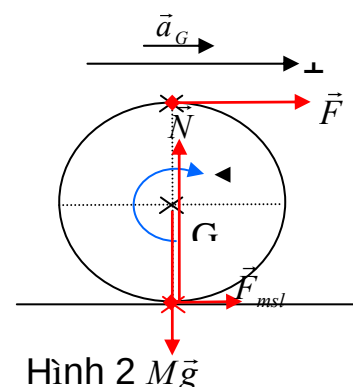
* Trong cđ Lot có lực ma sát lăn: là dạng lực ma sát tĩnh: $\vec{F}_{msl}$

- Điểm đặt: điểm tiếp xúc.
- Phương: phương chuyển động tịnh tiến.
- Chiều: * $\vec{F}$ đi qua G: $\vec{F}_{msl}$ ngược chiều tịnh tiến
* $\vec{F}$ đi qua G: $\vec{F}_{msl}$ cùng chiều tịnh tiến
- Độ lớn: Phải tìm và $0 \leq F_{msl} \leq kN$.

* Công của lực ma sát lăn bằng không (dl=0).



$$\begin{cases} M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{msl} + \vec{F} = M\vec{a}_G \\ \vec{M}_{\Sigma \vec{F}/G} = I_G \vec{\beta} \end{cases}$$

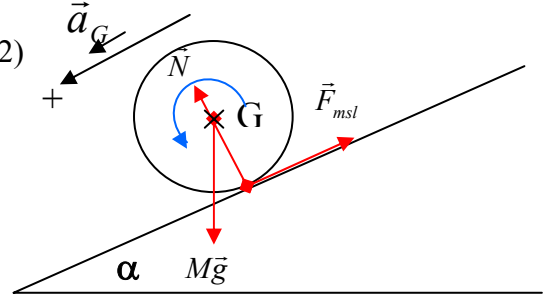


$$\begin{cases} -F_{msl} + F = Ma_G \\ +F_{msl} \cdot R = I_G \cdot \beta = \left(\frac{1}{2} MR^2 \right) \left(\frac{a_G}{R} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} +F_{msl} + F = Ma_G \\ -F_{msl} \cdot R + F \cdot R = \left(\frac{1}{2} MR^2 \right) \left(\frac{a_G}{R} \right) \end{cases}$$

$$a_G = \frac{2}{3} \frac{F}{M} \quad F_{msl} = \frac{F}{3} \quad a_G = \frac{4}{3} \frac{F}{M} \quad F_{msl} = \frac{F}{3}$$

$$\begin{cases} M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{msl} = M\vec{a}_G \\ \vec{M}_{\Sigma \vec{F}/G} = I_G \vec{\beta} \end{cases} \quad \begin{cases} -F_{msl} + Mg \sin \alpha = Ma_G \quad (1) \\ +F_{msl} \cdot R = I_G \cdot \beta = \left(MR^2 \right) \left(\frac{a_G}{R} \right) \quad (2) \end{cases}$$

Vành: $a_G = 1/2 g \sin \alpha$ $F_{ms} = Ma_G$
Đĩa: $a_G = 2/3 g \sin \alpha$ $F_{ms} = 1/2 Ma_G$
Cầu rỗng: $a_G = 3/5 g \sin \alpha$ $F_{ms} = 2/3 Ma_G$
Cầu đặc: $a_G = 5/7 g \sin \alpha$ $F_{ms} = 2/5 Ma_G$
Tròn trượt 0 ms: $a_G = g \sin \alpha$



III.9. Va chạm.

3.9.1 Va chạm đàn hồi:

$$\text{TVC} \quad m_1 \vec{g}_1, m_2 \vec{g}_2$$

$$\text{SVC} \quad m_1 \vec{g}_1', m_2 \vec{g}_2'$$

Trong va chạm hoàn toàn đàn hồi thì động lượng của hệ và động năng hệ bảo toàn;

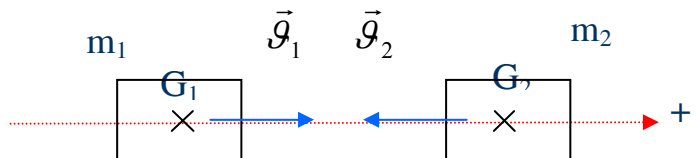
$$\begin{cases} \vec{P}_{TVC} = \vec{P}_{SVC} \rightarrow m_1 \vec{g}_1 + m_2 \vec{g}_2 = m_1 \vec{g}_1' + m_2 \vec{g}_2' \\ \vec{W}_{dTVC} = \vec{W}_{dSVC} = \frac{1}{2} m_1 g_1^2 + \frac{1}{2} m_2 g_2^2 = \frac{1}{2} m_1 g_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 g_2'^2 \end{cases} \quad (1)$$

- Nếu va chạm xuyên tâm:

$$m_1 g_1 + m_2 g_2 = m_1 g_1' + m_2 g_2' \quad (2) \quad (g_1, g_2, g_1', g_2' \text{ là giá trị đại số})$$

$$(1), (2) \Rightarrow g_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} g_2$$

$$\Rightarrow g_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} g_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g_2$$



Vd:

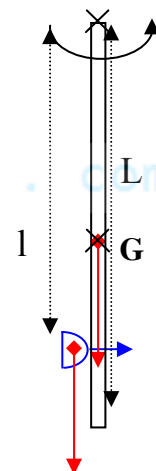
$$\bullet \vec{L}_{TVC} = \vec{L}_{SVC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} ML^2 \omega + ml^2 \cdot \frac{g}{l} = \frac{1}{3} ML^2 \omega' + ml^2 \cdot \frac{g'}{l}$$

$$\bullet W_{dTVC} = W_{dSVC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} ML^2 \right) \omega^2 + \frac{1}{2} ml^2 \cdot \frac{g}{l} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} ML^2 \right) \omega'^2 + \frac{1}{2} ml^2 \cdot \frac{g'^2}{l^2}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} ML^2 \right) \times 0 + \frac{1}{2} (ml^2) \times \frac{g^2}{l^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} ML^2 \right) \times \Omega'^2 + \frac{1}{2} (ml^2) \times \frac{g'^2}{l^2} \quad (2)$$



3.9.2 Va chạm mềm:

$$\begin{cases} \text{TVC} & m_1 \vec{g}_1, m_2 \vec{g}_2 \\ \text{SVC} & (m_1 + m_2) \vec{g}' \end{cases}$$

Trong va chạm mềm chỉ có động lượng của hệ bảo toàn, động năng của hệ không bảo toàn. Động năng trước va chạm trừ đi động năng sau va chạm bằng nhiệt lượng làm vật bị biến dạng.

$$m_1 \vec{g}_1 + m_1 \vec{g}_2 = (m_1 + m_2) \vec{g}'$$

Nếu va chạm xuyên tâm:

$$m_1 g_1 + m_1 g_2 = (m_1 + m_2) g' \quad (g_1, g_2, g' \text{ là giá trị đại số})$$

Chú ý chọn chiều (+)

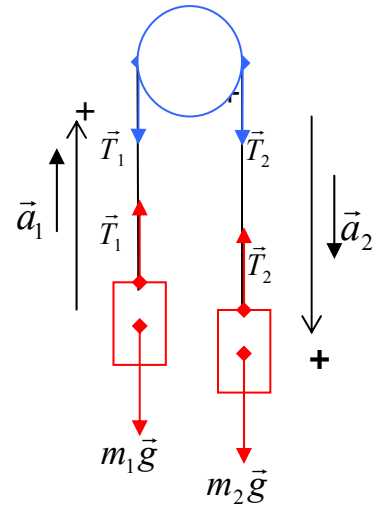
Vd1: Chọn chiều (+) là chiều chuyển động của m_1, m_2 ; là chiều quay tròn rọc (Δ hướng vào)

$$m_1 : m_1 \vec{g} + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}_1$$

$$m_2 : m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}_2$$

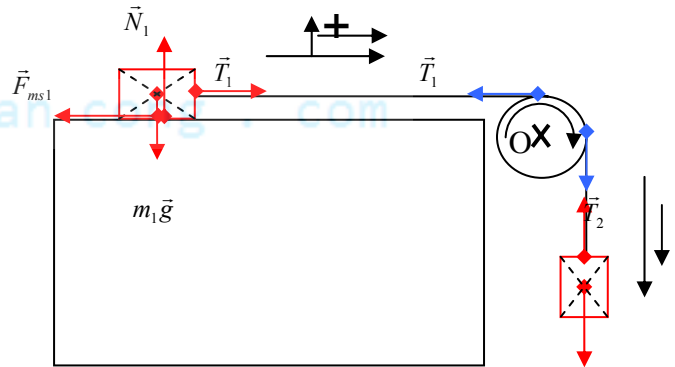
$$M : \vec{M}_{\sum \vec{F}/O} = I \cdot \vec{\beta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -m_1 g + T_1 = m_1 a_1 \\ m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \\ -T_1 R + T_2 R = I \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m_1 g + T_1 = m_1 a \\ m_2 g - T_2 = m_2 a \\ (-T_1 + T_2) R = \frac{1}{2} M R^2 \cdot \frac{a}{R} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M}$$



Vd2

$$a = \frac{g(m_2 - km_1)}{m_1 + m_2 + M}$$



Vd3:

$$m_1 \uparrow : \frac{m_2}{m_1} > \sin \alpha + k \cos \alpha$$

$$m_1 \downarrow : \frac{m_2}{m_1} > \sin \alpha - k \cos \alpha$$

$$m_1 \uparrow : a = \frac{g[m_2 - m_1(\sin \alpha + k \cos \alpha)]}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M}$$

$$m_1 \downarrow : a = \frac{g[m_1(\sin \alpha + k \cos \alpha) - m_2]}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M}$$

