

Đại học Quốc gia TP.HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
Khoa: Khoa Học Ứng Dụng
Bộ môn: Toán Ứng Dụng



TOÁN 2

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 1:

SỐ PHỨC

cuu duong than cong . com

1. DẠNG ĐẠI SỐ CỦA SỐ PHỨC:

1. Dạng đại số của số phức:

a/ Định nghĩa:

- Dạng đại số của số phức là: $z = a + i b$

Ở đây :

a : được gọi là phần thực của số phức z ,

ký hiệu là $\text{Re } z$ -

b : được gọi là phần ảo của số phức z ,

ký hiệu là $\text{Im } z$ -

i : được gọi là đơn vị ảo với $i^2 = -1$

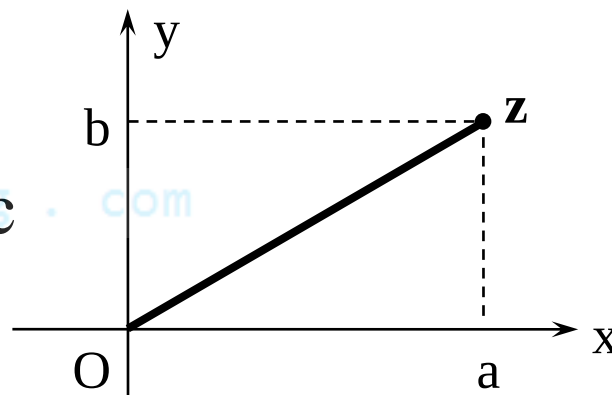
1. DẠNG ĐẠI SỐ CỦA SỐ PHỨC:

- Tập hợp số phức ta ký hiệu là $\mathbb{C}$ hay còn gọi là mặt phẳng phức.

Ở đây :

Trục Ox : được gọi là trục thực

Trục Oy : được gọi là trục ảo



Mỗi số phức được biểu diễn bởi một điểm trên mặt phẳng phức.

Khoảng cách từ gốc tọa độ O tới z được gọi là môđun của số phức z và ký hiệu là $|z|$ hoặc $\text{mod } z$

1. DẠNG ĐẠI SỐ CỦA SỐ PHỨC:

- $\bar{z} = a - ib$ được gọi là số phức liên hợp của z

b/ Các phép toán:

Cho hai số phức $\begin{cases} z_1 = a_1 + ib_1 \\ z_2 = a_2 + ib_2 \end{cases}$

$$* \quad z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

$$* \quad z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

$$\begin{aligned} * \quad z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned}$$

1. DẠNG ĐẠI SỐ CỦA SỐ PHỨC:

Ở đây : Ta nhân tương tự như trong trường hợp số phức với chú ý $i^2 = -1$

Dễ nhận thấy $z = a + ib$ thì $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

$$\text{và } \frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{\overbrace{a + ib} \cdot \overbrace{a - ib}}$$

$$= \frac{a}{a^2 + b^2} + i \left(-\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

1. DẠNG ĐẠI SỐ CỦA SỐ PHỨC:

$$\begin{aligned}
 * \quad \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + i b_1}{a_2 + i b_2} = \frac{a_1 + i b_1}{a_2 + i b_2} \cdot \frac{a_2 - i b_2}{a_2 - i b_2} \\
 &= \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) + i \left(\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) \\
 &\quad \left(\text{ĐK: } z_2 \neq 0 \right)
 \end{aligned}$$

1. DẠNG ĐẠI SỐ CỦA SỐ PHỨC:

Từ định nghĩa của các phép toán, ta dễ dàng chứng minh các công thức sau:

$$* \quad z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2 \operatorname{Re} z$$

$$* \quad z - \bar{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2ib = 2i \operatorname{Im} z$$

$$* \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$* \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$* \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$* \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

1. DẠNG ĐẠI SỐ CỦA SỐ PHỨC:

VD1: Biểu diễn số phức sau dưới dạng đại số

$$z = \frac{1 + 3i}{1 + i}$$

cuu duong than cong . com

Nhân tử và mẫu cho số phức liên hợp $1 - i$ ta được

$$z = \frac{(1 + 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{4 + 2i}{2} = 1 + i$$

cuu duong than cong . com

1. DẠNG ĐẠI SỐ CỦA SỐ PHỨC:

VD2: Cho $f(z) = z^3 - (2 + i)z^2 + (2 + i)z - 2i$

a/ Tính $f(i)$

b/ Giải phương trình $f(z) = 0$

Giải:

a/ Dễ dàng tính được $f(i) = 0$

b/ $z = i$ là 1 nghiệm của phương trình
nên ta phân tích được

$$f(z) = (z - i)(z^2 - 2z + 2) = 0$$

1. DẠNG ĐẠI SỐ CỦA SỐ PHỨC:

Nhận xét :

Phương trình $z^2 - 2z + 2 = 0$ có 2 nghiệm là $1 \pm i$

ở đây $\Delta' = -1 = i^2$

Kết luận :

Phương trình $f(z) = 0$ có 3 nghiệm là

$$z = i, \quad z = 1 \pm i$$

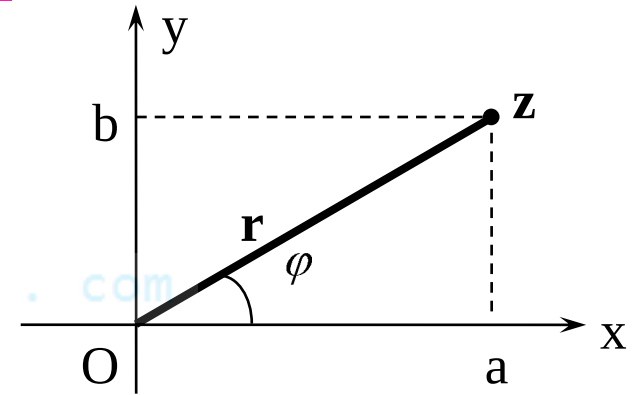
2. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC:

2. Dạng lượng giác của số phức:

a/ Định nghĩa:

Cho số phức $z = a + ib$, $z \neq 0$

Gọi r là khoảng cách từ gốc tọa độ O tới z



và φ là góc hợp giữa hướng dương của trục thực với bán kính vectơ của điểm z .

Khi đó ta có:

$$z = a + ib = r \cos \varphi + i \sin \varphi$$

2. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC:

- Biểu thức $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ được gọi là dạng lượng giác của số phức z

Ở đây :

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ chính là môđun của số phức z
 φ được gọi là acgumen của số phức z , ký hiệu $\arg z$

Ta có : $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$

Chú ý : chọn φ sao cho $\cos \varphi$ và $\sin \varphi$ cùng dấu

2. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC:

VD: Số phức $z = -1 - i$

Ta có: $|z| = r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{-1} = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ hoặc } \varphi = \frac{5\pi}{4}$$

Ta chọn $\varphi = \frac{5\pi}{4}$

$$\text{Vậy } z = -1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

2. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC:

b/ Các phép toán:

Cho hai số phức

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

$$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

$$* \quad z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$* \quad z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$* \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)), z_2 \neq 0$$

2. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC:

Từ các phép toán này ta có thể chứng minh được các công thức sau:

$$\left[\cos \varphi + i \sin \varphi \right]^k = r^k \left[\cos k\varphi + i \sin k\varphi \right] \quad (1)$$

$k \in \mathbb{Z}$

* Công thức (1) được gọi là **công thức Moivre**

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (2)$$

* Công thức (2) được gọi là **công thức Euler**

2. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC:

Vậy số phức $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \stackrel{(*)}{=} r e^{i\varphi}$

Biểu thức $z = r e^{i\varphi}$ được gọi là dạng mũ của số phức z

cuuduongthancong.com

VD: Tính $(1 + i)^8$

$$\text{Ta có : } 1 + i \stackrel{(*)}{=} \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

cuuduongthancong.com

$$\Rightarrow (1 + i)^8 = 2^4 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) \stackrel{(*)}{=} 2^4$$

3. KHAI CĂN CỦA SỐ PHỨC:

3. Khai căn của số phức:

Ta giải phương trình $z^n = \alpha$ với $\begin{cases} z \in \mathbb{C} \\ \alpha \in \mathbb{C} \end{cases}$

Giả sử $\alpha = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Ta đặt $z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$

Khi đó ta có

$$z^n = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \varphi + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \frac{\varphi + k2\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

3. KHAI CĂN CỦA SỐ PHỨC:

Vậy nghiệm của phương trình $z^n = \alpha$ là

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\varphi + k 2 \pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + k 2 \pi}{n} \right) \right] \quad (*)$$

ở đây $k = 0, 1, \dots, n - 1$ là ta có đủ nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình $z^n = \alpha$ có đúng n nghiệm cho bởi công thức (*) với $k = 0, 1, \dots, n - 1$ và chúng được gọi là các căn bậc n của số phức α

3. KHAI CĂN CỦA SỐ PHỨC:

VD: Tìm $\sqrt[3]{1}$

Ta có : $1 = \cos 0 + i \sin 0$

$$\text{vậy } \sqrt[3]{1} = \sqrt{\cos 0 + i \sin 0} = \left(\cos \frac{k 2 \pi}{3} + i \sin \frac{k 2 \pi}{3} \right)$$

với $k = 0, 1, 2$

Vậy $\sqrt[3]{1}$ là $\varepsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$

$$\varepsilon_1 = \cos \frac{2 \pi}{3} + i \sin \frac{2 \pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$\varepsilon_2 = \cos \frac{4 \pi}{3} + i \sin \frac{4 \pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

4. ĐỊNH LÝ CƠ BẢN CỦA ĐẠI SỐ:

4. Định lý cơ bản của đại số:

a/ Định lý:

Phương trình bậc n , $n \in \mathbb{Z}$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad a_n \neq 0$$

có đúng n nghiệm kể cả nghiệm thực, nghiệm phức và nghiệm bội của nó.

VD: Phương trình bậc 5

$x^5 - 1 = 0$ có đúng 5 nghiệm

là $x = 1$ (nghiệm bội 3) và $x = \pm i$

4. ĐỊNH LÝ CƠ BẢN CỦA ĐẠI SỐ:

b/ Định lý 2:

Cho phương trình bậc n với hệ số thực

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

ở đây $\begin{cases} a_i \in \mathbb{R} \\ a_n \neq 0 \end{cases}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$

Nếu $x = \alpha$ là nghiệm của phương trình
thì $x = \bar{\alpha}$ cũng là nghiệm của phương trình này.

4. ĐỊNH LÝ CƠ BẢN CỦA ĐẠI SỐ:

VD : Giải phương trình

$$z^4 + 4z^3 + 11z^2 + 14z + 10 = 0$$

Biết phương trình này có 1 nghiệm là $z_1 = -1 + i$

Nhận xét : $z_1 = -1 + i$ là nghiệm của phương trình

vậy $z_2 = -1 - i$ cũng là nghiệm của phương trình

Ta có :

$$\begin{aligned} (z - z_1)(z - z_2) &= (z + 1 - i)(z + 1 + i) \\ &= z^2 + 2z + 2 \end{aligned}$$

4. ĐỊNH LÝ CƠ BẢN CỦA ĐẠI SỐ:

Chia đa thức ta được

$$z^4 + 4z^3 + 11z^2 + 14z + 10 = (z^2 + 2z + 2)(z^2 + 2z + 5)$$

Ta đi giải phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$

$$\Delta = 1 - 5 = -4 = 4i^2$$

vậy phương trình này có 2 nghiệm là $-1 \pm 2i$

Kết luận :

Phương trình $z^4 + 4z^3 + 11z^2 + 14z + 10 = 0$

$$\text{có 4 nghiệm là } \begin{cases} z_1 = -1 \pm i \\ z_3 = -1 \pm 2i \end{cases}$$

PHẦN BÀI TẬP CHƯƠNG 1:

SỐ PHỨC

cuu duong than cong . com

BÀI TẬP CHƯƠNG 1: SỐ PHỨC

BÀI 1: Viết số phức sau dưới dạng đại số

$$\text{a/ } z = \frac{-2 + i}{4 - 3i}$$

$$\text{b/ } z = \left(\frac{1 + i}{1 - i} \right)^5$$

BÀI 2: Viết số phức sau dưới dạng lượng giác

$$\text{a/ } z = -1$$

$$\text{b/ } z = -2 + 2i$$

$$\text{c/ } z = -\sqrt{3} - i$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 1: SỐ PHỨC

BÀI 3: Tính căn bậc 2 của số phức sau :

$$z = \frac{8 + 16i}{i - 2} \quad (\text{kết quả biểu diễn dưới dạng đại số})$$

BÀI 4: Giải phương trình

a/ $z^2 = \bar{z}$

b/ $(1 + i)z^2 + (3 - i)z - 4 + 6i = 0$

c/ $4z^4 - 24z^3 + 57z^2 + 18z - 45 = 0$

biết $z = 3 + i\sqrt{6}$ là 1 nghiệm của phương trình này

BÀI TẬP CHƯƠNG 1: SỐ PHỨC

BÀI 5:

Cho số phức $z = \frac{2 + 3i}{3 - 2i}$. Tính z^{1998}

cuuduongthancong.com

BÀI 6:

Cho số phức $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$

cuuduongthancong.com

Tìm dạng lượng giác của số phức $z + 1$

PHẦN HƯỚNG DẪN VÀ KẾT QUẢ BÀI TẬP CHƯƠNG 1:

SỐ PHỨC

cuu duong than cong . com

ĐÁP ÁN BÀI TẬP CHƯƠNG 1: SỐ PHỨC

BÀI 1:

$$\text{a/ } z = \frac{-2 + i}{4 - 3i} = -\frac{11}{25} - \frac{2}{25}i$$

HD: Nhân tử và mẫu cho số phức liên hợp $4 + 3i$

$$\text{b/ } z = \left(\frac{1 + i}{1 - i} \right)^5 = i^5 = i$$

HD: Trong dấu ngoặc nhân tử và mẫu với số phức liên hợp $1 + i$

ĐÁP ÁN BÀI TẬP CHƯƠNG 1: SỐ PHỨC

BÀI 2:

$$\text{a/ } z = -1 = 1 \cdot \cos \pi + i \sin \pi$$

HD: $a = -1$, $b = 0$

Ta có $r = 1$, $\tan \varphi = 0$. Chọn $\varphi = \pi$

$$\text{b/ } z = -2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

HD: $a = -2$, $b = 2$

Ta có $r = 2\sqrt{2}$, $\tan \varphi = -1$. Chọn $\varphi = \frac{3\pi}{4}$

ĐÁP ÁN BÀI TẬP CHƯƠNG 1: SỐ PHỨC

$$c/ \quad z = -\sqrt{3} - i = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$$

HD: $a = -\sqrt{3}, \quad b = -1$

Ta có $r = 2, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Chọn $\varphi = \frac{7\pi}{6}$

ĐÁP ÁN BÀI TẬP CHƯƠNG 1: SỐ PHỨC

BÀI 3:

$$\sqrt[3]{\frac{8 + 16i}{i - 2}} \text{ có 3 giá trị là } \begin{cases} \varepsilon_0 = \sqrt{3} - i \\ \varepsilon_1 = 2i \\ \varepsilon_2 = -\sqrt{3} - i \end{cases}$$

HD: $z = \sqrt[3]{\frac{8 + 16i}{i - 2}} = \sqrt[3]{-8i} = 2 \sqrt[3]{-i}$

$$\Rightarrow z = 2 \sqrt[3]{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$

ĐÁP ÁN BÀI TẬP CHƯƠNG 1: SỐ PHỨC

BÀI 4:

$$a/ \quad z^2 = \bar{z}$$

Phương trình này có 4 nghiệm là $\begin{cases} z = 0, & z = 1 \\ z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$

HD:

Đặt $z = a + ib$

$$z^2 = \bar{z} \Rightarrow \begin{cases} a = a^2 - b^2 \\ -b = 2ab \end{cases} \dots$$

ĐÁP ÁN BÀI TẬP CHƯƠNG 1: SỐ PHỨC

$$b/ (1 + i)z^2 + (3 - i)z - 4 + 6i = 0$$

Phương trình này có 2 nghiệm là $\begin{cases} z = 1 - i \\ z = -2 + 3i \end{cases}$

HD: $\Delta = 48 - 14i = (-7 - i)^2 \dots$

ĐÁP ÁN BÀI TẬP CHƯƠNG 1: SỐ PHỨC

$$c/ \quad 4z^4 - 24z^3 + 57z^2 + 18z - 45 = 0$$

Phương trình này có 4 nghiệm là $\begin{cases} z = 3 \pm i\sqrt{6} \\ z = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

HD: $(z - (3 + i\sqrt{6}))(z - (3 - i\sqrt{6})) = z^2 - 6z + 15$

$$4z^4 - 24z^3 + 57z^2 + 18z - 45 = (z^2 - 6z + 15)(4z^2 - 3)$$

ĐÁP ÁN BÀI TẬP CHƯƠNG 1: SỐ PHỨC

BÀI 5:

$$z^{1998} = \left(\frac{2 + 3i}{3 - 2i} \right)^{1998} = -1$$

HD:

$$\frac{2 + 3i}{3 - 2i} = \frac{(2 + 3i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{2 + 3i}{13} = i$$

$$z^{1998} = i^{1998} = i^4 \cdot i^{499} = i^2 = -1$$

ĐÁP ÁN BÀI TẬP CHƯƠNG 1: SỐ PHỨC

BÀI 6:

$$z = e^{i \frac{\pi}{3}}$$

$$\text{Vậy } z + 1 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

cuu duong than cong . com

$$\text{HD: } z = e^{i \frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$z + 1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

cuu duong than cong . com